

The background of the slide is a close-up photograph of concentric ripples on a dark blue surface, likely water. The ripples are centered in the lower-left quadrant and spread outwards, creating a series of overlapping circles. The lighting highlights the crests of the ripples, giving them a slightly lighter blue or greyish appearance against the darker background.

Ondas

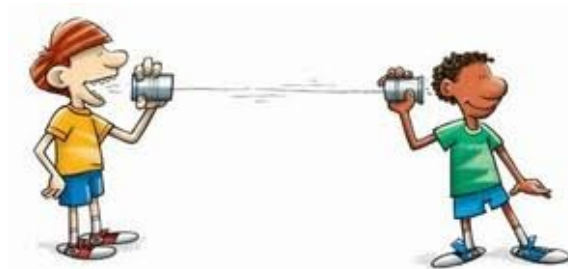
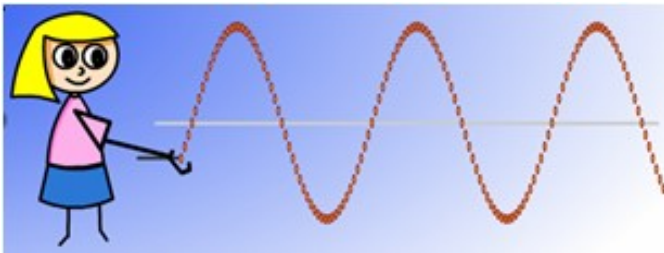
Parte 1

Movimento Ondulatório

Definições

“ Uma onda é qualquer perturbação de uma condição de equilíbrio que se propaga de uma região para outra”.

“ Uma onda é qualquer sinal que se transmite de um ponto a outro de um meio com velocidade definida”.



Iniciaremos estudando ondas em uma corda. Elas são de fácil visualização e apresentam muitas das características comuns a todas as ondas.

TIPOS DE ONDAS

Ondas Mecânicas: Necessitam de um meio para se propagarem.

Exemplos – Pedra atirada em um lago, ondas de som, ondas sísmicas, bandeira balançando, ondas numa corda, etc.

Ondas Eletromagnéticas: Não necessitam de um meio para se propagarem. “Todas as ondas eletromagnéticas se propagam através do vácuo a uma mesma velocidade escalar c ($c = 3,0 \times 10^8 \text{ m/s}$).

Exemplos – Luz visível, Raio X, Microondas, etc.

Ondas de Matéria – Leis da mecânica quântica.

Exemplo – um feixe de elétrons exibe comportamento ondulatório.

CARACTERÍSTICAS DAS ONDAS

Podemos separar as ondas em duas categorias:

- ✓ **Ondas Progressivas (ou viajantes)**
- ✓ **Ondas Estacionárias**

ONDAS PROGRESSIVAS

Onda Longitudinal – perturbação ao longo da direção de propagação.

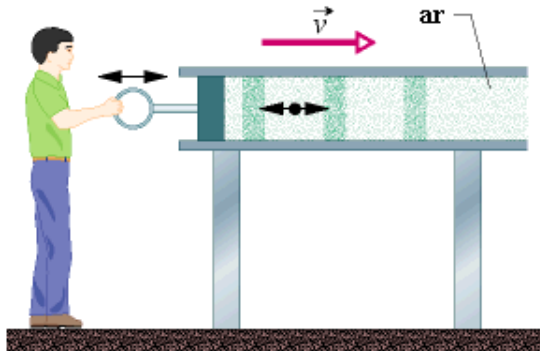


Fig. 1 Uma onda sonora é gerada num tubo Cheio de ar ao se movimentar um pistão para frente e para trás.

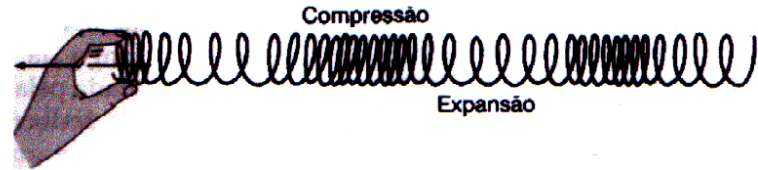


Fig.2 – Onda longitudinal em uma mola.

Onda Transversal - perturbação perpendicular à direção de propagação.

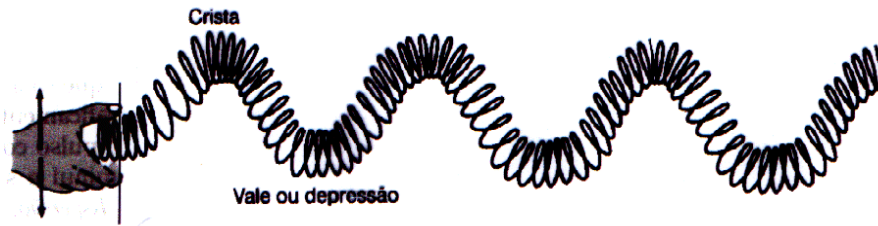


Fig.3 – Onda transversal em uma mola.

