

Notas de Aula de Física II



Prof. Romero Tavares
Departamento de Física – UFPB

Declaração

O presente documento foi impresso a partir da página internet do **Professor Romero Tavares**, membro do Departamento de Física da UFPB. Este material é fornecido aos estudantes como bibliografia de apoio, sem qualquer finalidade comercial. Agradeço ao Professor Romero pela dedicação na elaboração dessa excelente apostila, e recomendo os leitores a visitarem sua página: <http://www.fisica.ufpb.br/~romero/>

Notas de Aula de Física

13. EQUILÍBRIO	2
CONDIÇÕES PARA O EQUILÍBRIO	2
SOLUÇÃO DE ALGUNS PROBLEMAS	3
10.....	3
15.....	3
19.....	4
25.....	5
27.....	6
34.....	7
35.....	8
39.....	8

13. Equilíbrio

Condições para o equilíbrio

Diz-se que um corpo está em equilíbrio quando o seu momento linear e o seu momento angular são constantes, ou seja:

$$\begin{cases} \vec{P} = \text{constante} \\ \vec{L} = \text{constante} \end{cases}$$

Quando as constantes mencionadas acima são nulas, diz-se que o corpo está em **equilíbrio estático**. Nessa situação ele não está em movimento de translação e também não está em movimento de rotação.

As condições expostas nas equações anteriores implicam que:

$$\begin{cases} \frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}^{EXT} = 0 \\ \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau}^{EXT} = 0 \end{cases}$$

ou seja, para que um corpo esteja em equilíbrio estático devemos ter as seguintes condições satisfeitas:

$$\begin{cases} \vec{F}^{EXT} = 0 \\ \vec{\tau}^{EXT} = 0 \end{cases}$$

Solução de alguns problemas

Capítulo 13 - Halliday, Resnick e Walker - 4ª. edição

- 10 Uma esfera uniforme de peso P e raio r é mantida no lugar por uma corda presa a uma parede, sem atrito, situada a uma distância L acima do centro da esfera, conforme a figura a seguir.

a) Encontre a tensão na corda.

Como a esfera está em repouso, temos que:

$$\vec{T} + \vec{P} + \vec{N} = 0$$

ou seja:

$$\begin{cases} T \cos \theta - P = 0 \\ T \sin \theta - N = 0 \end{cases}$$

Logo

$$T \cos \theta = P \Rightarrow T = \frac{P}{\cos \theta} \quad \therefore T = \left(\frac{\sqrt{L^2 + r^2}}{L} \right) P$$

onde

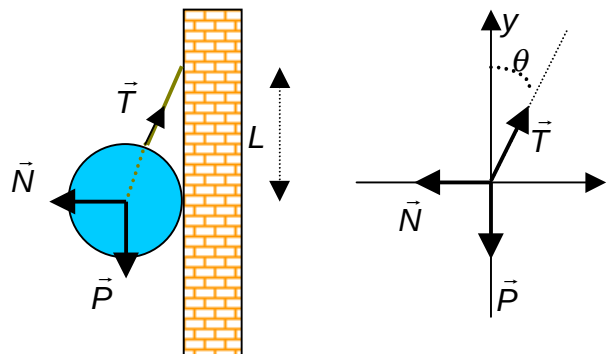
$$\cos \theta = \frac{L}{\sqrt{L^2 + r^2}}$$

b) Encontre a força exercida pela parede sobre a esfera.

$$\frac{N}{P} = \frac{T \sin \theta}{T \cos \theta} \Rightarrow N = P \tan \theta \quad \therefore N = \left(\frac{r}{L} \right) P$$

onde

$$\tan \theta = \frac{r}{L}$$

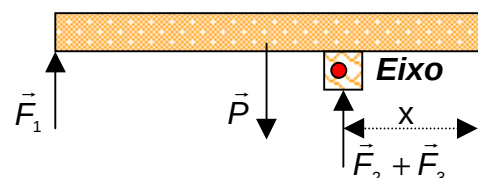


Capítulo 13 - Halliday, Resnick e Walker - 4ª. edição

- 15 Uma viga é transportada por três homens, estando um homem em uma das extremidades e os outros dois sustentando a viga por meio de uma trave transversal, colocada de modo que a carga esteja igualmente dividida entre os três homens. Em que posição está colocada a trave transversal? (Despreze a massa dessa trave.)

Por exigência do enunciado, temos que:

$$F_1 = F_2 = F_3 = F$$



Como o corpo está em repouso a resultante de forças é nula, logo:

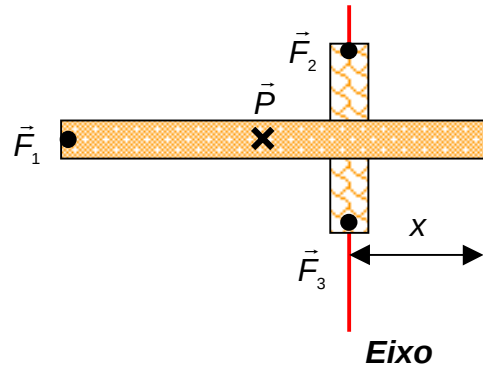
$$F_1 + F_2 + F_3 - P = 0$$

O torque resultante também é nulo. Vamos considerar o torque em relação a uma eixo que passa ao longo da trave transversal. Desse modo:

$$F_1(L - x) - P\left(\frac{L}{2} - x\right) = 0$$

Da primeira equação encontramos que $P = 3F$, e usando esse resultado na segunda equação:

$$F(L - x) - 3F\left(\frac{L}{2} - x\right) = 0 \Rightarrow \left(L - \frac{3L}{2}\right) + (3x - x) = 0 \therefore x = \frac{L}{4}$$



Capítulo 13 - Halliday, Resnick e Walker - 4ª. edição

19 Duas esferas idênticas, uniformes e sem atrito, cada uma de peso P , estão em repouso conforme mostra a figura à seguir.

a) Encontre, em termos de P , as forças que atuam sobre as esferas devido às superfícies do recipiente.

$$\begin{aligned} \theta &= 45^\circ \\ F_{12} &= F_{21} = F \\ P_1 &= P_2 = P \end{aligned}$$

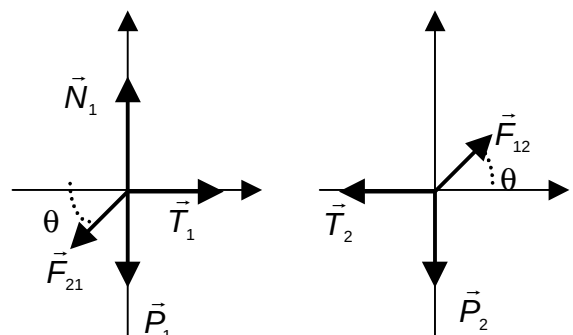
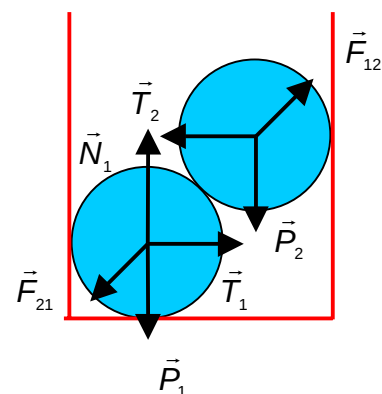
Os dois corpos estão em repouso, logo a resultante das forças que atuam em cada um deles é nula.

$$\begin{cases} N_1 - P - F \sin \theta = 0 \\ T_1 - F \cos \theta = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} F \sin \theta - P = 0 \\ F \cos \theta - T_2 = 0 \end{cases}$$

Das equações acima encontramos que:

$$T_1 = T_2 = F \cos \theta$$



e

$$N_1 - P - P = 0 \Rightarrow N_1 = 2P$$

$$F = \frac{P}{\sin \theta} = P\sqrt{2}$$

$$T = F \cos \theta = P \cot \theta \Rightarrow T = P$$

- b) Encontre, em termos de P , as forças que atuam sobre as esferas devido uma à outra, se a linha que une os centros das esferas faz um ângulo de 45° com a horizontal.

$$F = \frac{P}{\sin \theta} = P\sqrt{2}$$

Capítulo 13 - Halliday, Resnick e Walker - 4ª. edição

- 25 Uma placa quadrada uniforme, pesando $50,0\text{kg}$ e tendo $2,0\text{m}$ de lado, está pendurada em uma haste de $3,0\text{m}$ de comprimento e massa desprezível. Um cabo está preso à extremidade da haste e a um ponto na parede situado $4,0\text{m}$ acima do ponto onde a haste é fixada na parede, conforme mostra a figura a seguir.

- a) Qual é a tensão no cabo?

$$M = 50\text{kg} \quad L_2 = 2,0\text{m}$$

$$L_1 = 4,0\text{m} \quad L_3 = 3,0\text{m}$$

Vamos considerar apenas as forças que atuam na haste horizontal.

Como a placa é uniforme as forças P_1 e P_2 são tais que:

$$P_1 = P_2 = P/2 = M g / 2$$

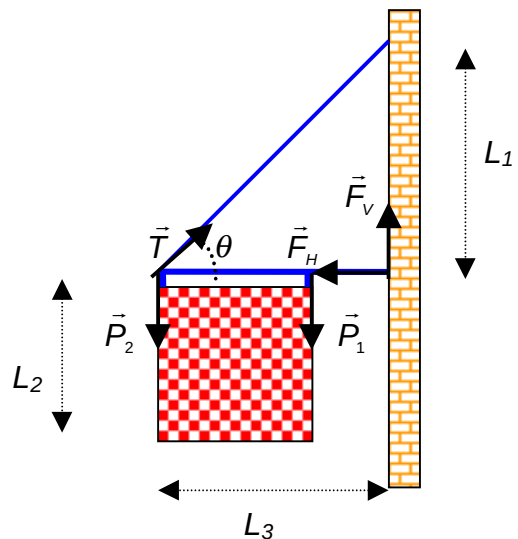
Vamos considerar o torque das forças que atuam na haste, em relação a um eixo perpendicular ao papel e que passe no ponto onde a haste está presa na parede.

$$T \sin \theta L_3 - P_2 L_3 - P_1 (L_3 - L_2) = 0$$

$$T \sin \theta L_3 = \frac{P}{2} [L_3 + (L_3 - L_2)] \Rightarrow T = \left(\frac{2L_3 - L_2}{2L_3 \sin \theta} \right) P$$

Mas

$$\sin \theta = \frac{L_1}{\sqrt{L_1^2 + L_3^2}} \Rightarrow T = \left[\frac{(2L_3 - L_2) \sqrt{L_1^2 + L_3^2}}{2L_1 L_3} \right] P = 408,34\text{N}$$



- b) Qual é a componente vertical da força exercida pela parede sobre a haste?

Vamos considerar o torque das forças que atuam na haste, em relação a um eixo perpendicular ao papel e que passe no ponto onde o cabo suspende a haste.

$$P_1 L_2 - F_V L_3 = 0$$

$$F_V = \frac{P_1 L_2}{L_3} = \frac{P L_2}{2 L_3} = 163,34 N$$

- c) Qual é a componente horizontal da força exercida pela parede sobre a haste?

Como a placa está em repouso, a resultante das forças que atuam nela é zero, Segundo um eixo horizontal, as forças que atuam são tais que:

$$T \cos \theta - F_H = 0 \Rightarrow F_H = T \cos \theta = T \left(\frac{L_3}{\sqrt{L_1^2 + L_3^2}} \right)$$

Usando o resultado para T deduzido anteriormente, temos que:

$$F_H = \left(\frac{2L_3 - L_2}{2L_1} \right) P = 245 N$$

Capítulo 13 - Halliday, Resnick e Walker - 4ª. edição

- 27 Na figura a seguir, qual a magnitude da força $\vec{F}$, aplicada horizontalmente no eixo da roda, necessária para fazer a roda ultrapassar um obstáculo de altura h ? Considere r como sendo o raio da roda e P o seu peso.

