

OSCILAÇÕES

OSCILAÇÕES

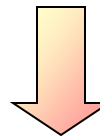
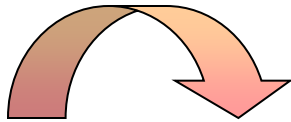
⌚ **Oscilações – movimentos que se repetem.**

Exemplos:

- ✓ O oscilar do pêndulo de um relógio;
- ✓ O movimento do sistema massa-mola;
- ✓ As batidas cardíacas;
- ✓ As vibrações dos átomos nas moléculas e nos sólidos;
- ✓ O movimento de um diapásão;
- ✓ Oscilações livres: **circuito LC**;
- ✓ Oscilações amortecidas: **circuito RLC**;
- ✓ ...

❖ O tipo mais simples de movimento oscilatório é o chamado Movimento Harmônico Simples (**MHS**)

O MHS pode ser demonstrado como segue:

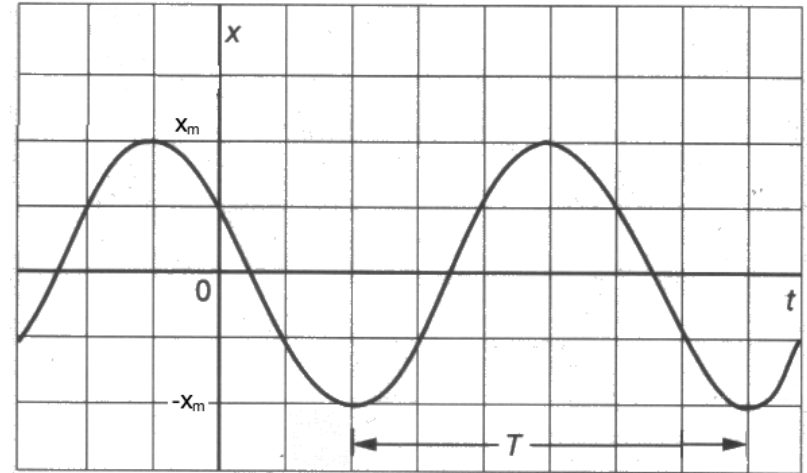


As oscilações do objeto (limão) são essencialmente senoidais.

Seja x a coordenada de um objeto em MHS, então

$$x(t) = x_m \cos(\omega t + \phi)$$

O objeto oscila entre x_m e $-x_m$.



- x_m é chamado amplitude de oscilação, porque caracteriza a extensão do movimento,
- ω representa a frequência angular, seu valor define a taxa das oscilações,
- ϕ constante de fase (fase inicial), depende da escolha do momento que tomamos a medida ($t = 0$),
- $(\omega t + \phi)$ – fase do movimento.

- ❖ Característica de qualquer movimento oscilatório (inclusive do **MHS**), é que o movimento se repete após um determinado intervalo de tempo, chamado **período T**.
- ❖ Para um ciclo completo, a fase aumenta de 2π rad enquanto o tempo aumenta de T,

$$\omega(t + T) + \phi = \omega t + \phi + 2\pi \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega}$$