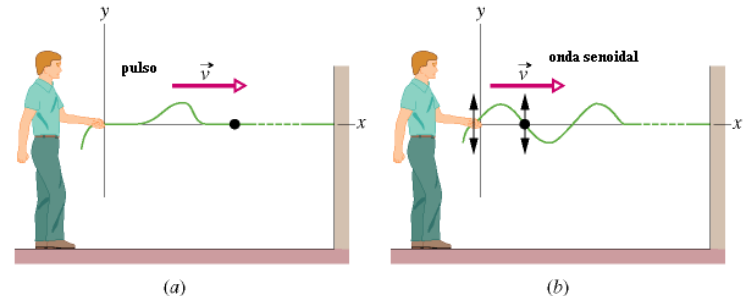


Fig.4 – (a) Transmitindo um único pulso ao longo de uma corda esticada. (b) Transmitindo uma onda senoidal.

Expressão matemática de uma onda

A coordenada y indica o deslocamento transversal de um ponto particular da corda e depende da sua posição x e do tempo t ; o deslocamento é dado por.

$$y(x, t)$$

No instante $t = 0$,

$$y(x, 0) = f(x) \quad (1)$$

No instante t em relação ao referencial O'

$$y(x, t) = f(x') = f(x - vt) \quad (2)$$

A função $f(x - vt)$ tem no instante t a mesma forma em relação ao ponto $x = vt$, que a função $f(x)$ tem em relação ao ponto $x = 0$ no instante $t = 0$.

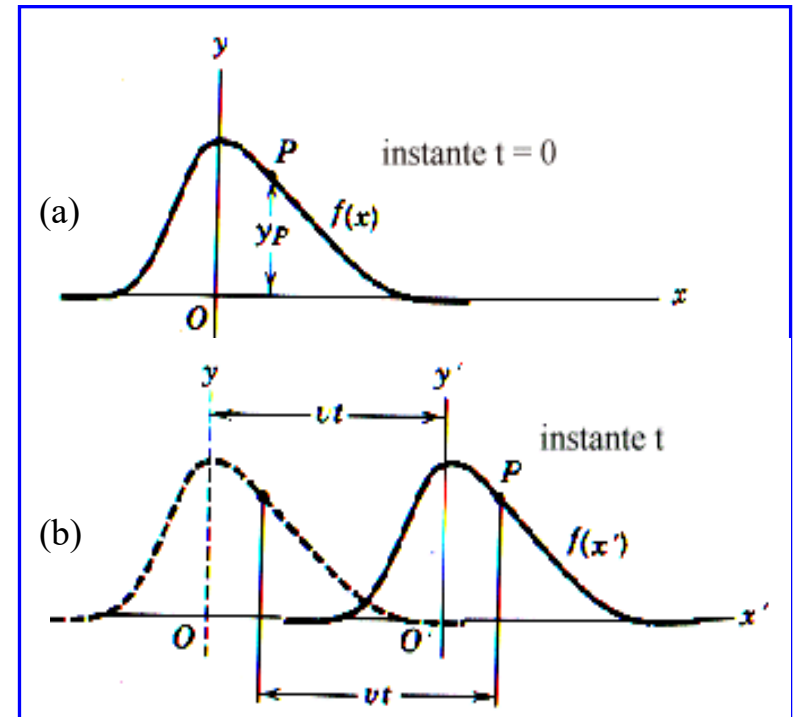


Fig.5

ONDAS HARMÔNICAS

Uma onda senoidal se propagando no sentido positivo de um eixo x tem a forma matemática:

The diagram illustrates the components of the harmonic wave equation $y(x, t) = y_m \sin(kx - \omega t)$. The equation is written in red. Labels in green and blue are connected to parts of the equation by lines and brackets.

- Amplitude** (green) points to y_m .
- Deslocamento** (green) points to y in $y(x, t)$.
- Termo oscilante** (green) points to the sine function $\sin(kx - \omega t)$.
- Fase** (green) points to the argument of the sine function, $kx - \omega t$.
- Número de onda angular** (blue) points to k .
- Posição** (blue) points to x .
- Frequência angular** (blue) points to ω .
- Tempo** (blue) points to t .

$y(x, t) = y_m \sin(kx - \omega t)$

Fig. 6

Representação Gráfica de $y(x, t) = y_m \text{sen}(kx - \omega t)$

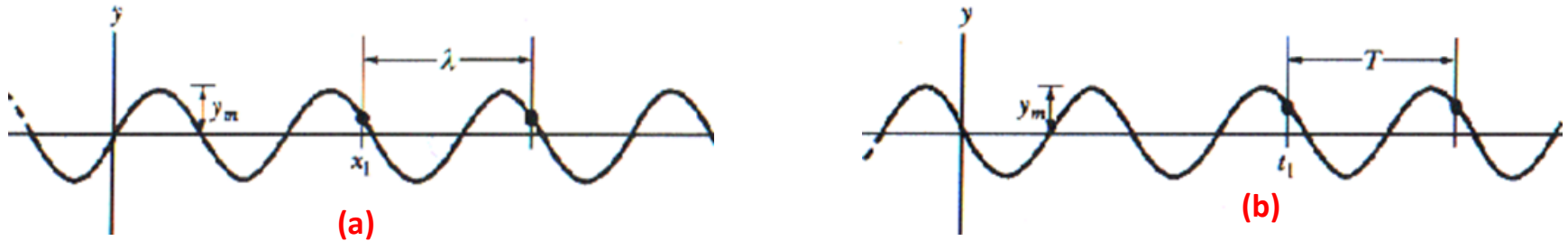


Fig. 7 – Representação da onda: (a) para $t = 0$ e (b) $x = 0$

COMPRIMENTO DE ONDA E NÚMERO DE ONDA

Onda Harmônica: $y(x, t) = y_m \text{sen}(kx - \omega t)$, Em $t = 0 \rightarrow y(x, 0) = y_m \text{sen}(kx)$ (3)