Na iminência da ultrapassagem do obstáculo, a roda perdeu o contato com o solo, e as forças que atuam nela estão mostradas na figura ao lado. Como ainda não existe movimento, a resultante é nula. Logo:

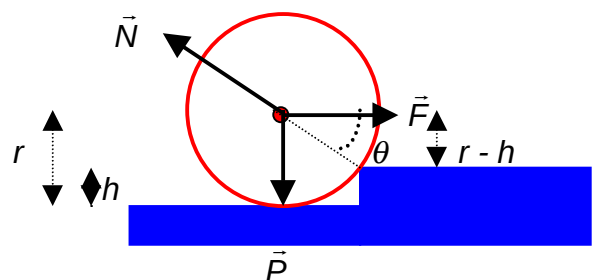
$$F - N \cos \theta = 0$$

$$P - N \sin \theta = 0$$

$$\frac{P}{F} = \frac{N \sin \theta}{N \cos \theta} = \tan \theta \Rightarrow F = \frac{P}{\tan \theta}$$

Mas

$$\tan \theta = \frac{r - h}{\sqrt{r^2 - (r - h)^2}} = \frac{r - h}{\sqrt{2rh - h^2}} \Rightarrow F = \left[\frac{\sqrt{2rh - h^2}}{r - h} \right] P$$



- 34 Uma barra não uniforme de peso P está suspensa em repouso, na horizontal, por duas cordas sem massa, como mostra a figura a seguir. Uma corda faz um ângulo $\theta = 36,9^\circ$ com a vertical e a outra faz um ângulo $\varphi = 53,1^\circ$, também com a vertical. Se o comprimento L da barra é $6,1m$, calcule a distância x entre a extremidade esquerda da barra e o seu centro de gravidade.

$$\begin{aligned}\theta &= 36,9^\circ \\ \varphi &= 53,1^\circ \\ L &= 6,1m\end{aligned}$$

Vamos calcular o torque das forças que atuam na barra em relação a um eixo perpendicular ao papel, e que passe por um ponto da extremidade esquerda da barra.

$$\tau = P x - T_2 \cos \varphi L = 0$$

ou seja:

$$x = \left(\frac{T_2 \cos \varphi}{P} \right) L$$

Por outro lado, como a barra está em repouso a resultante das forças que nela atuam é nula:

$$\vec{T}_1 + \vec{T}_2 + \vec{P} = 0 \Rightarrow \begin{cases} T_1 \cos \theta + T_2 \cos \varphi - P = 0 \\ T_1 \sin \theta - T_2 \sin \varphi = 0 \end{cases}$$

Da última equação temos que:

$$T_1 = T_2 \left(\frac{\sin \varphi}{\sin \theta} \right)$$

e usando esse resultado na penúltima equação, encontramos:

$$\left[T_2 \left(\frac{\sin \varphi}{\sin \theta} \right) \right] \cos \theta + T_2 \cos \varphi = P$$

ou seja:

$$T_2 \{ \sin \varphi \cos \theta + \cos \varphi \sin \theta \} = P \sin \theta$$

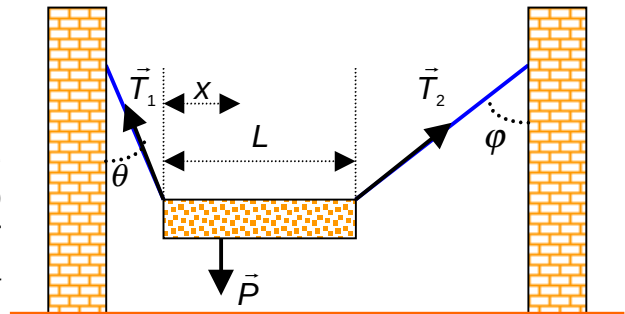
$$T_2 \sin(\varphi + \theta) = P \sin \theta \Rightarrow T_2 = \left[\frac{\sin \theta}{\sin(\varphi + \theta)} \right] P$$

Mas

$$x = \left(\frac{T_2 \cos \varphi}{P} \right) L \Rightarrow x = \left(\frac{L \cos \varphi}{P} \right) \left[\frac{\sin \theta}{\sin(\varphi + \theta)} \right] P$$

logo

$$x = \left[\frac{\cos \varphi \sin \theta}{\sin(\varphi + \theta)} \right] L = 2,23m$$



Capítulo 13 - Halliday, Resnick e Walker - 4ª. edição

- 35 Na figura a seguir, uma barra horizontal fina **AB**, de massa desprezível e comprimento L , é presa a uma dobradiça em uma parede vertical no ponto **A** e sustentada em **B**, por um fio fino **BC**, que faz um ângulo θ com a horizontal. Um peso P pode ser movido para qualquer posição ao longo da barra, sendo a sua posição definida pela distância x desde a parede até o seu centro de massa.

a) Encontre a tensão no fio.

Iremos considerar apenas as forças que atuam na barra.

Vamos calcular o torque em relação a um eixo perpendicular à folha de papel e que passe pelo ponto onde a barra está presa à parede pela dobradiça (ponto **A**)

Como a barra está em repouso o torque em relação a qualquer eixo é nulo, logo:

$$T \sin \theta L - P x = 0$$

$$T = \left(\frac{x}{L \sin \theta} \right) P$$

b) Encontre a componente horizontal da força exercida sobre a barra pelo pino da dobradiça em **A**.

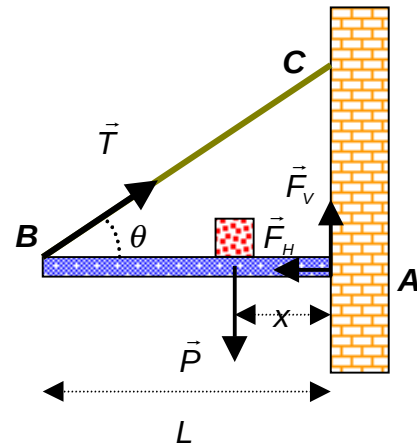
Como a barra está em repouso a resultante das forças que nela atuam é nula. A componente horizontal da resultante é:

$$T \cos \theta - F_H = 0 \Rightarrow F_H = T \cos \theta \therefore F_H = \left(\frac{x}{L \tan \theta} \right) P$$

c) Encontre a componente vertical da força exercida sobre a barra pelo pino da dobradiça em **A**.

Vamos considerar, agora, o torque das forças em relação a um eixo perpendicular à folha de papel e que passe pelo ponto onde o fio está preso na barra (ponto **B**).

$$P(L - x) - F_V L = 0 \Rightarrow F_V = \left(\frac{L - x}{x} \right) P \therefore F_V = \left(1 - \frac{x}{L} \right) P$$



Capítulo 13 - Halliday, Resnick e Walker - 4ª. edição

- 39 Uma tábua uniforme de comprimento $L = 6,1m$ e peso $P = 444,8N$ está em repouso no chão, encostada numa quina sem atrito, situada no alto de uma parede de altura $h = 3,0m$ conforme a figura a seguir. A tábua permanece em equilíbrio para qualquer valor do ângulo $\theta \geq 70^\circ$, mas escorrega para $\theta < 70^\circ$. Encontre o coeficiente de atrito entre a tábua e o chão.

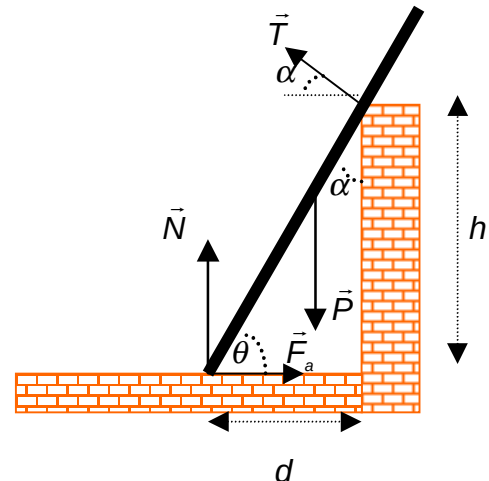
θ é o ângulo limite para o deslizamento, e isso significa que para esse ângulo a força de atrito estático é máxima, logo

$$F_a = \mu_E N$$

Pode-se perceber que os ângulos α e θ são complementares, logo:

$$\alpha = \pi/2 - \theta$$

A força da quina na tábua é perpendicular à tábua pois não existe atrito entre as duas.



Como o corpo está em equilíbrio, a resultante de forças é nula e o torque resultante também é nulo.

O torque em relação a um eixo que passe pelo ponto de apoio da escada no chão e que seja perpendicular à folha de papel tem a forma:

$$-(T \cos \alpha) h - (P \sin \alpha) L/2 = 0$$

$$T = \frac{PL \sin \alpha}{2h \cos \alpha}$$

A resultante de forças tem a forma:

$$\vec{T} + \vec{P} + \vec{N} + \vec{F}_{aE} = 0 \quad \therefore \quad \begin{cases} T \sin \alpha - P + N = 0 \\ -T \cos \alpha + F_{aE} = 0 \end{cases}$$

ou seja:

$$\frac{F_{aE}}{N} = \frac{T \cos \alpha}{P - T \sin \alpha} = \frac{\mu_E N}{N} \quad \therefore \quad \mu_E = \frac{T \cos \alpha}{P - T \sin \alpha}$$

e usando o resultado anterior para T , encontramos:

$$\mu_E = \frac{\left(\frac{PL \sin \alpha}{2h \cos \alpha} \right) \cos \alpha}{P - \left(\frac{PL \sin \alpha}{2h \cos \alpha} \right) \sin \alpha} \quad \therefore \quad \mu_E = \frac{\frac{L}{2h} \sin \alpha}{1 - \frac{L}{2h} \frac{\sin^2 \alpha}{\cos \alpha}} = 0,3981$$

Notas de Aula de Física

14. GRAVITAÇÃO	2
O UNIVERSO E A FORÇA GRAVITACIONAL	2
GRAVITAÇÃO E O PRINCÍPIO DA SUPERPOSIÇÃO	3
GRAVITAÇÃO PRÓXIMO À SUPERFÍCIE DA TERRA.....	4
FORÇA ENTRE UMA HASTE E UMA MASSA PONTUAL – CASO 1	5
FORÇA ENTRE UMA HASTE E UMA MASSA PONTUAL – CASO 2	6
CAMPO PRODUZIDO POR UMA DISTRIBUIÇÃO ESFÉRICA DE MASSA EM SEU EXTERIOR	8
CAMPO PRODUZIDO POR UMA DISTRIBUIÇÃO ESFÉRICA DE MASSA EM SEU INTERIOR	11
CÁLCULO ALTERNATIVO - PARTÍCULA NO INTERIOR.....	13
ENERGIA POTENCIAL GRAVITACIONAL	15
<i>Energia potencial gravitacional próximo à superfície da Terra.....</i>	<i>15</i>
<i>Energia potencial gravitacional distante da superfície da Terra.....</i>	<i>16</i>
LEIS DE KEPLER	17
ÓRBITAS DE SATÉLITES E ENERGIA	19
SOLUÇÃO DE ALGUNS PROBLEMAS	21
07	21
09.....	21
10.....	22
13.....	23
14.....	24
17.....	27
22.....	28
31.....	29
33.....	30
52.....	31
54.....	34

14. Gravitação

A gravidade é a mais fraca das forças fundamentais do Universo. É desprezível nas interações de partículas elementares e não tem qualquer papel nas propriedades das moléculas, dos átomos ou dos núcleos atômicos. A atração gravitacional entre corpos de dimensões comuns, por exemplo entre um automóvel e um edifício, é muito pequena para ser percebida.

Entre corpos muito grandes, como as estrelas, os planetas, os satélites, porém, a gravidade tem uma importância de primeiro plano. A força gravitacional da Terra sobre os corpos que nos rodeiam é a parte fundamental da nossa experiência.

É a gravidade que nos mantém sobre o solo e mantém a Terra e os outros planetas nas suas respectivas órbitas do sistema solar. A força gravitacional tem um papel importante na história das estrelas e no comportamento das galáxias. Numa escala muito grande, é a gravidade que controla a evolução do Universo.

Física

Paul A Tipler

Vol 1 - Cap 11 - pag300

LTC - Editora - 2000

O Universo e a Força Gravitacional

Desde tempos imemoriais o homem sempre esteve fascinado pelo movimento dos corpos celestes e das possíveis consequências destes movimentos na nossa vida aqui na Terra.

Por questões de fundo religioso, durante muito tempo supôs-se que o movimento desses corpos aconteciam de modo que a Terra tinha uma posição privilegiada neste concerto. Os religiosos acreditavam que o homem era o único ser vivo no Universo e o criador naturalmente o colocou num local especial, num planeta especial.

Era difícil aceitar o tamanho diminuto do homem frente às dimensões do Universo. Por esse motivo, todos aqueles que consideravam alguma idéia diferente deste geocentrismo era considerado herege. O ciênciia era considerada uma mera comprovação das crenças religiosas.

Com os dados observacionais do astrônomo Tycho Brahe, Johannes Kepler descobriu empiricamente que as trajetórias dos planetas em torno do Sol eram elipses.