- ❖ A grandeza usada para especificar a taxa das oscilações é a frequência,

$$f = \frac{1}{T}$$

$$\omega = 2\pi f$$

Velocidade e Aceleração - MHS

$$x(t) = x_m \cos(\omega t + \phi)$$

$$v_x = \frac{dx}{dt} = -\omega x_m \sin(\omega t + \phi)$$

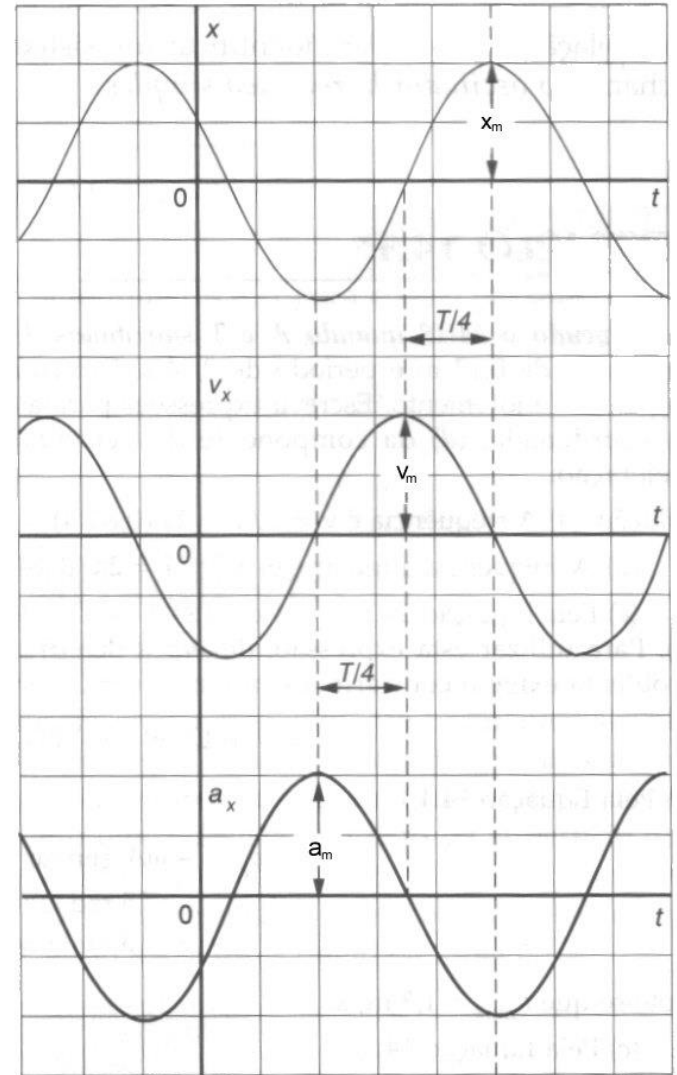
$$v_x(t) = -v_m \sin(\omega t + \phi)$$

$$a_x = \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x_m \cos(\omega t + \phi)$$

$$a_x(t) = -a_m \cos(\omega t + \phi)$$

Para um objeto em **MHS** há uma relação direta entre o deslocamento do objeto e sua aceleração,

$$a_x(t) = -\omega^2 x(t)$$

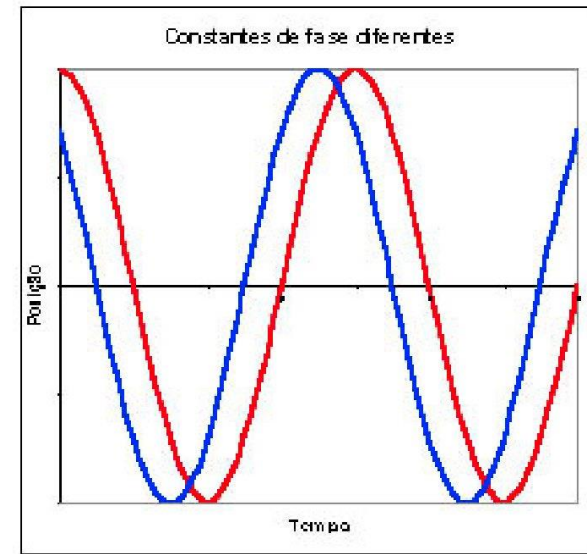
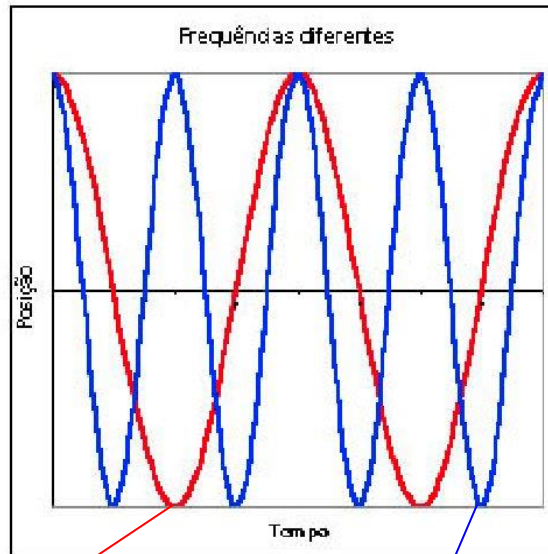
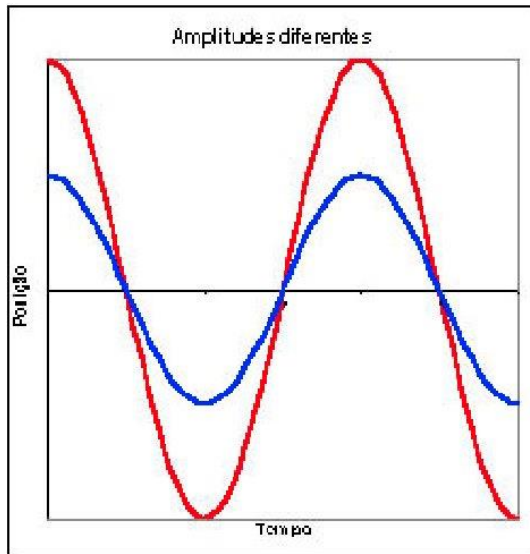