Definimos o comprimento de onda λ como a distância após a qual o padrão da onda começa a se repetir, logo

$$y(x) = y(x + \lambda) \Rightarrow y(x, 0) = y_m \text{sen}(kx) = y_m \text{sen}(kx + k\lambda) \quad (4)$$

A função seno começa a se repetir quando o argumento é acrescido de 2π radianos. Logo, (4) é verdadeira se $k\lambda = 2\pi$. Portanto,

$$\underbrace{\lambda = \frac{2\pi}{k}}_{\text{Comprimento de onda}} \quad \text{ou} \quad \underbrace{k = \frac{2\pi}{\lambda}}_{\text{Número de onda angular}} \quad \text{e} \quad \underbrace{\kappa = \frac{k}{2\pi}}_{\text{Número de onda}} \quad (5)$$

UNIDADES: $\lambda : [L]$; $k : \text{rad}/[L]$; $\kappa : [L]^{-1}$

FREQUÊNCIA ANGULAR, FREQUÊNCIA E PERÍODO

Onda Harmônica: $y(x, t) = y_m \text{sen}(kx - \omega t)$,

$$\text{Em } x = 0 \rightarrow y(0, t) = y_m \text{sen}(-\omega t) = -y_m \text{sen}(\omega t) \quad (6)$$

Definimos o período T de uma onda como o intervalo de tempo após o qual o movimento de um elemento oscilante da corda começa a se repetir,

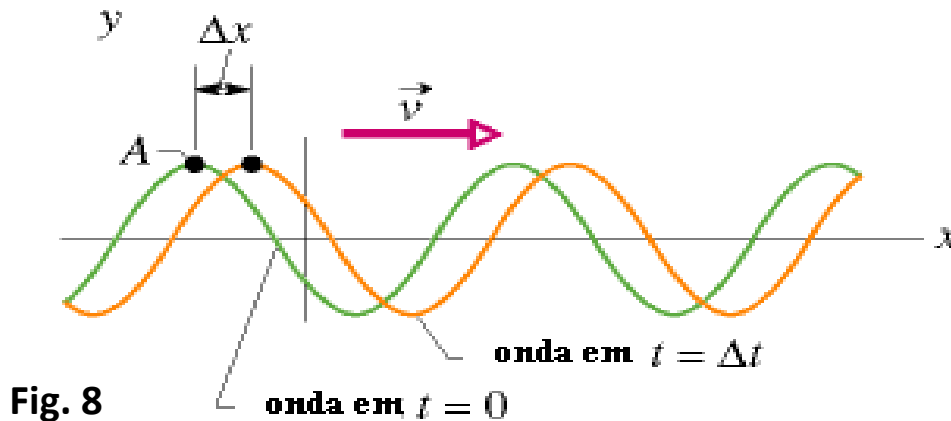
$$y(t) = y(t + T) \Rightarrow y(0, t) = -y_m \text{sen}(\omega t) = -y_m \text{sen}(\omega t + \omega T) \quad (7)$$

A equação (7) é verdadeira se $\omega T = 2\pi$, portanto

$$\underbrace{\omega = \frac{2\pi}{T}}_{\text{Frequência Angular}} \quad \underbrace{T = \frac{2\pi}{\omega}}_{\text{Período}} \quad \underbrace{f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}}_{\text{Frequência}} \quad (8)$$

A frequência f é o número de oscilações por unidade de tempo realizadas por um dado ponto da corda, a medida que a onda passa por ele.

A VELOCIDADE ESCALAR DE PROPAGAÇÃO DE UMA ONDA



Velocidade

$$v = \frac{dx}{dt}$$

Para calcular a velocidade com que uma onda se propaga devemos acompanhar um dado ponto dela, ou seja um ponto de fase constante:

$$\varphi(x, t) = kx - \omega t = \text{constante}$$

$$k \frac{dx}{dt} - \omega = 0 \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{k} \Rightarrow v = \frac{\omega}{k}$$

velocidade escalar da onda

Como, $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ e $\omega = \frac{2\pi}{T}$

(9)

$$v = \frac{2\pi}{T} \frac{\lambda}{2\pi} = \frac{\lambda}{T} \Rightarrow$$

$$v = \lambda f$$

velocidade escalar da onda

VELOCIDADE TRANSVERSAL DE UMA PARTÍCULA

Para se determinar a velocidade transversal de uma partícula da corda é necessário conhecer a variação de sua coordenada y em relação ao tempo. Para ondas harmônicas, temos:

$$y(x, t) = y_m \text{sen}(kx \mp \omega t) \quad (10)$$

Na equação acima, o sinal $(-)$ onda se propagando da esquerda para direita e $(+)$ onda se propagando da direita para esquerda.