Foi Isaac Newton quem mostrou os fundamentos de uma teoria da gravitação, que comprovava as predições de Kepler e as observações de Tycho Brahe. Mas ia ainda muito mais além ao analisar a interação entre duas massas quaisquer. Quando um corpo de massa m_1 está a uma distância r de um outro corpo de massa m_2 , a força de atração entre eles está dirigida ao longo da reta que une os corpos e tem a forma:

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

onde

$$G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ m}^3/\text{kg.s}^2$$

Gravitação e o Princípio da Superposição

A maioria dos modelos que representam fenômenos físicos são lineares. Por exemplo: a interação gravitacional entre três partículas pode ser considerada como a composição da interação aos pares dessas partículas. Isso acontece por causa do Princípio da Superposição.

Por causa deste princípio essa ciência se presta tão bem à aplicação do reducionismo. É dito que a Física é um campo de estudo reducionista porque costuma-se analisar os fenômenos extremamente sofisticados através da observação de cada uma das partes simples que compõe este fenômeno.

Para exemplificar, vamos considerar o sistema composto por três partículas, descrito anteriormente.

O vetor posição da partícula de massa m_1 é $\vec{r}_1$, o vetor posição da partícula de massa m_2 é $\vec{r}_2$ e o vetor posição da partícula de massa m_3 é $\vec{r}_3$. As distâncias entre as partículas são definidas como:

$$\begin{cases} \vec{r}_{12} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 & \therefore r_{12} = |\vec{r}_2 - \vec{r}_1| \\ \vec{r}_{13} = \vec{r}_3 - \vec{r}_1 & \therefore r_{13} = |\vec{r}_3 - \vec{r}_1| \\ \vec{r}_{23} = \vec{r}_3 - \vec{r}_2 & \therefore r_{23} = |\vec{r}_3 - \vec{r}_2| \end{cases}$$

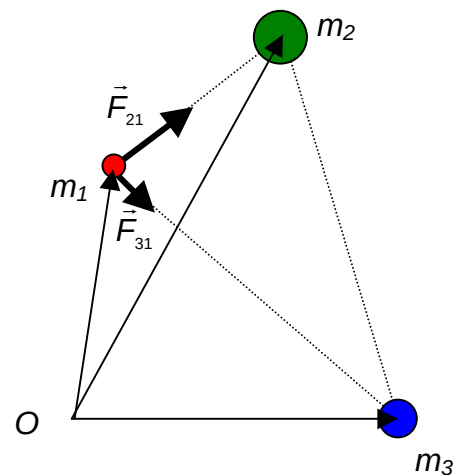
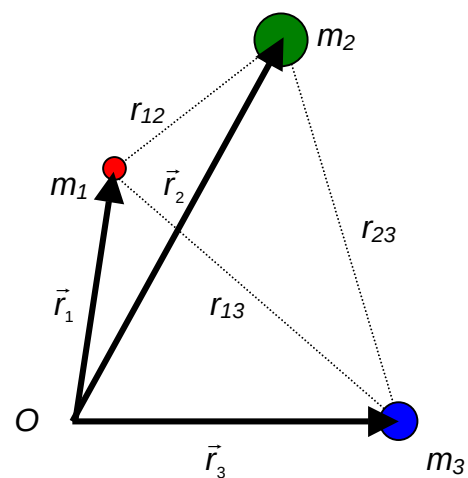
As forças que as partículas de massa m_2 e m_3 fazem na partícula de massa m_1 têm valores que independem da presença mútua, ou seja: se apenas m_2 estiver presente a força que ela exercerá em m_1 terá o mesmo valor daquele quando m_3 também estiver presente. Essas forças têm a forma:

$$\begin{cases} \vec{F}_{21} = G \frac{m_2 m_1}{r_{12}^2} \hat{r}_{12} \\ \vec{F}_{31} = G \frac{m_3 m_1}{r_{13}^2} \hat{r}_{13} \end{cases} \quad \text{onde} \quad \begin{cases} \hat{r}_{12} = \frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}} & \therefore |\hat{r}_{12}| = 1 \\ \hat{r}_{13} = \frac{\vec{r}_{13}}{r_{13}} & \therefore |\hat{r}_{13}| = 1 \end{cases}$$

e a força que as duas partículas fazem em m_1 será:

$$\vec{F}_1 = \vec{F}_{21} + \vec{F}_{31}$$

configurando assim o princípio da superposição.



Gravitação próximo à superfície da Terra

A força de atração gravitacional entre a Terra e um corpo de massa m próximo à sua superfície, em princípio deverá ter a mesma forma da atração entre dois corpos quaisquer. No entanto se esse corpo estiver a uma altura h acima da superfície da Terra, e pudermos considerar esta altura muito menor que o raio da Terra, poderemos fazer algumas considerações e até aproximações razoáveis sobre o valor desta força de atração.

Na superfície da Terra a força de atração entre os corpos tem a forma:

$$F(R_T) = G \frac{M_T m}{R_T^2}$$

e se definirmos a aceleração da gravidade g como:

$$g = G \frac{M_T}{R_T^2}$$

encontraremos que:

$$F(R_T) = mg$$

Quando o corpo estiver a uma altura h da superfície da Terra, a força de interação terá a forma:

$$F(R_T + h) = G \frac{M_T m}{(R_T + h)^2}$$

onde o denominador poderá ser escrito como:

$$\frac{1}{(R_T + h)^2} = (R_T + h)^{-2} = R_T^{-2} \left(1 + \frac{h}{R_T} \right)^{-2}$$

Quando a altura do objeto de massa m for pequena em relação ao raio da Terra, ou seja: quando $h \ll R$, podemos aproximar o termo em parêntesis por uma expansão em séries de potências. Dito de outro modo, para x pequeno podemos fazer a expansão à seguir:

$$(1 + x)^N \approx 1 + Nx + \frac{N(N-1)}{2!} x^2 + \dots$$

ou seja:

$$\left(1 + \frac{h}{R_T} \right)^{-2} \approx 1 - 2 \left(\frac{h}{R_T} \right) + \dots$$

Desse modo:

$$F(R_T + h) \approx G \frac{M_T m}{R_T^2} \left[1 - 2 \left(\frac{h}{R_T} \right) \right]$$

ou ainda:

$$F(R_T + h) = m g \left[1 - 2 \left(\frac{h}{R_T} \right) \right]$$

e quando a altura h for realmente muito menor que o raio R_T da Terra, podemos desprezar as correções e considerar a aproximação trivial, de modo que:

$$F(R_T + h) = m g$$

onde definimos o peso do objeto com uma força constante e independente da altura, com uma forma do tipo:

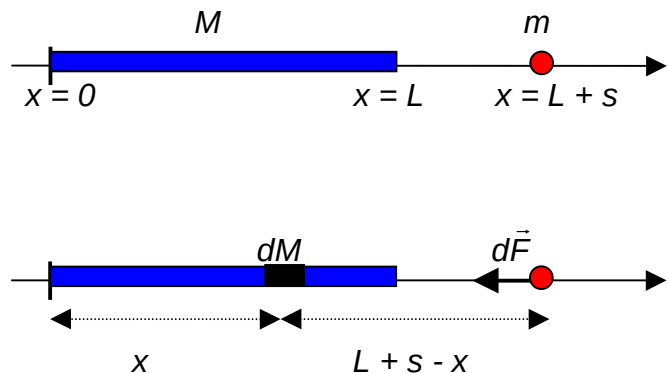
$$P = m g$$

Força entre uma haste e uma massa pontual – Caso 1

Vamos considerar uma haste de largura desprezível e massa M distribuída uniformemente ao longo do seu comprimento L . Uma partícula de massa m está colocada a uma distância s da haste, como mostra a figura ao lado.

Devemos calcular a força que um elemento de massa dM da haste exerce sobre a partícula. essa força é dirigida para a haste e tem módulo:

$$dF = G \frac{m dM}{(L + s - x)^2}$$



A força total que a haste exercerá sobre a partícula será a soma de todas as contribuições das massas elementares que compõe a haste. Por outro lado existe uma relação entre o elemento de massa dM e o espaço dx que ele ocupa na haste. Como a haste tem a massa distribuída uniformemente, temos a proporção:

$$\begin{cases} dM \rightarrow dx \\ M \rightarrow L \end{cases} \Rightarrow dM = \frac{M}{L} dx$$

Desse modo, a força total tem a forma:

$$F = \int_0^L G \frac{mM}{L} \frac{dx}{(L + s - x)^2}$$

Fazendo a mudança de variáveis $u = L + s - x$, encontramos:

$$F = G \frac{mM}{L} \int_s^{L+s} \frac{du}{u^2} = G \frac{mM}{L} \left[-\frac{1}{u} \right]_s^{L+s} = G \frac{mM}{L} \left[\frac{1}{s} - \frac{1}{L+s} \right] = G \frac{mM}{L} \frac{L}{s(L+s)}$$

ou seja

$$F = G \frac{mM}{s(L+s)}$$

Força entre uma haste e uma massa pontual – Caso 2

Vamos considerar uma haste de largura desprezível e massa M distribuída uniformemente ao longo do seu comprimento L . Uma partícula de massa m está colocada a uma distância s da haste, como mostra a figura ao lado.

Devemos calcular o elemento de força $d\vec{F}$ que um elemento de massa dM da haste exerce sobre a partícula de massa m . Vamos considerar a haste no eixo y e a partícula no eixo x . Essa força é dirigida ao longo da reta que une o elemento de massa dM e a partícula. A reta faz um ângulo θ com o eixo x .

Supondo que o elemento de massa dM está a uma distância y do ponto médio da haste, o módulo do elemento de força tem a forma:

$$dF = G \frac{m dM}{r^2}$$

onde

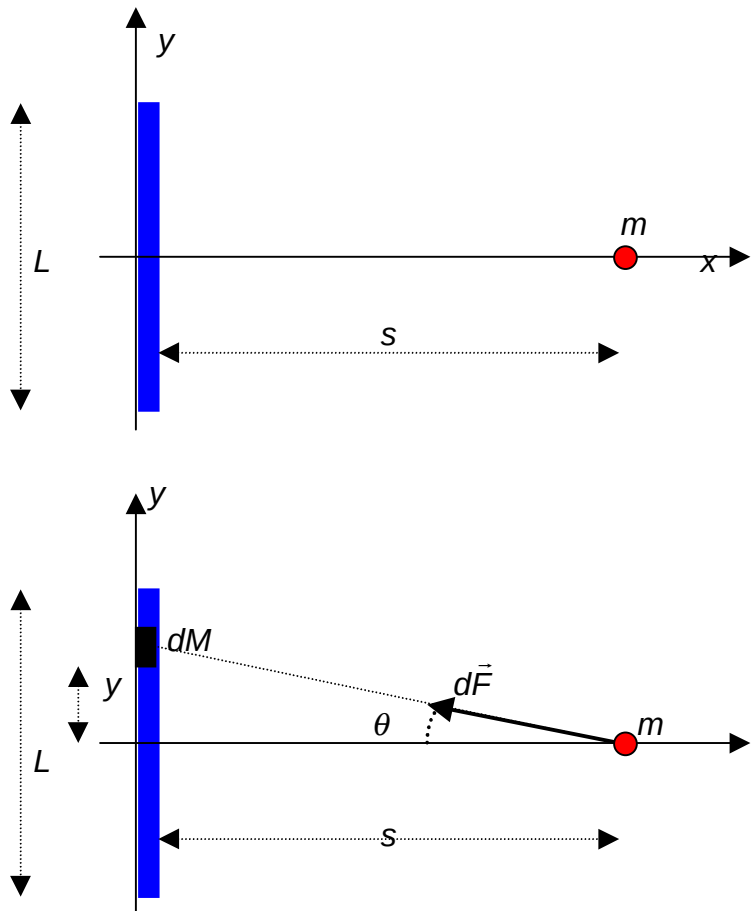
$$r^2 = s^2 + y^2$$

As componentes cartesianas dF_x e dF_y são escritas como:

$$\begin{cases} dF_x = dF \cos \theta \\ dF_y = dF \sin \theta \end{cases} \quad \text{onde} \quad \begin{cases} \cos \theta = \frac{s}{r} = \frac{s}{\sqrt{s^2 + y^2}} \\ \sin \theta = \frac{y}{r} = \frac{y}{\sqrt{s^2 + y^2}} \end{cases}$$

Como a haste tem a massa distribuída uniformemente, temos a proporção:

$$\begin{cases} dM \rightarrow dy \\ M \rightarrow L \end{cases} \Rightarrow dM = \frac{M}{L} dy$$