Um sistema em **MHS** é chamado Oscilador Harmônico Simples (**OHS**)

❖ Gráficos da posição em função do tempo

$$x(t) = x_m \cos(\omega t + \phi)$$

O gráfico da posição em função do tempo toma diversas formas quando modificamos a amplitude, frequência ou constante de fase.



função de maior período

função de menor período

Determinando ϕ e x_m usando as condições iniciais

$$x(t) = x_m \cos(\omega t + \phi)$$

Para $t = 0$; $x(t = 0) = x_0$; $v_x(t = 0) = v_{x0}$

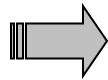
$$x_0 = x_m \cos \phi$$

$$v_{x0} = -\omega x_m \sin \phi$$

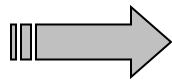


$$\frac{x_0^2}{x_m^2} = \cos^2 \phi$$

$$\frac{v_{x0}^2}{\omega^2 x_m^2} = \sin^2 \phi$$



$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{v_{x0}}{x_0} = -\omega \operatorname{tg} \phi \\ \phi = \operatorname{arctg} \left(-\frac{v_{x0}}{\omega x_0} \right) \end{array} \right.$$



$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{v_{x0}^2}{\omega^2 x_m^2} + \frac{x_0^2}{x_m^2} = 1 \\ x_m = \sqrt{x_0^2 + v_{x0}^2 / \omega^2} \end{array} \right.$$

Caso particular: $v_{x0} = 0 \Rightarrow x_m = |x_0|$

Dinâmica do MHS

Como oscilador harmônico simples típico, consideremos um bloco de massa m preso a uma mola de constante k .

Força restauradora linear:

$$\vec{F} = -kx\hat{i}$$

Segunda lei de Newton:

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x$$

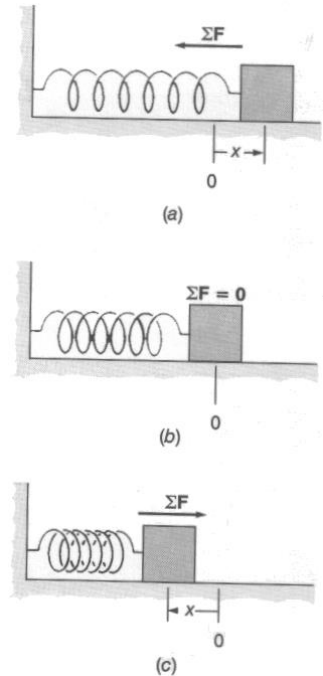
$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$$

Qual a solução ...

$$x(t) = x_m \cos(\omega t + \phi)$$

$$-\omega^2 x_m \cos(\omega t + \phi) + \frac{k}{m} x_m \cos(\omega t + \phi) = 0$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$



Equação diferencial
linear de 2ª ordem

Energia de um OHS

$$x(t) = x_m \cos(\omega t + \phi)$$

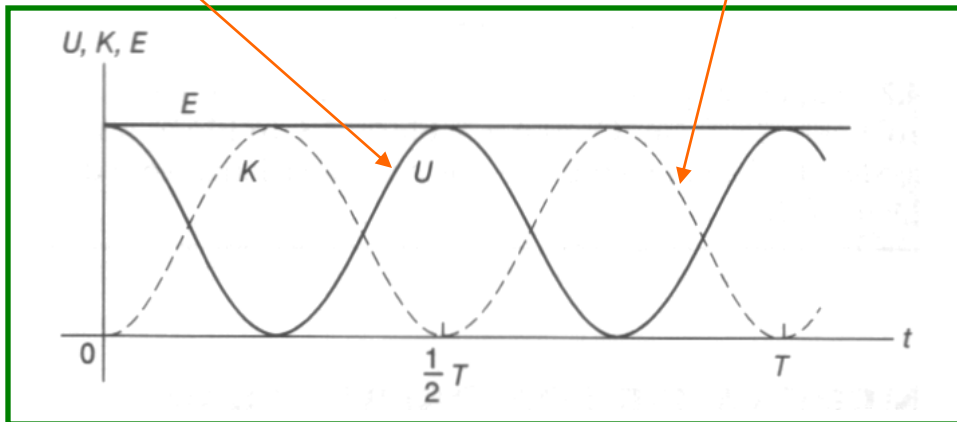
✓ Energia potencial: $U = \frac{1}{2} kx^2$