Velocidade

$$u_y(x, t) = \frac{\partial y}{\partial t} = -\omega y_m \cos(kx - \omega t)$$

(11)

$$u_y(x, t) = -\omega y_m \cos(kx - \omega t)$$

Aceleração

$$a_y(x, t) = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial u_y}{\partial t} = -y_m \omega^2 \text{sen}(kx - \omega t)$$

(12)

$$a_y(x, t) = -\omega^2 y(x, t)$$

EQUAÇÃO DA ONDA

Usando: $y(x,t) = f(x') = f(x - vt)$

e

$$x' = x - vt \quad \begin{cases} \frac{\partial x'}{\partial t} = -v \\ \frac{\partial x'}{\partial x} = 1 \end{cases}$$

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} [f(x - vt)] = \frac{df}{dx'} \frac{\partial x'}{\partial t} = -v \frac{df}{dx'}$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial y}{\partial t} \right] = \frac{\partial}{\partial t} \left[-v \frac{df}{dx'} \right] = \frac{\partial}{\partial x'} \left[-v \frac{df}{dx'} \right] \frac{\partial x'}{\partial t} = v^2 \frac{d^2 f}{dx'^2}$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} [f(x - vt)] = \frac{df}{dx'} \frac{\partial x'}{\partial x} = \frac{df}{dx'}$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial y}{\partial x} \right] = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{df}{dx'} \right] = \frac{d^2 f}{dx'^2}$$

Portanto,

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad (13)$$

Equação de uma onda Unidimenconal

Velocidade de propagação da onda

VELOCIDADE DE PROPAGAÇÃO DA ONDA EM UMA CORDA TENSA

Exemplos de cordas tensas (violinos, violão, harpa, piano, ...)

Para calcular a velocidade de propagação da onda em uma corda tensa, vamos considerar um pequeno pulso se propagando da esquerda para a direita em uma corda de densidade linear de massa μ e que é esticada através de uma tração F_t aplicada nas suas extremidades.

Análise Dimensional:

De que forma podemos combinar F_t e μ para que o resultado tenha unidade de velocidade?

$$\left. \begin{array}{l} F_t : [M][L][T]^{-2} \\ \mu : [M][L]^{-1} \end{array} \right\} v \propto \sqrt{\frac{F_t}{\mu}} \quad \text{portanto} \quad v = c \sqrt{\frac{F_t}{\mu}} \quad (14)$$

onde c é uma constante. Qual o valor da constante c ?

VELOCIDADE DE PROPAGAÇÃO DA ONDA EM UMA CORDA TENSA

Análise Mecânica (dedução a partir da 2ª Lei de Newton):

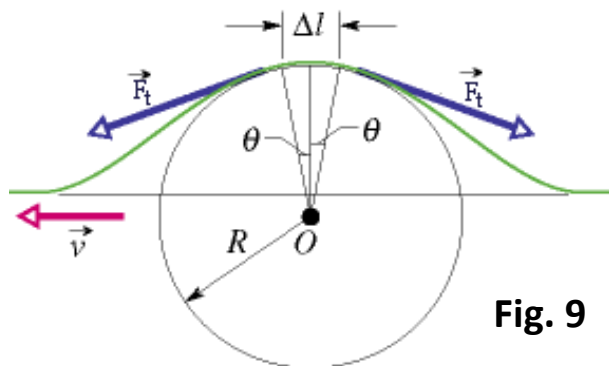


Fig. 9

As componentes x, y

$$\begin{aligned} F_t \cos \theta - F_t \cos \theta &= 0 \\ F_t \sin \theta + F_t \sin \theta &= F_R \end{aligned} \quad (15)$$

Para θ pequeno, podemos adotar $\sin \theta \approx \theta$. E, como no referencial que se move com velocidade v o pedaço da corda descreve um movimento circular, a força resultante na vertical é a força centrípeta que atua neste pedaço da corda. Logo,

$$2F_t \theta = m \frac{v^2}{R} \Rightarrow F_t \frac{\Delta l}{R} = m \frac{v^2}{R} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{F_t}{\mu}} \quad (16)$$

onde a densidade linear de massa μ é dada por: $\mu = \frac{m}{\Delta l}$

Comparando (16) com (14), concluímos que o valor da constante $c = 1$.

PRINCÍPIO DA SUPERPOSIÇÃO

O princípio da superposição afirma que a função de onda resultante devida a duas ou mais funções de onda individuais é a soma dessas funções.

Sejam $y_1(x,t)$ e $y_2(x,t)$ as funções de ondas individuais. A função de onda resultante é dada por:

$$y_R(x,t) = y_1(x,t) + y_2(x,t)$$

A figura ao lado mostra uma sequência cronológica de “fotografias” de dois pulsos que se propagam, em sentidos opostos, na mesma corda esticada. Quando os pulsos se sobrepõem, o deslocamento da corda é a soma algébrica dos deslocamentos individuais. Um pulso simplesmente se move através do outro, como se este não existisse.