Podemos então dizer que:

$$dF_x = G \frac{m}{r^2} \left(\frac{M}{L} dy \right) \frac{s}{r} = G \frac{mMs}{L} \frac{dy}{r^3}$$

ou seja:

$$F_x = G \frac{mMs}{L} \int_{-L/2}^{+L/2} \frac{dy}{(s^2 + y^2)^{3/2}}$$

E de maneira equivalente:

$$dF_y = G \frac{m}{r^2} \left(\frac{M}{L} dy \right) \frac{y}{r} = G \frac{mM}{L} \frac{ydy}{r^3}$$

ou seja:

$$F_y = G \frac{mM}{L} \int_{-L/2}^{+L/2} \frac{ydy}{(s^2 + y^2)^{3/2}}$$

Para calcular F_x vamos fazer a substituição:

$$\begin{cases} \frac{y}{s} = \tan \beta \\ dy = s \sec^2 \beta \end{cases} \quad \therefore \quad \begin{cases} y = +\frac{L}{2} \Rightarrow \tan \beta_s = +\frac{L}{2s} \\ y = -\frac{L}{2} \Rightarrow \tan \beta_l = -\frac{L}{2s} \end{cases}$$

Logo:

$$F_x = G \frac{mMs}{L} \int_{\beta_l}^{\beta_s} \frac{s \sec^2 \beta d\beta}{[s^2(1 + \tan^2 \beta)]^{3/2}} = G \frac{mMs}{L} \int_{\beta_l}^{\beta_s} \frac{s \sec^2 \beta d\beta}{s^3 \sec^3 \beta} = G \frac{mM}{Ls} \int_{\beta_l}^{\beta_s} \cos \beta d\beta$$
$$F_x = G \frac{mM}{Ls} (\sin \beta_s - \sin \beta_l)$$

Mas

$$\tan \beta_s = \frac{\sin \beta_s}{\cos \beta_s} = \frac{\sin \beta_s}{\sqrt{1 - \sin^2 \beta_s}} \quad \therefore \quad \sin \beta_s = \frac{\tan \beta_s}{\sqrt{1 + \tan^2 \beta_s}}$$

ou seja:

$$\sin \beta_s = \frac{\frac{L}{2s}}{\sqrt{1 + \left(\frac{L}{2s}\right)^2}} = \frac{L}{\sqrt{L^2 + 4s^2}}$$

e de modo equivalente:

$$\sin \beta_l = -\frac{L}{\sqrt{L^2 + 4s^2}}$$

e portanto:

$$F_x = G \frac{mM}{Ls} \left[\left(+\frac{L}{\sqrt{L^2 + 4s^2}} \right) - \left(-\frac{L}{\sqrt{L^2 + 4s^2}} \right) \right] = G \frac{mM}{Ls} \left(\frac{2L}{\sqrt{L^2 + 4s^2}} \right)$$

ou seja:

$$F_x = G \frac{mM}{s} \frac{2}{\sqrt{L^2 + 4s^2}}$$

Para o cálculo da componente y podemos observar que a simetria nos conduz a um resultado nulo. Para cada contribuição para a componente F_y oriunda de um elemento de massa acima do ponto médio temos uma contribuição equivalente de um elemento de massa simétrico abaixo do ponto médio. Podemos mostrar esse resultado calculando explicitamente a integral:

$$F_y = G \frac{mM}{L} \int_{-L/2}^{+L/2} \frac{y dy}{(s^2 + y^2)^{3/2}}$$

Usando a substituição:

$$\begin{cases} \frac{y}{s} = \tan \beta \\ dy = s \sec^2 \beta \end{cases} \quad \therefore \quad \begin{cases} y = +\frac{L}{2} \Rightarrow \tan \beta_s = +\frac{L}{2s} \quad \therefore \cos \beta_s = \frac{2s}{\sqrt{L^2 + s^2}} \\ y = -\frac{L}{2} \Rightarrow \tan \beta_l = -\frac{L}{2s} \quad \therefore \cos \beta_l = \frac{2s}{\sqrt{L^2 + s^2}} \end{cases}$$

ou seja:

$$F_y = G \frac{mM}{L} \int_{\beta_l}^{\beta_s} \frac{(s \tan \beta)(s \sec^2 \beta d\beta)}{[s^2(1 + \tan^2 \beta)]^{3/2}} = G \frac{mM}{L} \frac{1}{s} \int_{\beta_l}^{\beta_s} \frac{\tan \beta d\beta}{\sec \beta} = G \frac{mM}{Ls} \int_{\beta_l}^{\beta_s} \sin \beta d\beta$$

$$F_y = -G \frac{mM}{Ls} (\cos \beta_s - \cos \beta_l) = 0$$

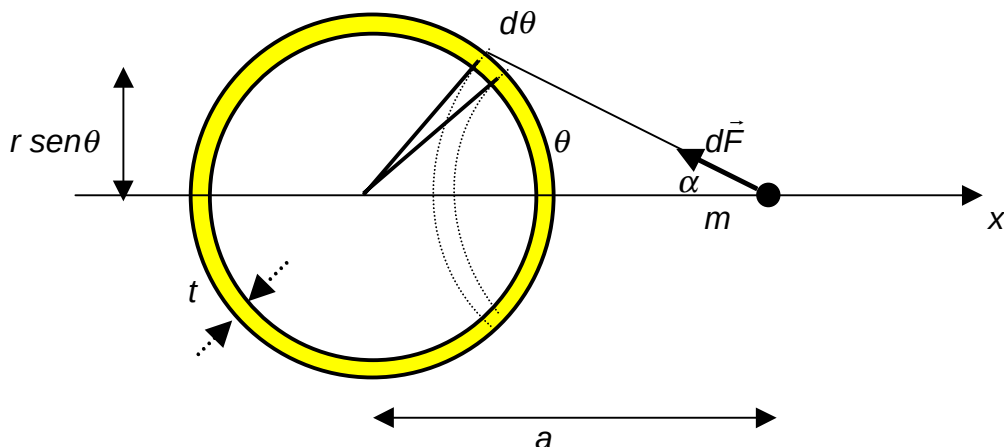
Campo produzido por uma distribuição esférica de massa em seu exterior

Seja uma casca esférica de raio r , espessura infinitesimal t e massa M . Qual a força de interação gravitacional entre essa casca e uma partícula de massa m , localizada externamente a uma distância a de seu centro?

Para calcular essa força, vamos considerar inicialmente a interação gravitacional entre a partícula de massa m e um anel que faz parte da casca esférica.

A reta que liga um ponto desse anel e a origem das coordenadas faz um ângulo θ com o eixo x , e o ângulo enfeixado por ele é $d\theta$. Desse modo esse anel terá raio $r \cdot \sin \theta$ e largura $r \cdot d\theta$, e $d\vec{F}$ será essa força a ser calculada.

A reta que une a massa m até um ponto do anel tem um comprimento R e faz um ângulo α com o eixo x .



A força elementar $d\vec{F}$ tem componentes x e s , onde a componente s está no plano perpendicular ao eixo x . Ou seja:

$$d\vec{F} = \hat{i} dF_x + \hat{s} dF_s$$

e portanto:

$$\vec{F} = \hat{i} F_x + \hat{s} F_s \quad \therefore \quad \begin{cases} F_x = \int dF_x = \int \cos \alpha dF \\ F_s = \int dF_s = \int \sin \alpha dF \end{cases}$$

Por simetria $F_s = 0$ pois cada uma das contribuições infinitesimais tem um equivalente de sinal contrário, que na integração tornará nula essa componente.

O módulo da força elementar dF , tem a forma:

$$dF = G \frac{m dM}{R^2}$$

onde dM é a massa elementar do anel e R é a distância de um ponto desse anel até a posição da partícula de massa m . Iremos usar o conceito de densidade volumétrica de massa, que é representada pela letra grega ρ , e é definida como a razão entre a massa e o volume ocupado por essa massa, ou seja:

$$\rho = \frac{dM}{dV}$$

e quando a distribuição de massa for uniforme, podemos também dizer que:

$$\rho = \frac{M}{V}$$

O volume elementar do anel será:

$$dV = 2\pi (\text{raio}) (\text{largura}) (\text{espessura})$$

$$dV = 2\pi (r \sin \theta) (r d\theta) (t)$$

e portanto:

$$dM = \rho dV = 2\pi \rho t (r \sin \theta) (r d\theta) = 2\pi \rho t r^2 \sin \theta d\theta$$

O ângulo α definido como aquele que a reta que une a partícula ao anel genérico, faz com o eixo x , e é tal que:

$$\cos \alpha = \frac{a - r \cos \theta}{R}$$

onde R é a distância entre a partícula de massa m até o anel genérico. Desse modo

$$dF_x = dF \cos \alpha = G \frac{m [2\pi \rho t r^2 \sin \theta d\theta]}{R^2} \frac{a - r \cos \theta}{R}$$

ou ainda:

$$dF_x = [2\pi t \rho G m r^2] \frac{(a - r \cos \theta)(\sin \theta d\theta)}{R^3}$$

onde

$$R^2 = (a - r \cos \theta)^2 + (r \sin \theta)^2 = a^2 + r^2 - 2ar \cos \theta$$

ou seja:

$$dF_x = [2\pi t \rho G m r^2] \frac{(a - r \cos \theta)(\sin \theta d\theta)}{[a^2 + r^2 - 2ar \cos \theta]^{3/2}}$$

e então:

$$F_x = [2\pi t \rho G m r^2] \int_0^\pi \frac{(a - r \cos \theta)(\sin \theta d\theta)}{[a^2 + r^2 - 2ar \cos \theta]^{3/2}}$$

Em termos da física envolvida o problema está encerrado, mas essa integral não tem uma aparência muito simpática. Talvez fosse mais adequado fazer uma mudança de variável e usar a distância R ao invés do ângulo θ . À partir da definição de R podemos diferenciar e encontrar que:

$$2RdR = 2arsen\theta d\theta \quad \therefore \quad sen\theta d\theta = \frac{RdR}{ar}$$

e também que:

$$r \cos \theta = \frac{R^2 - a^2 - r^2}{-2a} = \frac{r^2 + a^2 - R^2}{2a}$$

e podemos colocar como:

$$dF_x = \frac{[2\pi t \rho G m r^2]}{R^2} \left(\frac{RdR}{ar} \right) \frac{a - \frac{r^2 + a^2 - R^2}{2a}}{R} = \frac{\pi t \rho G m r}{R} \left(\frac{dR}{a} \right) \frac{2a^2 - (r^2 + a^2 - R^2)}{2aR}$$

$$dF_x = \frac{\pi t \rho G m r}{a^2} \left(\frac{R^2 + a^2 - r^2}{R^2} \right) dR = \frac{\pi t \rho G m r}{a^2} \left[1 + \frac{a^2 - r^2}{R^2} \right] dR$$

$$F_x = \frac{\pi t \rho G m r}{a^2} \int_{a-r}^{a+r} \left[1 + \frac{a^2 - r^2}{R^2} \right] dR$$

$$F_x = \frac{\pi t \rho G m r}{a^2} \left\{ R \Big|_{a-r}^{a+r} + (a^2 - r^2) \left[-\frac{1}{R} \Big|_{a-r}^{a+r} \right] \right\}$$

$$F_x = \frac{\pi t \rho G m r}{a^2} \left\{ [(a+r) - (a-r)] - (a^2 - r^2) \left[\frac{1}{a+r} - \frac{1}{a-r} \right] \right\}$$

$$F_x = \frac{\pi t \rho G m r}{a^2} \{ (2r) + (2r) \} = \frac{4\pi r^2 t \rho G m}{a^2}$$

Mas o volume V da esfera é o produto de sua área $4\pi r^2$ por sua espessura t , ou seja:

$$F_x = G \frac{m(\rho V)}{a^2}$$

e como foi definido anteriormente, $M = \rho V$, logo:

$$F_x = G \frac{mM}{a^2}$$

A força de atração entre uma casca esférica de massa M , cujo centro está a uma distância a de uma partícula de massa m tem o mesmo valor da atração entre duas partículas que distam de $a > r$ e têm massas M e m respectivamente. Em outras palavras: a casca esférica se comporta com se toda a sua massa estivesse concentrada no seu centro.

Campo produzido por uma distribuição esférica de massa em seu interior

Seja uma casca esférica de raio r , espessura infinitesimal t e massa M . Qual a força de interação gravitacional entre essa casca e uma partícula de massa m , localizada internamente a uma distância a de seu centro?

Para calcular essa força, vamos considerar inicialmente a interação gravitacional entre a partícula de massa m e um anel que faz parte da casca esférica.

A reta que liga um ponto desse anel e a origem das coordenadas faz um ângulo θ com o eixo x , e o ângulo enfeixado por ele é $d\theta$. Desse modo esse anel terá raio $r \cdot \sin\theta$ e largura $r \cdot d\theta$, e $d\vec{F}$ será essa força a ser calculada.

A reta que une a massa m até um ponto do anel tem um comprimento R e faz um ângulo α com o eixo x .