✓ Energia cinética: $K = \frac{1}{2} mv^2$

$$U(t) = \frac{1}{2} kx_m^2 \cos^2(\omega t + \phi)$$

$$K(t) = \frac{1}{2} m\omega^2 x_m^2 \sin^2(\omega t + \phi)$$

$$U_m = K_m = \frac{1}{2} kx_m^2$$



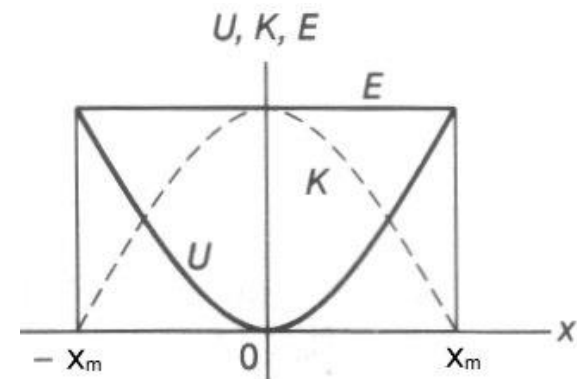
A energia mecânica do oscilador é:

$$E = K + U$$

$$E = \frac{1}{2} m\omega^2 x_m^2 = \frac{1}{2} kx_m^2$$

Energia cinética em função de x:

$$K = E - U = E - \frac{1}{2} kx^2 = \frac{1}{2} k(x_m^2 - x^2)$$



Exemplos de Movimento Harmônico Simples

❖ O pêndulo Simples

A componente da força peso, tangencial ao deslocamento é a força de restauração desse movimento, porque age no objeto de modo a trazê-lo de volta à sua posição central de equilíbrio.

A componente da força peso, perpendicular ao deslocamento é equilibrada pela tração exercida pelo fio, de modo que a resultante das forças tem a forma:

$$F = -mg\sin\theta = m \frac{d^2s}{dt^2}$$

onde s é deslocamento medido ao longo do arco que descreve a oscilação. O arco s é definido como

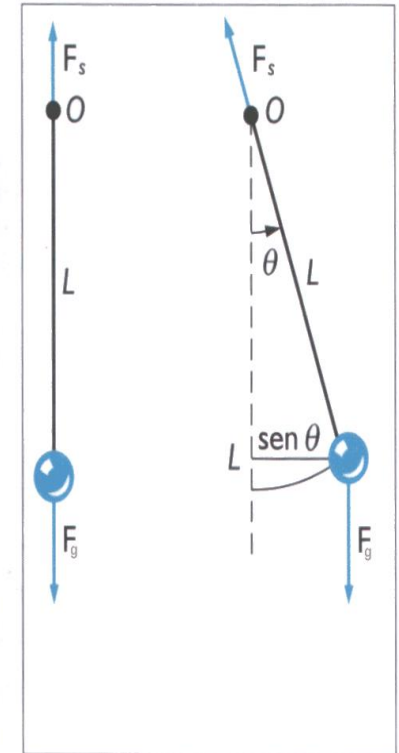
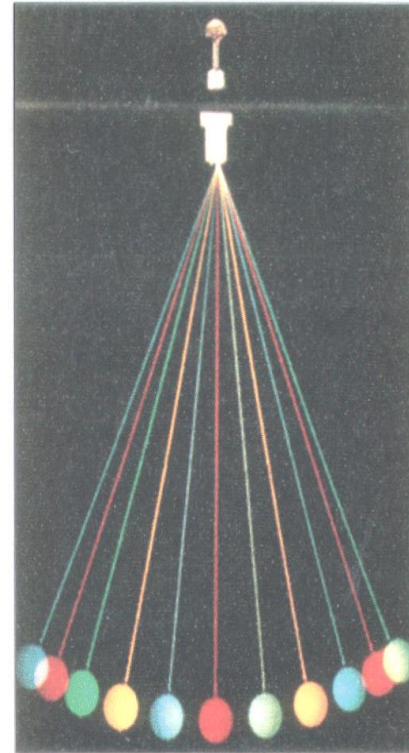
$$s = L\theta \Rightarrow \frac{d^2s}{dt^2} = L \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