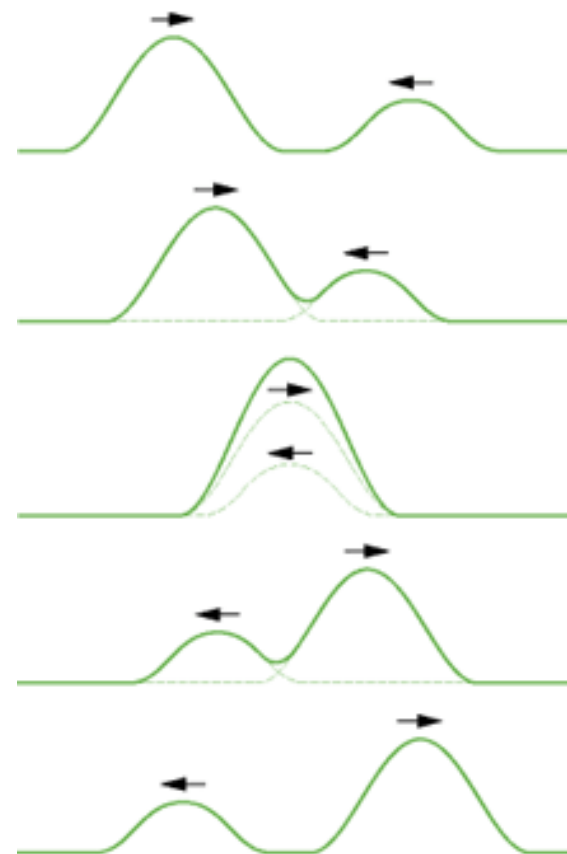


Fig. 10

INTERFERÊNCIA DE ONDAS

Quando duas ou mais ondas se combinam em um ponto particular, diz-se que elas interferem entre si, este fenômeno é chamado de **interferência**. Vamos analisar dois casos especiais de interferência (construtiva e destrutiva) de duas ondas harmônicas. Consideremos,

$$y_1(x, t) = y_m \text{sen}(kx - \omega t - \phi_1) \quad \text{e} \quad y_2(x, t) = y_m \text{sen}(kx - \omega t - \phi_2)$$

Usando o princípio da superposição, temos

$$\begin{aligned} y_R(x, t) &= y_1(x, t) + y_2(x, t) \\ &= y_m [\text{sen}(kx - \omega t - \phi_1) + \text{sen}(kx - \omega t - \phi_2)] \end{aligned} \quad (17)$$

Usando a identidade trigonométrica: $\text{sen}\alpha + \text{sen}\beta = 2\text{sen}\frac{1}{2}(\alpha + \beta)\cos\frac{1}{2}(\alpha - \beta)$

Chamando $\alpha = kx - \omega t - \phi_1$ e $\beta = kx - \omega t - \phi_2$ temos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(\alpha + \beta) &= kx - \omega t - \phi, \quad \text{onde} \quad \phi = \frac{(\phi_1 + \phi_2)}{2} \\ \frac{1}{2}(\alpha - \beta) &= \frac{\Delta\phi}{2}, \quad \text{onde} \quad \Delta\phi = (\phi_2 - \phi_1) \end{aligned}$$

$$y_R(x, t) = \underbrace{2y_m \cos(\Delta\phi/2)}_{\text{amplitude resultante}} \text{sen}(kx - \omega t - \phi)$$

INTERFERÊNCIA DE ONDAS

$$y_R(x, t) = \underbrace{2y_m}_{\text{amplitude resultante}} \cos(\Delta\phi/2) \sin(kx - \omega t - \phi) \quad (18)$$

Características da onda resultante

- 1) mesmo k (λ), mesma ω (T), mesma direção de propagação ($-x$);
- 2) Amplitude depende de $\Delta\phi$.