A força elementar $d\vec{F}$ tem componentes x e s , onde a componente s está no plano perpendicular ao eixo x . Ou seja:

$$d\vec{F} = \hat{i} dF_x + \hat{s} dF_s$$

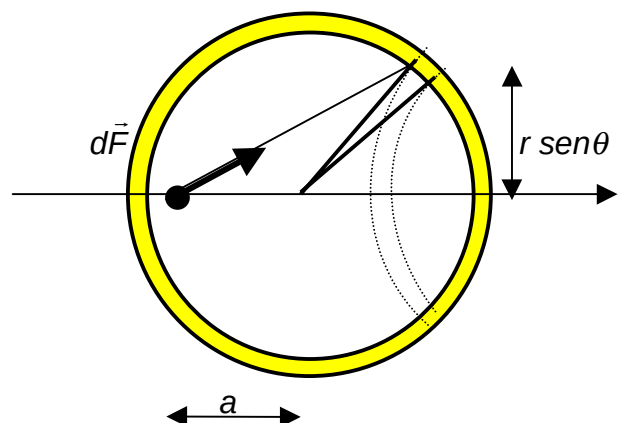
e portanto:

$$\vec{F} = \hat{i} F_x + \hat{s} F_s$$

$$\begin{cases} F_x = \int dF_x = \int \cos\alpha dF \\ F_s = \int dF_s = \int \sin\alpha dF \end{cases}$$

Por simetria $F_s = 0$ pois cada uma das contribuições infinitesimais tem um equivalente de sinal contrário, que na integração tornará nula essa componente.

O módulo da força elementar dF , tem a forma:



$$dF = G \frac{m dM}{R^2}$$

onde dM é a massa elementar do anel e R é a distância de um ponto desse anel até a posição da partícula de massa m . Iremos usar o conceito de densidade volumétrica, que é representada pela letra grega ρ , e é definida como a razão entre a massa e o volume ocupado por essa massa, ou seja:

$$\rho = \frac{dM}{dV}$$

e quando a distribuição de massa for uniforme, podemos também dizer que:

$$\rho = \frac{M}{V}$$

O volume elementar do anel será:

$$dV = 2\pi (\text{raio}) (\text{largura}) (\text{espessura})$$

$$dV = 2\pi (r \sin\theta) (r d\theta) t$$

e portanto:

$$dM = \rho dV = 2\pi \rho t (r \sin\theta) (r d\theta) = 2\pi \rho t r^2 \sin\theta d\theta$$

O ângulo α definido como aquele que a reta que a massa da partícula ao anel faz com o eixo x é de tal modo que:

$$\cos\alpha = \frac{a + r \cos\theta}{R}$$

ou ainda:

$$dF_x = [2\pi t \rho G m r^2] \frac{(a + r \cos\theta)(\sin\theta d\theta)}{R^3}$$

onde

$$R^2 = (a + r \cos\theta)^2 + (r \sin\theta)^2 = a^2 + r^2 + 2ar \cos\theta$$

ou seja:

$$dF_x = [2\pi t \rho G m r^2] \frac{(a + r \cos\theta)(\sin\theta d\theta)}{[a^2 + r^2 + 2ar \cos\theta]^{3/2}}$$

e então:

$$F_x = [2\pi t \rho G m r^2] \int_0^\pi \frac{(a + r \cos\theta)(\sin\theta d\theta)}{[a^2 + r^2 + 2ar \cos\theta]^{3/2}}$$

Em termos da física envolvida o problema está encerrado, mas essa integral não tem uma aparência muito simpática. Talvez fosse mais adequado fazer uma mudança de variável e usar a distância R ao invés do ângulo θ . À partir da definição de R podemos diferenciar e encontrar que:

$$2RdR = -2arsen\theta d\theta \quad \therefore \quad sen\theta d\theta = -\frac{RdR}{ar}$$

e também que:

$$r \cos \theta = \frac{R^2 - a^2 - r^2}{2a} = \frac{R^2 - a^2 - r^2}{2a}$$

e podemos colocar como:

$$dF_x = \frac{[2\pi t \rho G m r^2]}{R^2} \left(-\frac{R dR}{ar} \right) \frac{a + \frac{R^2 - a^2 - r^2}{2a}}{R} = \frac{\pi t \rho G m r}{R} \left(-\frac{dR}{a} \right) \frac{2a^2 + (R^2 - a^2 - r^2)}{2aR}$$

$$dF_x = -\frac{\pi t \rho G m r}{a^2} \left(\frac{R^2 + a^2 - r^2}{R^2} \right) dR = -\frac{\pi t \rho G m r}{a^2} \left[1 + \frac{a^2 - r^2}{R^2} \right] dR$$

$$F_x = -\frac{\pi t \rho G m r}{a^2} \int_{r+a}^{r-a} \left[1 + \frac{a^2 - r^2}{R^2} \right] dR$$

$$F_x = -\frac{\pi t \rho G m r}{a^2} \left\{ R \Big|_{r+a}^{r-a} + (a^2 - r^2) \left[-\frac{1}{R} \Big|_{r+a}^{r-a} \right] \right\}$$

$$F_x = -\frac{\pi t \rho G m r}{a^2} \left\{ [(r-a) - (r+a)] - (a^2 - r^2) \left[\frac{1}{r-a} - \frac{1}{r+a} \right] \right\}$$

$$F_x = \frac{\pi t \rho G m r}{a^2} \left\{ [-2a] - (a^2 - r^2) \frac{2a}{(r^2 - a^2)} \right\}$$

$$F_x = \frac{\pi t \rho G m r}{a^2} \{-2a + 2a\} = 0$$

Encontramos então, que é nula a força de atração entre uma casca esférica de massa M e uma partícula de massa m colocada no seu interior.

Cálculo alternativo - partícula no interior

Uma maneira alternativa de calcular a interação entre uma casca esférica de massa M , raio r e espessura h , e uma partícula de massa m pode ser compreendida da figura à seguir.

Construímos dois cones complementares, cujos vértices coincidem com a posição da partícula de massa m . Cada cone delimita um mesmo ângulo sólido $d\Omega$ e a interseção de cada cone com a casca esférica define uma área elementar dA nesta casca.

Usando a definição de ângulo sólido, temos que:

$$dA_1 = r_1^2 d\Omega$$

e também

$$dA_2 = r_2^2 d\Omega$$

onde deve ficar claro que as áreas que delimitadas por ambos os cones dependem da sua distância (r_1 ou r_2) à partícula.

Como a casca esférica tem espessura h os volumes elementares delimitados por cada cone na esfera, têm a forma:

$$\begin{cases} dV_1 = h dA_1 = h r_1^2 d\Omega \\ dV_2 = h dA_2 = h r_2^2 d\Omega \end{cases}$$

A massa elementar de cada um desses volumes é:

$$\begin{cases} dM_1 = \rho dV_1 = \rho h r_1^2 d\Omega \\ dM_2 = \rho dV_2 = \rho h r_2^2 d\Omega \end{cases}$$

A força que cada uma dessas massas elementares exercerá na partícula, tem a forma:

$$\begin{cases} dF_1 = G \frac{m dM_1}{r_1^2} = G \frac{m(\rho h r_1^2 d\Omega)}{r_1^2} = G m \rho h d\Omega \\ dF_2 = G \frac{m dM_2}{r_2^2} = G \frac{m(\rho h r_2^2 d\Omega)}{r_2^2} = G m \rho h d\Omega \end{cases} \Rightarrow dF_1 = dF_2 = dF$$

Toda a superfície será varrida por cones complementares, de modo que a contribuição de uma região de uma região para a força gravitacional total, anulará a contribuição da região complementar e desse modo a força de interação total é nula.

Podemos chegar a essa conclusão considerando a soma de dF por todos os ângulos sólidos da esfera, ou seja:

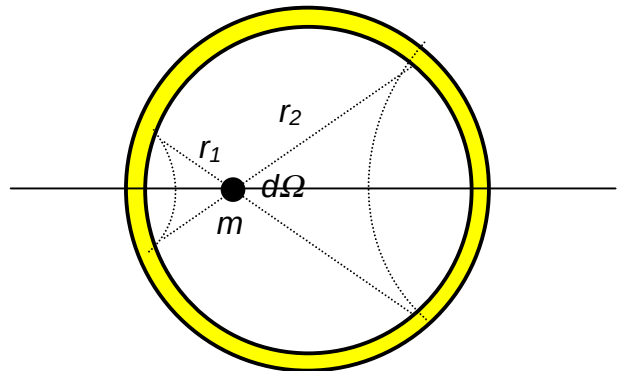
$$F = \int_{\Omega} dF = \int_{\Omega} G m \rho h d\Omega$$

mas

$$d\Omega = \sin\theta d\theta d\phi$$

logo:

$$F = G m \rho h \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi = 0$$

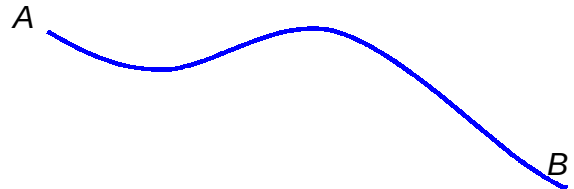


Energia potencial gravitacional

Para toda força conservativa $\vec{F}(\vec{r})$ podemos associar uma energia potencial $V(\vec{r})$. Essa energia potencial é definida em termos do trabalho executado pela força correspondente, da seguinte forma:

$$\Delta U = U_B - U_A = -W_{AB}$$

ou seja: a variação de energia potencial de uma partícula entre dois pontos A e B é igual ao trabalho executado (com sinal negativo) pela força considerada para levar essa partícula do ponto A até o ponto B .



Outro modo de colocar essa questão é dizer que:

$$U_B = U_A - W_{AB}$$

ou seja:

$$U_B = U_A - \int \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{l}$$

A energia potencial é definida em termos de uma variação ΔU , ou seja: ela é definida a menos de uma constante arbitrária. Em outras palavras: definimos variações de energia potencial; o quanto diminuiu (ou aumentou) a energia de um corpo que foi de uma posição inicial até uma final. Escolhemos a origem da energia potencial de maneira arbitrária, como já foi mencionado.

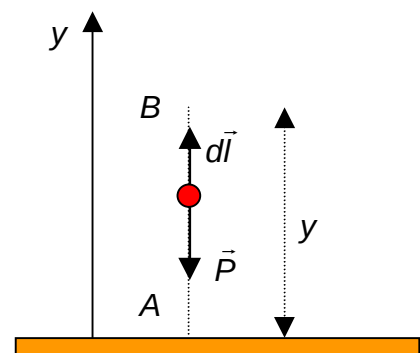
Vamos detalhar o cálculo da energia potencial em duas situações típicas: muito próximo da superfície da Terra e muito longe da superfície.

Energia potencial gravitacional próximo à superfície da Terra

Próximo à superfície da Terra podemos considerar a força de interação entre a Terra e uma partícula de massa m constante e com módulo mg .

Vamos calcular a variação de energia potencial gravitacional entre o ponto inicial A localizado na superfície da Terra e o ponto final B localizado numa altura y .

O vetor $d\vec{l}$ é definido como um vetor infinitesimal dirigido ao longo da curva de integração e apontando da posição inicial para a posição final.



Desse modo:

$$U_B = U_A - W_{AB} = U_A - \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{l}$$

onde escolhemos U_A como a origem da energia potencial e portanto com o valor zero. Usando essas considerações, podemos dizer que:

$$\begin{cases} \vec{F} = m\vec{g} = -\hat{j} mg \\ d\vec{l} = +\hat{j} dy \end{cases}$$

e

$$U(y) = -\int_0^y (-\hat{j} mg) \cdot (\hat{j} dy) = mg \int_0^y dy = mg(y - 0)$$

$$U(y) = m g y$$

Energia potencial gravitacional distante da superfície da Terra

No caso mais geral, quando quisermos calcular a diferença de energia potencial gravitacional entre dois pontos distantes devemos usar a equação de gravitação sem aproximações.