Para pequenas oscilações, $\sin\theta \approx \theta$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \left(\frac{g}{L}\right)\theta = 0$$

solução →

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta(t) = \theta_m \cos(\omega t + \delta) \\ \omega = \sqrt{\frac{g}{L}} \Rightarrow T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}} \end{array} \right.$$



Exemplos de Movimento Harmônico Angular Simples

❖ O pêndulo de Torção

Se girarmos o disco da figura ao lado, a partir de sua posição de repouso (linha de referência), e depois soltarmos, o disco irá oscilar em torno da posição de repouso em movimento harmônico angular simples. Rodando o disco de um ângulo θ , em qualquer direção, fazendo aparecer um torque restaurador dado por

$$\tau = -\kappa\theta$$

onde κ é a constante de torção.

$$\tau = I\alpha \Rightarrow I \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\kappa\theta \Rightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{\kappa}{I}\theta$$

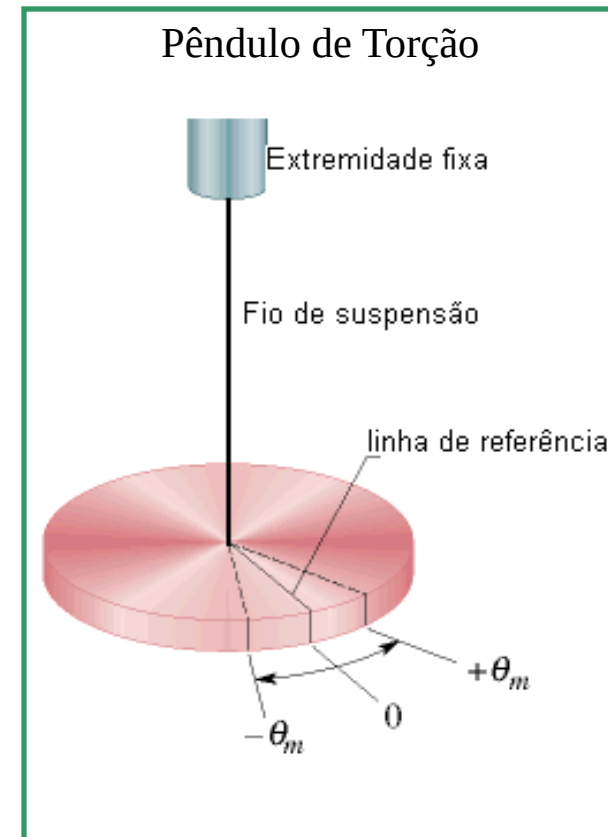
Equação de movimento:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{\kappa}{I}\theta = 0$$

solução

$$\theta(t) = \theta_m \cos(\omega t + \delta)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{\kappa}{I}} \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{\kappa}}$$



Exemplos de Movimento Harmônico Simples

❖ O pêndulo Físico

Vamos considerar um objeto de forma arbitrária, que pode oscilar em torno de um eixo que passa pelo ponto **O**. O eixo está a uma distância h do centro de massa, onde atua a força peso. Quando o pêndulo é deslocado de sua posição de equilíbrio de um ângulo θ , surge um torque restaurador.

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} \Rightarrow \tau = -mgh \sin \theta$$

Desprezando quaisquer torques de atrito, de modo que o único torque seja devido ao peso, temos

$$\tau = I\alpha = I \frac{d^2\theta}{dt^2} \Rightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} + \left(\frac{mgh}{I} \right) \sin \theta$$