Se $\Delta\phi = 0 \Rightarrow \cos(\Delta\phi/2) = 1$

$y_{Rm} = 2y_m$ - **Inteferência Construtiva**

Se $\Delta\phi = \pi \Rightarrow \cos(\Delta\phi/2) = 0$

$y_{Rm} = 0$ - **Inteferência Destrutiva**

Para outros valores de $\Delta\phi$

entre $0 < \Delta\phi < \pi \Rightarrow 0 < y_{Rm} < 2y_m$

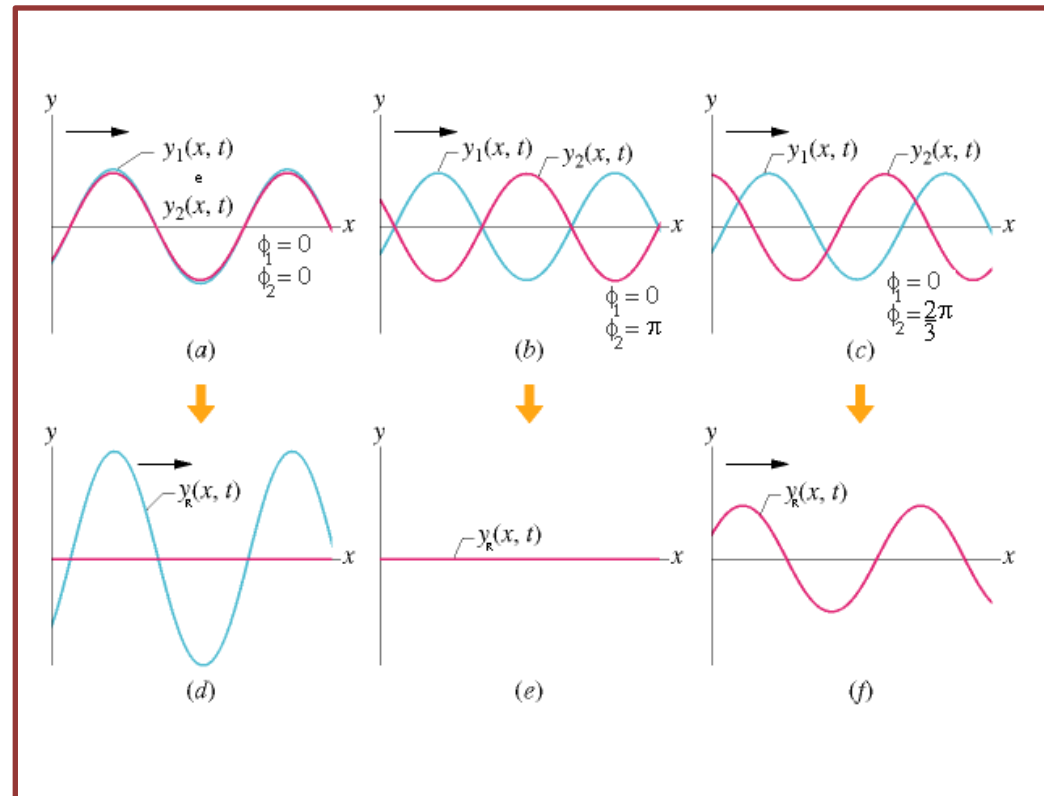


Fig. 11

ENERGIA, POTÊNCIA E INTENSIDADE NO MOVIMENTO ONDULATÓRIO

Quando consideramos a propagação de uma onda progressiva em uma corda o movimento oscilatório de um elemento de corda será no sentido perpendicular à sua propagação. Levando em conta que o deslocamento de um elemento de corda que se encontra na posição x no instante t é dado por:

$$y(x, t) = y_m \text{sen}(kx - \omega t) \quad (19)$$

esse elemento de corda se desloca transversalmente com uma velocidade dada por:

$$u_y(x, t) = \frac{\partial y(x, t)}{\partial t} = -\omega y_m \cos(kx - \omega t) \quad (20)$$

A **energia cinética** de um elemento de massa $dm = \mu dx$ com velocidade u_y é dada por:

$$dK = \frac{1}{2} dm u_y^2 = \frac{1}{2} (\mu dx) [-y_m \omega \cos(kx - \omega t)]^2 \quad (21)$$

A taxa com a qual a energia é transportada pela onda é:

$$\frac{dK}{dt} = \frac{1}{2} \mu v \omega^2 y_m^2 \cos^2(kx - \omega t) \quad (22)$$

ENERGIA, POTÊNCIA E INTENSIDADE NO MOVIMENTO ONDULATÓRIO (continuação)

Num dado instante a porção da corda à esquerda deste elemento de corda, exerce nele uma força transversal à direção de propagação dada por:

$$F_y = -F_t \sin \theta \quad (23)$$

Considerando que os ângulos envolvidos serão muito pequenos:

$$F_y = -F_t \tan \theta = -F_t \frac{\partial y}{\partial x} \quad (24)$$

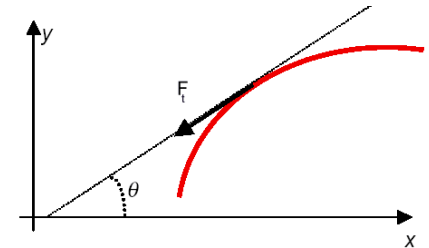


Fig. 12

Portanto, a **potência transmitida** a um elemento de corda específico por seu vizinho da esquerda é dada pelo produto da força exercida pela velocidade desse elemento:

$$P(x,t) = F_y(x,t)u_y(x,t) = -F_t \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right) = -F_t [ky_m \cos(kx - \omega t)] [-\omega y_m \cos(kx - \omega t)] \quad (25)$$
$$P(x,t) = \omega k F_t y_m^2 \cos^2(kx - \omega t)$$

Para uma análise global da propagação da onda na corda é interessante que saibamos qual o valor médio da potência comunicada por um elemento ao seu vizinho, e esse resultado é o fluxo de energia na corda por unidade de tempo.

ENERGIA, POTÊNCIA E INTENSIDADE NO MOVIMENTO ONDULATÓRIO (continuação)

Considerando que: $\overline{\cos^2 x} = \frac{1}{T} \int_0^T \cos^2 x dx = \frac{1}{2}$ (26)

$$P_{\text{média}} = \omega k F_t y_m^2 \overline{\cos^2 (kx - \omega t)} \quad (27)$$

Usando o resultado da média da função co-seno e lembrando que:

$$v = \sqrt{\frac{F_t}{\mu}} \Rightarrow F_t = \mu v^2 \text{ e } k = \frac{\omega}{v}, \quad \text{Obtemos: } P_{\text{média}} = \frac{1}{2} \mu \omega^2 y_m^2 v \quad (28)$$

Unidade no S.I: watts

A dependência da taxa média de transferência de energia com o quadrado da amplitude e com o quadrado da frequência é geralmente uma propriedade característica das ondas.