Vamos calcular a diferença de energia potencial entre duas posições ocupadas por uma partícula. Inicialmente ela está numa posição muito distante (no infinito) e ela então é trazida até uma posição finita r . Ou seja:

$$U(r) - U(\infty) = -\int_{\infty}^r \vec{F} \cdot d\vec{l}$$

Vamos considerar a origem da energia potencial num ponto muito distante, de modo que:

$$U(\infty) = 0$$

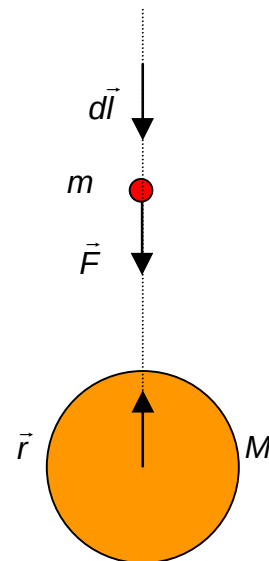
Devemos considerar que:

$$F = G \frac{Mm}{r^2} \quad \text{e} \quad \begin{cases} \vec{F} = -\hat{r}F \\ d\vec{l} = -\hat{r} dl = +\hat{r} dr \end{cases}$$

e então:

$$U(r) = \int_{\infty}^r \left(-\hat{r} G \frac{Mm}{r^2} \right) \cdot \hat{r} dr = GMm \int_{\infty}^r \frac{dr}{r^2} = +GMm \left[-\frac{1}{r} \right]_{\infty}^r = -GMm \left[\frac{1}{r} - 0 \right]$$

e finalmente:



$$U(r) = -G \frac{Mm}{r}$$

Por outro lado:

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\nabla U(r) = -\hat{r} \frac{dU}{dr} \Rightarrow \vec{F}(\vec{r}) = \hat{r} G \frac{Mm}{r^2}$$

Leis de Kepler

A humanidade sempre foi fascinada pelo céu noturno, com a infinidade de estrelas e com os brilhantes planetas. No final do século XVI, o astrônomo Tycho Brahe estudou os movimentos dos planetas e conseguiu fazer observações muito mais exatas que as feitas anteriormente por outros observadores.

Com os dados de Tycho Brahe, Johannes Kepler descobriu que as trajetórias dos planetas em torno do Sol eram elipses. Mostrou também que tinham velocidades maiores quando orbitavam nas proximidades do Sol e menores quando estavam muito afastados. Kepler estabeleceu, por fim, uma relação matemática precisa entre o período de um planeta e a sua distância média ao Sol, e enunciou os resultados da sua investigação em três leis empíricas do movimento dos planetas.

Física

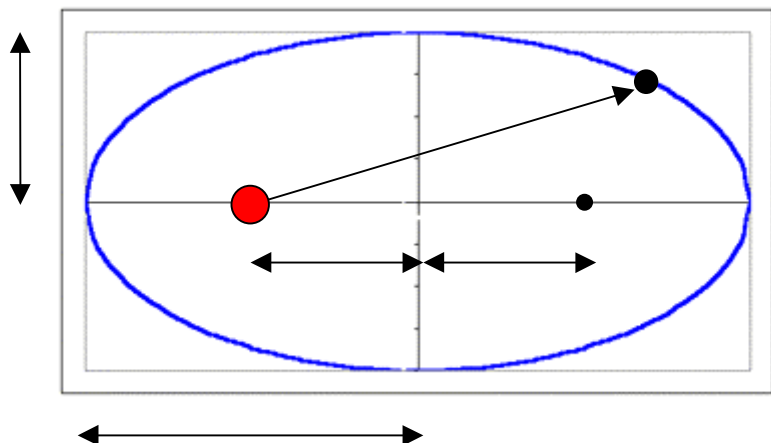
Paul A Tipler

Vol 1 - Cap 11 - pag300

LTC - Editora - 2000

As Leis empíricas de Kepler vieram a ser comprovadas posteriormente pela Mecânica Newtoniana.

Primeira - Lei das Órbitas: Todos os planetas se movem em órbitas elípticas, com o Sol em um dos focos.



A Mecânica Newtoniana deduziu uma conclusão ainda mais geral. Quando um corpo está sob a ação de uma força que varia com o inverso do quadrado da distância (como a força gravitacional) ele descreve uma órbita que é uma cônica (elipse, parábola ou hipérbole). A órbita a ser descrita pelo corpo depende da sua Energia Mecânica. No caso dos planetas temos órbitas fechadas - elipse e no caso dos cometas temos uma trajetória aberta - hipérbole.

Para maiores detalhes da análise das Leis de Kepler o interessado deve consultar :

Classical Mechanics
Herbert Goldstein
Cap 3 - Sec 3-7
Addison Wesley - 1980

Segunda - Lei das Áreas: Uma linha que liga um planeta ao Sol varre áreas iguais em tempos iguais.

Vamos considerar a área ΔA varrida pelo planeta num intervalo de tempo Δt . Quando o intervalo de tempo for muito pequeno, a área do triângulo pontilhado em vermelho vale aproximadamente:

$$\Delta A \approx r \cdot (r \cdot \Delta \theta) / 2$$

onde r mede aproximadamente a distância entre o Sol e o planeta e $\Delta \theta$ mede o ângulo varrido pela linha quando o planeta se movimenta da posição inicial até a final. A taxa com que essa área varia com o tempo é dada por:

$$\frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{1}{2} r^2 \frac{\Delta \theta}{\Delta t}$$

e quando o intervalo de tempo tender a zero:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2} r^2 w$$

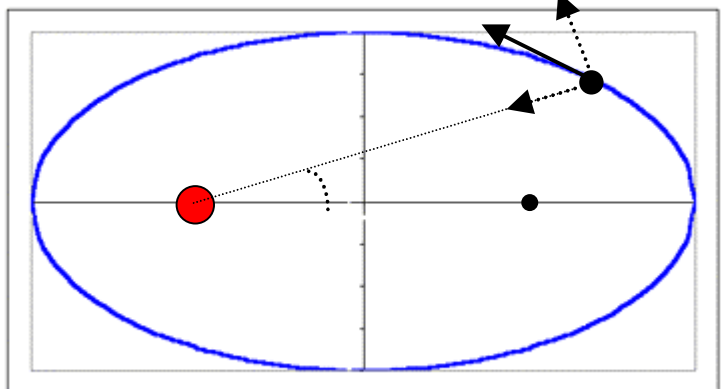
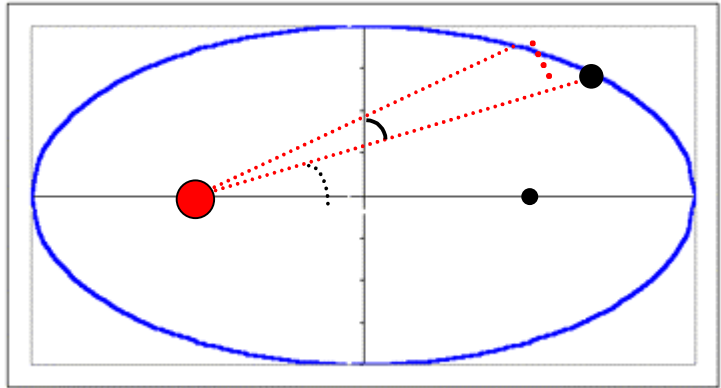
onde w é a velocidade angular do planeta.

Por outro lado, o vetor momento linear $\vec{p}$ do planeta tem a direção tangente à curva descritas por esse objeto. Iremos decompor esse vetor segundo

uma componente radial e outra componente perpendicular. A componente radial tem a direção ao longo da linha que une o planeta ao Sol e componente perpendicular é perpendicular a essa linha. Desse modo, o vetor momento angular $\vec{L}$ do planeta num dado instante é dado por:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} \Rightarrow L = r p_{\perp} = r (m v_{\perp}) = r (m w r) = m r^2 w$$

Considerando a variação da área varrida pela linha, encontramos que:



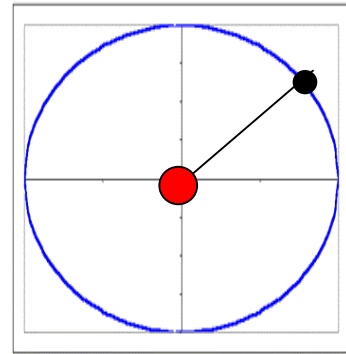
$$\frac{dA}{dt} = \frac{L}{2m}$$

Se dA/dt é constante como Kepler afirmou, isso significa que L também deve ser constante - o momento angular deve ser conservado. Assim, a segunda Lei de Kepler é equivalente à lei de conservação do momento angular

Terceira - Lei dos Períodos: O quadrado do período de qualquer planeta é proporcional ao cubo do semi-eixo maior de sua órbita.

Por simplicidade, vamos considerar que a órbita do planeta de massa m é circular de raio R , e o movimento tem um período T . A única força que atua no planeta é a força gravitacional e portanto ela é a força centrípeta:

$$F = G \frac{mM}{R^2} = m \frac{v^2}{R} \quad \therefore \quad v^2 = G \frac{M}{R}$$



Mas, por outro lado:

$$v = \frac{2\pi R}{T} \quad \therefore \quad \left(\frac{2\pi R}{T} \right)^2 = G \frac{M}{R}$$

ou seja

$$\frac{T^2}{R^3} = \frac{4\pi^2}{GM} = \text{constante}$$

Órbitas de satélites e energia

Vamos considerar o movimento de dois objetos estelares de massas M e m respectivamente, com interação dada pela Lei de Gravitação Universal, que num dado momento estão distantes entre si uma distância r . Vamos supor ainda que a origem do referencial esteja localizada em M , e para simplificar, que a órbita de m ao redor de M seja uma circunferência - ao invés do caso mais geral que seria uma elipse.

Esse sistema é conservativo, e a Energia Mecânica E é a soma das Energias Cinética K e Potencial U .

$$E = K + U \quad \left\{ \begin{array}{l} K = \frac{1}{2}mv^2 \\ U = -G \frac{Mm}{r} \end{array} \right.$$

A única força que está atuando é a gravitacional, portanto ela é a força centrípeta, e desse modo:

$$F = G \frac{Mm}{r^2} = m \frac{v^2}{r} \quad \therefore \quad K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}G \frac{Mm}{r} \Rightarrow K(r) = -\frac{1}{2}U(r)$$

e desse modo:

$$E = -\frac{1}{2}U + U \Rightarrow E(r) = -\frac{1}{2}G \frac{Mm}{r}$$

Quando a Energia Mecânica é negativa (como neste caso) temos um sistema fechado pois a partícula não é livre para se libertar do potencial e se afastar para uma distância infinitamente grande. Isso é decorrência do fato da energia potencial (que é negativa) ter um módulo maior que a energia cinética e como consequência a partícula estará presa a este potencial. Em contraposição, a partícula será livre quando a energia mecânica for positiva.

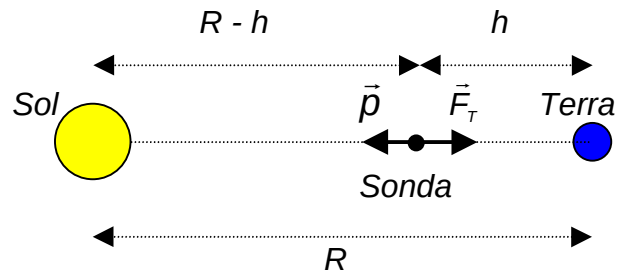
Solução de alguns problemas

Capítulo 14 - Halliday, Resnick e Walker - 6ª. edição

- 07 A que distância da Terra, medida ao longo da linha que une os centros da Terra e do Sol, deve estar uma sonda espacial para que a atração gravitacional deste anule a da Terra?

$$\begin{aligned} R &= 1,5 \times 10^{11} \text{ m} \\ M_S &= 1,99 \times 10^{30} \text{ kg} \\ M_T &= 5,98 \times 10^{24} \text{ kg} \end{aligned}$$

Vamos considerar m a massa da sonda. A uma certa altura h da Terra as duas forças sobre a sonda serão iguais.