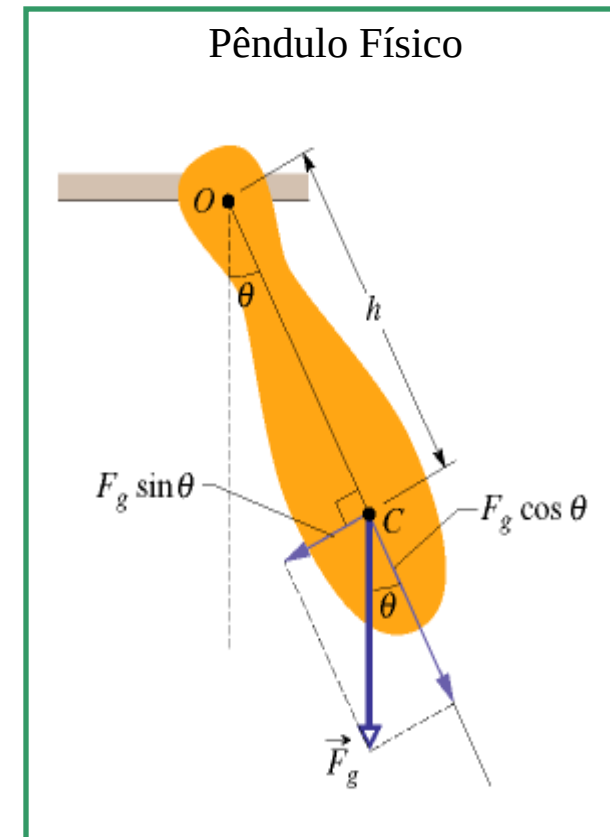
Para pequenas oscilações, $\sin \theta \approx \theta$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \left(\frac{mgh}{I} \right) \theta = 0$$

solução →

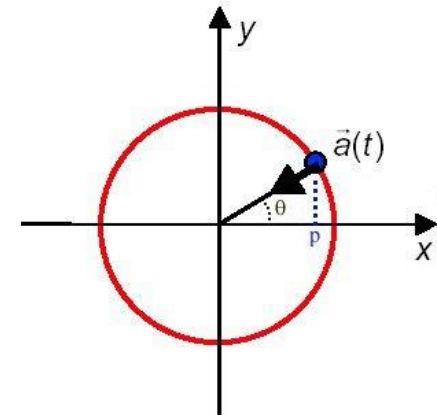
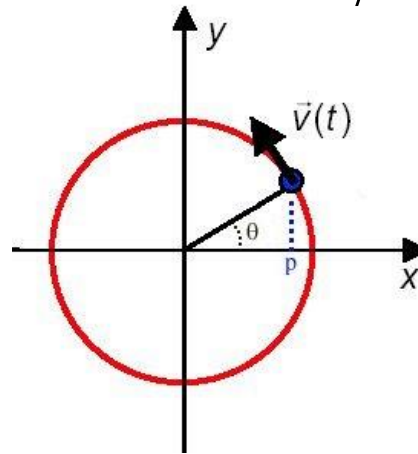
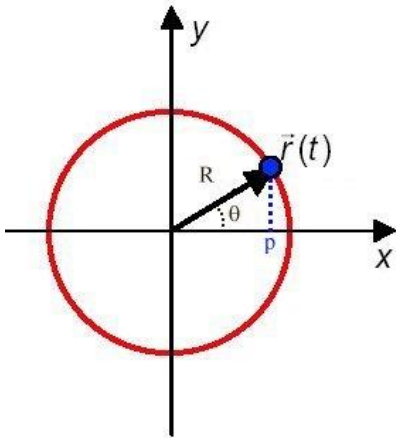
$$\theta(t) = \theta_m \cos(\omega t + \delta)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{mgh}{I}} \Rightarrow T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgh}}$$



Movimento Harmônico Simples e Movimento Circular Uniforme

Consideremos uma partícula (ponto azul) que se move com velocidade constante ao longo de um círculo de raio R . Como a partícula se move com velocidade constante, o ângulo θ varia uniformemente, e $d\theta/dt = \omega$. A velocidade angular $\omega = v/R$. Como ω é constante, $\theta = \omega t + \phi$, onde a constante de fase ϕ é o valor inicial de θ .



$$\begin{aligned}\vec{r}(t) &= \hat{i}x(t) + \hat{j}y(t) \\ x(t) &= R \cos(\omega t + \phi) \\ y(t) &= R \sin(\omega t + \phi)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{v}(t) &= \hat{i}v_x + \hat{j}v_y \\ v_x(t) &= -\omega R \sin(\omega t + \phi) \\ v_y(t) &= \omega R \cos(\omega t + \phi)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{a}(t) &= \hat{i}a_x(t) + \hat{j}a_y(t) \\ a_x(t) &= -\omega^2 R \cos(\omega t + \phi) \\ a_y(t) &= -\omega^2 R \sin(\omega t + \phi)\end{aligned}$$

Para uma partícula em movimento circular uniforme no plano xy , as componentes x e y do movimento descrevem, cada uma, um MHS.