Intensidade $\equiv$ potência média por unidade de área transmitida através de um área A perpendicular à direção em que a onda se propaga, ou seja,

$$I = \frac{P_{\text{média}}}{A} \quad (29)$$

Unidade no S.I: watts/m²

ONDAS ESTACIONÁRIAS

Vamos considerar a superposição de duas ondas que se propagam através da corda, uma representando a **onda incidente** e a outra a **onda refletida**. Para analisar, matematicamente, as ondas estacionárias, representaremos as duas ondas por:

$$y_1(x,t) = y_m \text{sen}(kx - \omega t) \quad \text{e} \quad y_2(x,t) = y_m \text{sen}(kx + \omega t) \quad (30)$$

A onda resultante: $y_R(x,t) = y_m [\text{sen}(kx - \omega t) + \text{sen}(kx + \omega t)] \quad (31)$

Usando a identidade trigonométrica: $\text{sen}\alpha + \text{sen}\beta = 2\text{sen}\frac{1}{2}(\alpha + \beta)\cos\frac{1}{2}(\alpha - \beta)$

Chamando $\alpha = kx - \omega t$ e $\beta = kx + \omega t$ temos: $\frac{1}{2}(\alpha + \beta) = kx$, e $\frac{1}{2}(\alpha - \beta) = -\omega t$,

$$y_R(x,t) = \underset{\substack{\text{amplitude} \\ \text{resultante}}}{2y_m} \underset{4}{\text{sen}} \underset{2}{(kx)} \underset{4}{\cos} \underset{3}{\omega t} \quad (32)$$

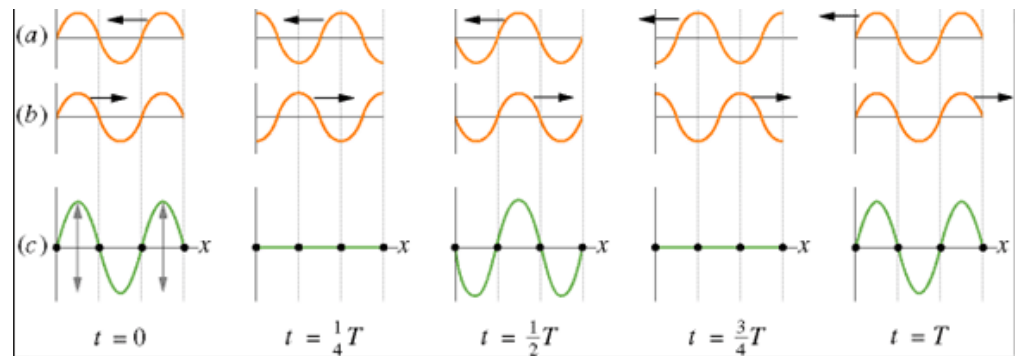


Fig. 13

ONDAS ESTACIONÁRIAS

$$y(x,t) = \underbrace{2y_m}_{\text{amplitude}} \sin kx \cos \omega t$$

A equação acima não descreve onda que se propaga, porque não é da forma $y(x,t) = h(kx \pm \omega t)$.

Numa onda senoidal que se propaga, a amplitude da onda é a mesma para todos os elementos da corda. **Isso não é verdadeiro para uma onda estacionária, onde a amplitude varia com a posição.**

A amplitude $y_{Rm} = 2y_m \sin(kx)$ é nula quando $\sin(kx) = 0$. Estes valores são

$$kx = n\pi \Rightarrow x = n \frac{\pi}{k} = n \frac{\lambda}{2} \quad n = 0, 1, 2, 3, L \quad (32)$$

Esses pontos são os nós e estão separados de uma distância igual à metade do comprimento de onda.

A amplitude, $2y_m \sin(kx)$, tem um valor máximo quando $\sin(kx) = 1$. Isto é,

$$kx = \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi \Rightarrow x = \left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{\lambda}{2} \quad n = 0, 1, 2, 3, L \quad (33)$$

Esses pontos são os antinós e a distância entre eles também é de meio comprimento de onda. A distância entre um nó e um antinó vizinho é um quarto do comprimento de onda.

Reflexões em Extremidades

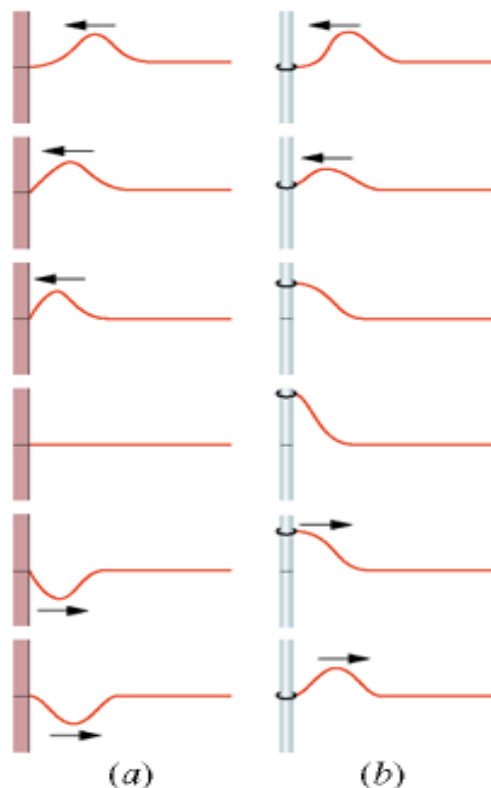
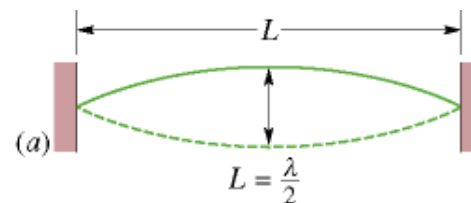


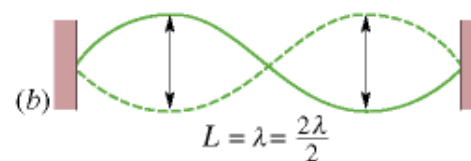
Fig. 14 – (a) Um pulso incidente da direita é refletido por uma parede rígida. Observe que o sinal do pulso refletido é invertido. (b) Nas extremidades flexíveis, sendo permitido à extremidade da corda deslizar sem atrito, para cima e para baixo, na haste. O pulso é refletido sem que ocorra mudança de sinal.