As forças que o Sol e a Terra exercem sobre a sonda têm a forma:

$$\begin{cases} F_S = G \frac{M_S m}{(R - h)^2} \\ F_T = G \frac{M_T m}{h^2} \end{cases}$$

Igualando as duas forças encontramos que:

$$\frac{M_S}{(R - h)^2} = \frac{M_T}{h^2} \quad \therefore \quad \frac{M_S}{M_T} h^2 = (R - h)^2$$

A física do problema está equacionada e resta agora resolver esta equação do segundo grau. Definindo

$$\alpha = \sqrt{\frac{M_S}{M_T}}$$

a equação toma a forma:

$$\alpha h = R - h \quad \Rightarrow \quad h = \frac{R}{1 + \alpha} = \frac{R}{1 + \sqrt{\frac{M_S}{M_T}}}$$

Desse modo:

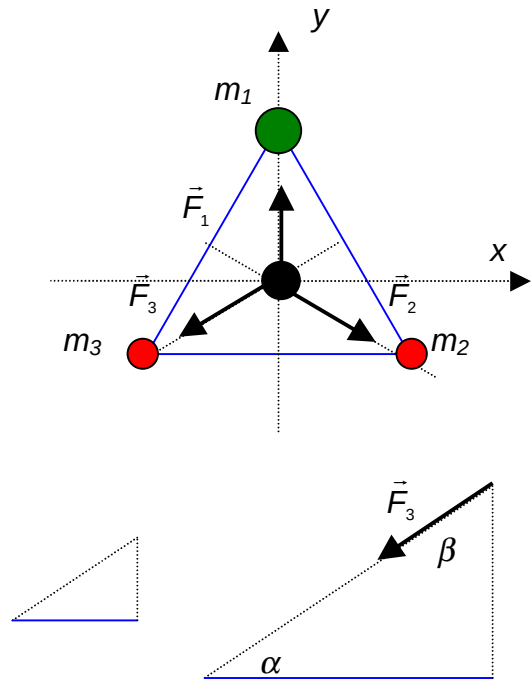
$$h = 2,6 \times 10^8 \text{ m}$$

Capítulo 14 - Halliday, Resnick e Walker - 6ª. edição

- 09 Na figura ao lado, duas esferas de massa m (m_2 e m_3) e uma terceira de massa M (m_1) estão nos vértices de um triângulo equilátero, e uma quarta esfera de massa m_4 está no baricentro do triângulo. Se a força gravitacional resultante sobre esta quarta esfera é nula, exprima a massa M em termos da massa m .

$$\begin{aligned} m_1 &= M \\ m_2 &= m \\ m_3 &= m \\ m_4 &= \end{aligned}$$

Cada um dos ângulos internos de um triângulo equilátero tem o valor de 60° , e portanto o ângulo entre a bissetriz deste ângulo e um dos lados vale 30° . Quando dividido pelas bissetrizes, o triângulo equilátero dá origem a seis triângulos retângulos como mostrados ao lado. O ângulo $\alpha = 30^\circ$ por ser a metade da bissetriz e $\beta = 60^\circ$ por ser complementar a α . Vale lembrar que a esfera central está equidistante (a) das outras três esferas. Com essas considerações, as forças têm a forma:



$$\vec{F} = \hat{i}F_x + \hat{j}F_y$$

$$F_x = F_2 \sin\beta - F_3 \sin\beta = 0 \Rightarrow F_2 = F_3$$

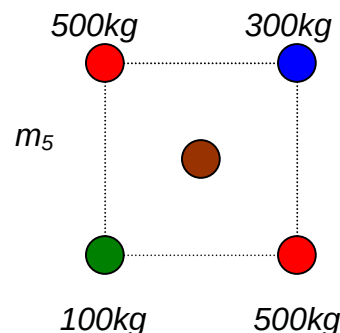
$$F_y = F_1 - F_2 \cos\beta - F_3 \cos\beta = 0 \Rightarrow F_1 = 2 F_2 \cos\beta = 2 F_2 (0,5) \therefore F_1 = F_2$$

$$F_1 = F_2 \Rightarrow G \frac{m_4 M}{a^2} = G \frac{m_4 m}{a^2} \therefore M = m$$

Capítulo 14 - Halliday, Resnick e Walker - 6ª. edição

- 10 Na figura à seguir, quatro esferas estão nos vértices de um quadrado de lado $2,0\text{cm}$. Qual o módulo e a direção da força gravitacional resultante sobre uma esfera colocada no centro do quadrado com massa $m_5 = 250\text{kg}$?

$$\begin{aligned} m_1 &= 500\text{kg} \\ m_2 &= 300\text{kg} \\ m_3 &= 500\text{kg} \\ m_4 &= 100\text{kg} \\ m_5 &= 250\text{kg} \\ a &= 2\text{cm} = 0,02\text{m} \end{aligned}$$



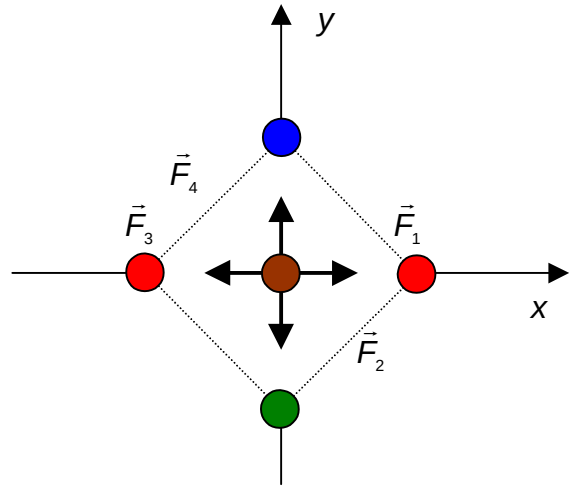
A distância r entre cada vértice e o centro tem a forma:

$$r^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{2}$$

ou seja:

$$r = \frac{a}{\sqrt{2}}$$

$$\vec{F} = \hat{i}(F_1 - F_3) + \hat{j}(F_4 - F_2)$$



$$F_x = F_1 - F_3 \quad \therefore \quad \begin{cases} F_1 = G \frac{m_1 m_5}{r^2} = 2G \frac{m_1 m_5}{a^2} \\ F_3 = G \frac{m_3 m_5}{r^2} = 2G \frac{m_3 m_5}{a^2} \end{cases} \Rightarrow F_x = 2G \frac{m_5}{a^2} (m_1 - m_3) = 0$$

$$F_y = F_4 - F_2 \quad \therefore \quad \begin{cases} F_4 = G \frac{m_4 m_5}{r^2} = 2G \frac{m_4 m_5}{a^2} \\ F_2 = G \frac{m_2 m_5}{r^2} = 2G \frac{m_2 m_5}{a^2} \end{cases} \Rightarrow F_y = 2G \frac{m_5}{a^2} (m_4 - m_2)$$

$$F_y = 2 \cdot (6,67 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 / \text{kg}^2) \cdot \frac{(250 \text{ kg})}{(0,02 \text{ m})^2} (100 \text{ kg} - 300 \text{ kg}) = -0,166 \text{ N}$$

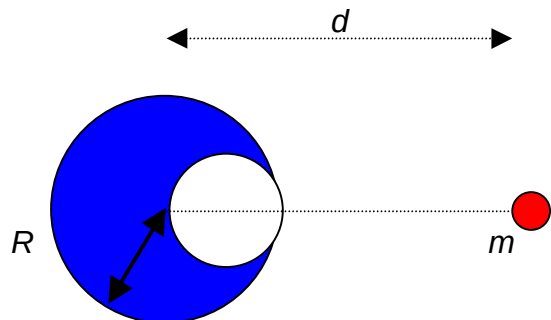
$$\vec{F} = -\hat{j}(0,166 \text{ N})$$

Capítulo 14 - Halliday, Resnick e Walker - 6ª. edição

- 13 Fazemos uma cavidade esférica em uma bola de chumbo de raio R , de tal modo que sua superfície toca o exterior da esfera de chumbo, passando também pelo seu centro. A massa da esfera, antes de ser feita a cavidade, era M . Qual a intensidade da força gravitacional com que a esfera côncava atrairá uma pequena esfera de massa m , que está a uma distância d do seu centro, medida ao longo

Vamos lançar mão do seguinte artifício para resolver: vamos considerar que a esfera com uma cavidade é resultado da composição de uma esfera maciça de raio R e de uma esfera de massa negativa e raio $R/2$ colocada exatamente no local da cavidade.

A força de interação da esfera com cavidade e a pequena esfera de massa m ,



será simulada pela interação das esfera maciça e a de massa negativa com a pequena esfera.

Vamos considerar que as esferas têm mesma densidade. Seja V o volume da esfera maciça e V_B o volume do buraco que foi feito numa esfera maciça para construir a esfera côncava. A massa da esfera maciça é:

$$M = \rho V = \rho \frac{4}{3} \pi R^3$$

Por outro lado, a massa retirada para fazer o buraco vale:

$$M_B = \rho V_B = \rho \frac{4}{3} \pi \left(\frac{R}{2} \right)^3 = \frac{1}{8} \left[\rho \frac{4}{3} \pi R^3 \right] = \frac{M}{8}$$

e portanto a massa M_R que restou depois de ter sido feito o buraco, foi:

$$M_R = M - M_B = \frac{7M}{8}$$

A força da esfera restante de massa $7M/8$ sobre a pequena esfera será:

$$F_R = F + F_B = G \frac{mM}{d^2} + G \frac{m(-M_B)}{\left(d - \frac{R}{2}\right)^2} = G \frac{mM}{d^2} \left[1 - \frac{d^2}{8 \left(d - \frac{R}{2}\right)^2} \right]$$

e finalmente:

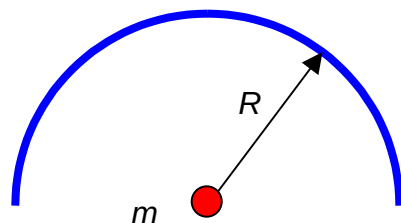
$$F_R = G \frac{mM}{d^2} \left[1 - \frac{1}{8 \left(1 - \frac{R}{2d}\right)^2} \right]$$

Capítulo 14 - Halliday, Resnick e Walker - 4ª. edição

14 Uma barra fina de massa M é deformada até adquirir a forma de um semicírculo de raio R , como na figura à seguir.

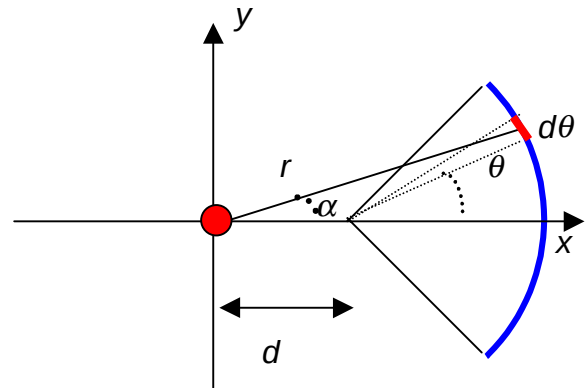
- a) Qual é a força gravitacional (em módulo e direção) sobre uma partícula de massa m e colocada no centro de curvatura da barra?

Vamos resolver este problema para uma situação genérica, onde a barra foi deformada de modo a adquirir a forma de um arco de círculo de raio R



mas com um ângulo θ_0 ao invés de π . Vamos colocar a massa m no eixo de simetria do arco, mas a uma distância d do seu centro de curvatura.

Para realizar esse cálculo vamos considerar a força de atração entre a massa m e uma elemento de massa dM que pertence à barra deformada e está localizada a um ângulo θ do centro de curvatura e tem a largura angular de $d\theta$.



O elemento de massa dM está a uma distância r da massa m e a reta que os une faz um ângulo α com o eixo x . A força entre m e dM está na direção da reta que une essas duas massas e tem a forma:

$$dF = G \frac{m dM}{r^2} \quad \therefore \quad \begin{cases} dF_x = dF \cos \alpha \\ dF_y = dF \sin \alpha \end{cases}$$

A distância r tem a forma:

$$r^2 = (R \sin \theta)^2 + (R \cos \theta + d)^2$$

ou seja:

$$r^2 = R^2 + d^2 + 2 R d \cos \theta$$

e por outro lado:

$$\begin{cases} r \cos \alpha = R \cos \theta + d \Rightarrow \cos \alpha = \frac{d + R \cos \theta}{r} \\ r \sin \alpha = R \sin \theta \Rightarrow \sin \alpha = \sin \theta \end{cases}$$

Considerando que a massa da barra tem uma distribuição uniforme, podemos dizer que:

$$M = \lambda (R \theta_0) \quad \therefore \quad dM = \lambda R d\theta$$

e finalmente:

$$dF_x = G \frac{m(\lambda R d\theta)}{r^2} \cos \alpha = Gm\lambda R \frac{d + R \cos \theta}{(R^2 + d^2 + 2Rd \cos \theta)^{3/2}} d\theta$$

e de maneira equivalente encontramos que

$$dF_y = G \frac{m(\lambda R d\theta)}{r^2} \sin \alpha = Gm\lambda R \frac{\sin \theta}{(R^2 + d^2 + 2Rd \cos \theta)^{3/2}} d\theta$$

Integrando essas equações, encontramos:

$$F_x = G \frac{mM}{\theta_0} \int_{-\frac{\theta_0}{2}}^{+\frac{\theta_0}{2}} \frac{d + R \cos \theta}{(R^2 + d^2 + 2Rd \cos \theta)^{3/2}} d\theta$$

$$F_y = G \frac{mM}{\theta_0} \int_{-\frac{\theta_0}{2}}^{+\frac{\theta_0}{2}} \frac{\sin \theta}{(R^2 + d^2 + 2Rd \cos \theta)^{3/2}} d\theta$$

A integral que define F_y tem solução simples, fazendo-se as substituições:

$$\left\{ \begin{array}{l} u = R^2 + d^2 + 2Rd \cos \theta \\ du = -2Rd \sin \theta d\theta \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} u_i = R^2 + d^2 + 2Rd \cos \left(\frac{\theta_0}{2} \right) \\ \therefore u_s = R^2 + d^2 + 2Rd \cos \left(\frac{\theta_0}{2} \right) \\ \sin \theta d\theta = -\frac{du}{2Rd} \end{array}$$

$$F_y = -G \frac{mM}{\theta_0} \frac{1}{2Rd} \int_{u_i}^{u_s} \frac{du}{u^{3/2}}$$

como o limite inferior u_i é igual ao limite superior u_s essa integral é nula. e desse modo é nula a componente y da força de interação. esse resultado já poderia ser antecipado se tivéssemos considerado que cada elemento de massa acima do eixo x produz uma contribuição para F_y que será anulada por um elemento simétrico a ele abaixo do eixo x .