Superposição de Movimentos Harmônicos Simples

❖ **Dois MHS:** Mesma direção e frequências diferentes

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) \quad \begin{cases} x_1(t) = x_{1m} \cos(\omega_1 t + \phi_1) \\ x_2(t) = x_{2m} \cos(\omega_2 t + \phi_2) \end{cases} \quad \text{se} \quad \begin{cases} x_{1m} = x_{2m} = x_m \\ \phi_1 = \phi_2 = 0 \end{cases} \quad x(t) = x_m [\cos(\omega_1 t) + \cos(\omega_2 t)]$$

Introduzindo frequência angular média e diferença de frequência:

$$\bar{\omega} = \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2) = 2\pi f$$

$$\Delta\omega = \omega_1 - \omega_2 = 2\pi\Delta f$$

Reescrevendo ω_1 e ω_2 :

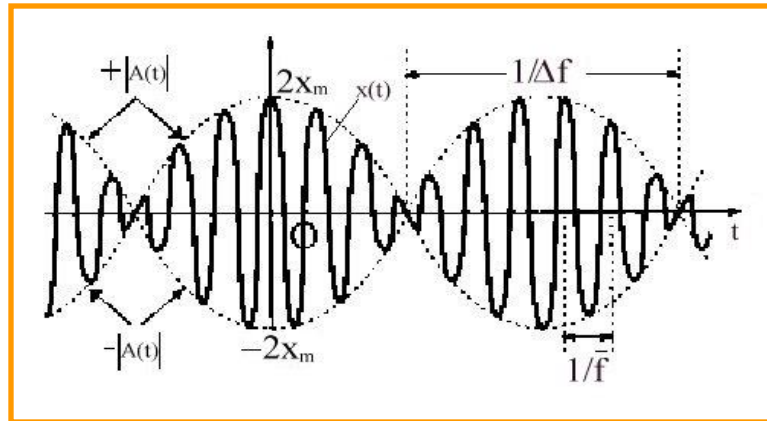
$$\omega_1 = \bar{\omega} + \frac{1}{2}\Delta\omega \quad \text{e} \quad \omega_2 = \bar{\omega} - \frac{1}{2}\Delta\omega$$

$$x(t) = 2x_m \cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t\right) \cos(\bar{\omega}t)$$

Um caso especial é aquele em que $\omega_1 \approx \omega_2$ com $\omega_1 > \omega_2 \implies \Delta\omega \ll \bar{\omega}$

$$x(t) = A(t) \cos(\bar{\omega}t)$$

$$A(t) = 2x_m \cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t\right)$$



Podemos considerar $x(t)$ com uma oscilação de frequência ω cuja “amplitude” $A(t)$ é lentamente variável com o tempo.

Movimento Harmônico Simples Amortecido

Quando o movimento de um oscilador é reduzido por uma força externa, o oscilador e seu movimento são ditos **amortecidos**. Um exemplo idealizado de um oscilador amortecido é mostrado na figura abaixo (lado).

Força de amortecimento

$$F_a = -bv$$

A força total sobre o bloco é dada por:

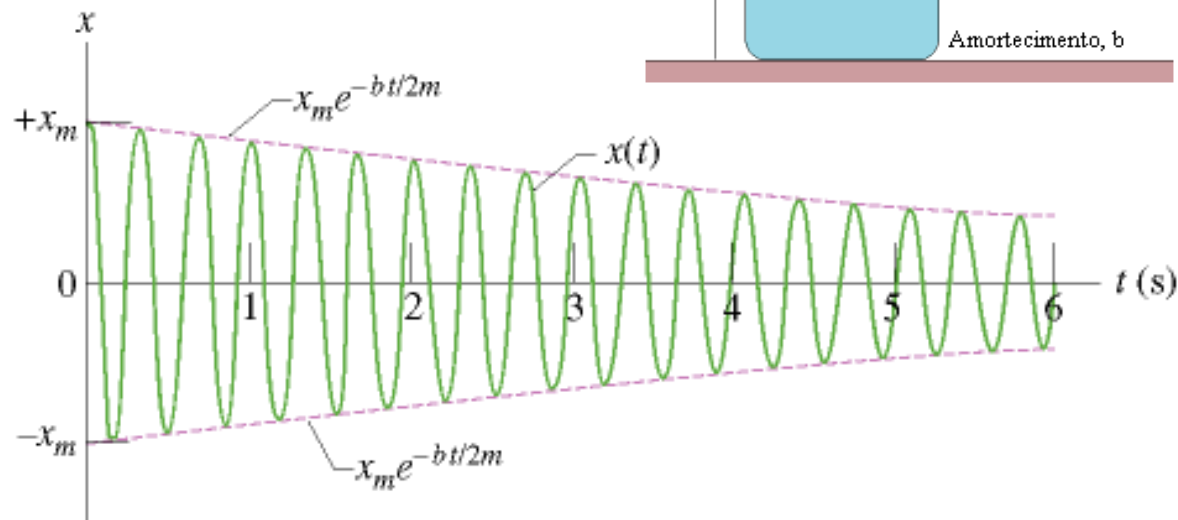
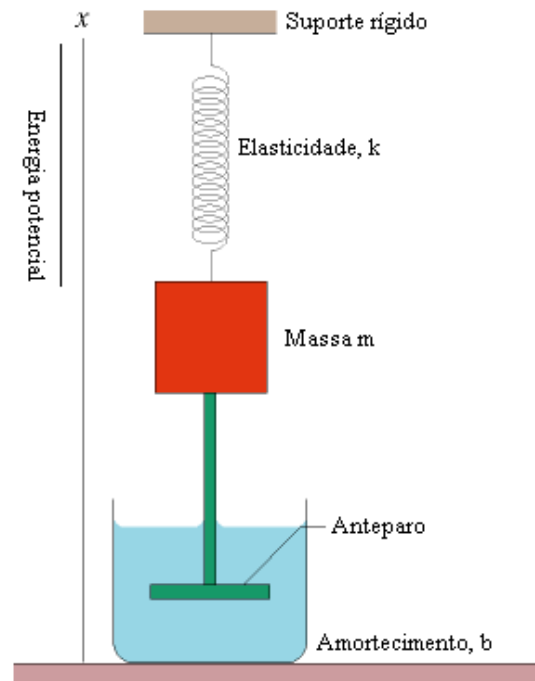
$$\sum F = ma = -kx - bv \Rightarrow \frac{dx^2}{dt^2} + \gamma \frac{dx}{dt} + \omega^2 x = 0$$

Solução:

$$x(t) = x_m e^{-bt/2m} \cos(\omega_a t + \phi)$$

onde ω_a , a frequência angular do oscilador amortecido, é dada por

$$\omega_a = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}}$$



Oscilações Forçadas e Ressonância

Pintura de Nicholas Lancret



Um sistema forçado sempre oscila com a frequência da força externa.

$$x(t) = x_m \cos(\omega t + \phi)$$

X_m é amplitude de oscilação.
Esta amplitude depende de ω e ω_0

Duas frequências: (a) a frequência natural do balanço, ω_0 (b) a frequência ω da força externa (homem puxando o balanço). Se as duas frequências se igualam, teremos o efeito de ressonância.

Oscilações Forçadas e Ressonância

Todos os corpos após sofrerem apenas um estímulo de uma fonte externa oscilam livremente com uma frequência angular própria chamada de frequência natural de oscilação ω_0 . Esta frequência depende das características do corpo, como por exemplo, a massa, a rigidez, o comprimento, a espessura e o material do qual é constituído.

As oscilações forçadas são aquelas em que uma força externa atua constantemente sobre o sistema oscilante. Considerando que uma fonte de excitação atue periodicamente com uma frequência ω sobre um corpo, teremos duas frequências angulares associadas a este sistema: a frequência natural de oscilação ω_0 e, a frequência angular externa ω .

Em geral, a frequência das oscilações forçadas é diferente da frequência própria (ou natural) do oscilador, isto é, a frequência definida por suas características próprias, como a massa e a constante elástica do oscilador massa-mola. Um caso particularmente importante ocorre quando a frequência das oscilações forçadas coincide com a frequência natural do sistema oscilante, este fenômeno é chamado de **ressonância**.

Na **ressonância**, a amplitude das oscilações tende a aumentar indefinidamente, podendo causar até o colapso do sistema oscilante. A **ressonância** possibilita a máxima transferência de energia entre a fonte excitadora, que produz as oscilações forçadas, e o sistema oscilante.

Oscilações Forçadas e Ressonância

$$x(t) = x_m \cos(\omega t + \phi)$$

Figura: A amplitude de deslocamento x_m do oscilador forçado varia conforme a frequência angular ω da força externa. As três curvas são aproximadamente simétricas em $\omega/\omega_0 = 1$, a condição de ressonância, na qual a amplitude é aproximadamente máxima. As curvas correspondem a três valores da constante de amortecimento b , o menor valor dando a maior amplitude.