Ondas Estacionárias

As relações entre λ , f e o comprimento, L , da corda pode ser resumidas por:



$$L = \frac{n}{2} \lambda ;$$



$$f = \frac{v}{\lambda} = n \frac{v}{2L} ;$$

$$n = 1, 2, 3, \dots$$

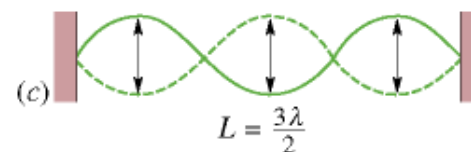


Fig. 15 -Uma corda fixa (violão, harpa,...), é levada a oscilar em padrões de ondas estacionárias. (a) Diz-se que o padrão mais simples, que é o modo fundamental ou **primeiro harmônico**, tem meio comprimento de onda. (b) o **segundo harmônico** tem um comprimento de onda. (c) o **terceiro harmônico** tem três meios comprimentos de onda, etc.

Ressonância

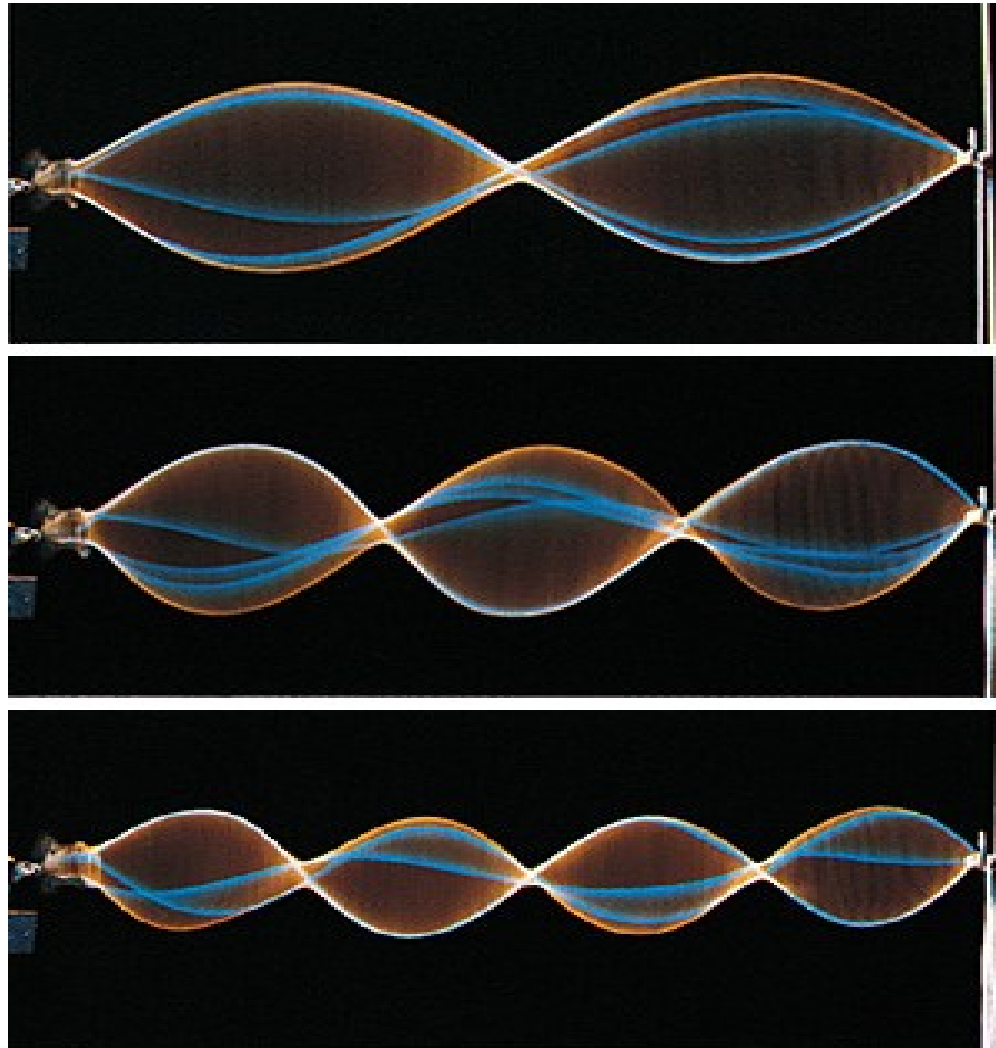


Fig. 16 – Fotografias estroboscópicas revelam padrões de ondas estacionárias (imperfeitas) em uma corda excitada por um oscilador na extremidade esquerda. Esses padrões ocorrem em certas frequências de oscilações.

REFERÊNCIAS

- HALLIDAY D, RESNICK R e WALKER J, Fundamentos de Física vol. 2, Ed. L.T.C.
- YOUNG H e FREEDMAN R, Física I vol 2, Ed. Pearson / A.W.
- Cursos UNICAMP - Física Geral - <http://univesptv.cmais.com.br/fisica>