Já a equação que define F_x não tem solução exata nas condições que foi proposta.

$$F_x = G \frac{mM}{\theta_0} \int_{-\frac{\theta_0}{2}}^{+\frac{\theta_0}{2}} \frac{d + R \cos \theta}{(R^2 + d^2 + 2Rd \cos \theta)^{3/2}} d\theta$$

Vamos considerar algumas situações típicas.

1. Inicialmente vamos analisar a situação em que a barra e a massa estão muito distantes uma da outra. Em outras palavras $d \gg R$ e a integral toma a forma:

$$F_x = G \frac{mM}{\theta_0} \frac{d}{d^3} \int_{-\frac{\theta_0}{2}}^{+\frac{\theta_0}{2}} d\theta = G \frac{mM}{\theta_0} \frac{1}{d^2} \theta_0 \quad \therefore F_x = G \frac{mM}{d^2}$$

e esse resultado nos diz que a barra e a massa quando estão muito distante se atraem como se fossem massas pontuais.

Em segundo lugar vamos analisar as diversas possibilidades que acontecem quando $d = 0$.

$$F_x = G \frac{mM}{\theta_0} \int_{-\frac{\theta_0}{2}}^{+\frac{\theta_0}{2}} \frac{R \cos \theta}{(R^2)^{3/2}} d\theta = G \frac{mM}{\theta_0 R^2} \int_{-\frac{\theta_0}{2}}^{+\frac{\theta_0}{2}} \cos \theta d\theta = 2G \frac{mM}{\theta_0 R^2} \sin\left(\frac{\theta_0}{2}\right)$$

Se escolhermos $\theta_0 = \pi$, como no caso proposto neste problema:

$$F_x = \frac{2}{\pi} \frac{GmM}{R^2}$$

- b) Qual seria a força gravitacional sobre m se a barra tivesse a forma de um círculo completo?

Usando o resultado do item anterior é fácil perceber que quando $\theta_0 = 2\pi$ a força F_x é nula.

Capítulo 14 - Halliday, Resnick e Walker - 6ª. edição

- | | |
|----|--|
| 17 | A maior velocidade de rotação possível para um planeta é aquela em que a força gravitacional, exercida sobre a matéria em seu equador, é exatamente igual à força centrípeta necessária para manter essa matéria em rotação. |
|----|--|

- 0) Porquê?

Podemos considerar um modelo para esse objeto como sendo composto de matéria fria e sólida como a Lua, Terra e etc. Mas por outro lado podemos considerando que o objeto estelar é composto de matéria não sólida, como as estrelas. O que mantém esse objeto coeso? É basicamente a interação gravitacional ou entra em questão outro tipo de interação entre a matéria.

Na situação mais simples, existe apenas a interação gravitacional. Desse modo, se a velocidade de revolução do objeto for maior que aquela possível de mantê-lo coeso através da atração gravitacional ele simplesmente irá perdendo matéria que será ejetada pois ele não consegue mantê-la coesa.

- a) Mostre que o período de rotação mínimo, correspondente a tais condições, é dado por:

$$T = \sqrt{\frac{3\pi}{G\rho}}$$

onde ρ é a densidade do planeta que supomos ser homogêneo.

Vamos considerar a interação entre uma pequena massa m que está na superfície da Terra com toda a massa da Terra:

$$F = G \frac{mM_T}{R_T} = m \frac{v^2}{R_T}$$

$$G \frac{M_T}{R_T} = v^2 = \left(\frac{2\pi R_T}{T} \right)^2 \quad \therefore \quad T^2 = \frac{4\pi^2}{GM_T} R_T^3$$

ou ainda:

$$T^2 = \frac{3\pi}{GM_T} \left(\frac{4}{3} \pi R_T^3 \right) = \frac{3\pi}{G\rho} \quad \therefore \quad T = \sqrt{\frac{3\pi}{G\rho}}$$

- b) Calcule o período de oscilação, considerando uma densidade igual a $3g/cm^3$, que é típica de muitos planetas, satélites e asteróides. Nunca foi encontrado um objeto astronômico com período de rotação menor que o determinado pela análise feita neste problema.

$$\rho = 3g/cm^3 = 3 \times 10^3 kg/m^3$$

$$G = 6,67 \times 10^{-11} m^3/kg.s^2$$

Depois dos cálculos, encontramos que:

$$T = 6,86 \times 10^3 s = 114,33 min = 1,90 h$$

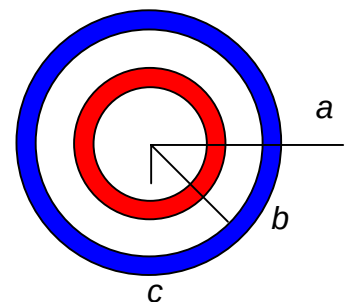
Capítulo 14 - Halliday, Resnick e Walker - 6ª. edição

- 22 Duas cascas concêntricas de densidade uniforme, têm massa M_1 (interna) e M_2 (externa) e estão distribuídas como mostra a figura ao lado. Calcule a força gravitacional sobre uma partícula de massa m quando ela estiver em:

- a) $r = a$

O ponto a é externo às duas cascas esféricas e portanto a massa m sente o efeito da presença das duas cascas. Elas se comportam como se toda a massa de cada uma delas estivesse no seu centro geométrico. Desse modo a força que as cascas exercem tem a forma:

$$F_A = F_1 + F_2 = -G \frac{M_1 m}{a^2} - G \frac{M_2 m}{a^2} = -G \frac{(M_1 + M_2) m}{a^2}$$



- b) $r = b$

O ponto b é externo à casca esférica de massa M_1 e interno à casca esférica de massa M_2 , e desse modo a massa m não sentirá o efeito da presença da casca M_2 que a envolve. A força que a casca esférica de massa M_1 exerce é:

$$F_B = -G \frac{M_1 m}{b^2}$$

- c) $r = c$

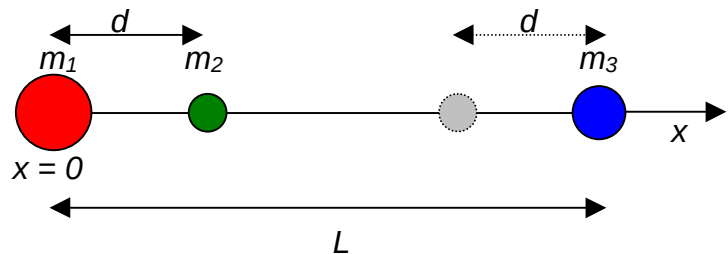
O ponto c é interno às duas cascas e portanto não existirá força gravitacional atuando na massa m .

- 31 As três esferas na figura à seguir, com massas $m_1 = 800g$, $m_2 = 100g$ e $m_3 = 200g$, estão com os seus centros alinhados, sendo $L = 12cm$ e $d = 4cm$. Você movimenta a esfera do meio até que a sua distância centro a centro de m_3 seja $d = 4cm$.

a) Qual o trabalho realizado sobre m_2 por você?

Vamos considerar a origem do eixo x no centro da esfera de massa m_1 . O trabalho é definido como:

$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{l}$$



Podemos levar a esfera m_2 da posição inicial A até a posição final B de diversas maneiras. O modo mais trivial será exercer sobre essa massa uma força tal que anule a força gravitacional resultante, e desse modo o movimento se dará como velocidade constante. A força resultante sobre a esfera m_2 , quando ela está em um ponto genérico x entre as duas outras esferas, tem a forma:

$$\vec{F}_R = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{32} = -\hat{i}G \frac{m_1 m_2}{x^2} + \hat{i}G \frac{m_3 m_2}{(L-x)^2}$$

onde na posição inicial A temos $x = d$ e na posição final B temos $x = L - d$. Como vamos exercer uma força que anule a força resultante, devemos ter:

$$\vec{F} = -\vec{F}_R = \hat{i}Gm_2 \left[\frac{m_1}{x^2} - \frac{m_3}{(L-x)^2} \right]$$

O vetor deslocamento é definido com $d\vec{l} = \hat{i} dx$, e desse modo:

$$W_{AB} = Gm_2 \int_d^{L-d} \left[\frac{m_1}{x^2} - \frac{m_3}{(L-x)^2} \right] dx$$

ou seja:

$$W_{AB} = Gm_1 m_2 \int_d^{L-d} \frac{dx}{x^2} - Gm_3 m_2 \int_d^{L-d} \frac{dx}{(L-x)^2}$$

Fazendo a substituição $u = L - x$ na segunda integral I_2 , encontramos que:

$$\begin{cases} u = L - x \\ du = -dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_A = d \rightarrow u_A = L - d \\ x_B = L - d \rightarrow u_B = d \end{cases}$$

ou seja:

$$I_2 = -Gm_3m_2 \int_d^{L-d} \frac{dx}{(L-x)^2} = +Gm_3m_2 \int_{L-d}^d \frac{du}{u^2} = -Gm_3m_2 \int_d^{L-d} \frac{du}{u^2}$$

Desse modo, temos então que W_{AB} toma a forma:

$$W_{AB} = G(m_1 - m_3)m_2 \int_d^{L-d} \frac{dx}{x^2} = -G(m_1 - m_3)m_2 \frac{1}{x} \Big|_d^{L-d} = -G(m_1 - m_3)m_2 \left[\frac{1}{L-d} - \frac{1}{d} \right]$$

$$W_{AB} = G(m_1 - m_3)m_2 \left[\frac{L-2d}{(L-d)d} \right] = 5,0 \times 10^{-11} \text{ Joules}$$

- b) Qual o trabalho realizado sobre m_2 pela força gravitacional resultante sobre m_2 devido às outras esferas?

Como já foi indicado, o trabalho da força resultante tem sinal contrário ao trabalho calculado anteriormente:

$$W_F = -W_{AB} = -5,0 \times 10^{-11} \text{ Joules}$$

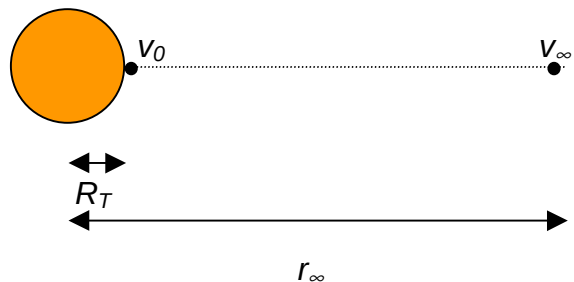
Capítulo 14 - Halliday, Resnick e Walker - 6ª. edição

33

Um foguete é acelerado até uma velocidade $v_0 = 2\sqrt{gR_T}$ próximo à superfície da Terra (aqui R_T é o raio da Terra) e, então, orientado para cima.

- a) Mostre que ele escapará da Terra.

Vamos inicialmente calcular a velocidade de escape de um objeto da superfície da Terra. Em outras palavras, qual deve ser a velocidade de um objeto na superfície da Terra para que ele consiga escapar da influência de nosso planeta?



A energia mecânica de um objeto de massa m que está sob a influência de uma força gravitacional é a soma de suas energias cinética e potencial gravitacional, ou seja:

$$E = K + U = \frac{1}{2}mv^2 - G \frac{Mm}{r^2}$$

onde M é a massa do segundo objeto e r é a distância entre eles. A órbita do objeto de massa m irá depender do valor de sua energia mecânica E . As possíveis órbitas são:

$$\begin{aligned} E < 0 &\Rightarrow \text{órbita fechada - elipse} \\ E = 0 &\Rightarrow \text{caso limite - parábola} \\ E > 0 &\Rightarrow \text{órbita aberta - hipérbole} \end{aligned}$$

Como queremos calcular a velocidade mínima para o objeto escapar (órbita aberta), vamos considerar a possibilidade $E = 0$, ou seja:

$$E = \frac{1}{2}mv_E^2 - G\frac{mM_T}{R_T} = 0 \Rightarrow v_E = \sqrt{\frac{2GM_T}{R_T}}$$

A forma velocidade de escape v_E pode ser colocada em outros termos se considerarmos que:

$$mg = G\frac{mM_T}{R_T^2} \Rightarrow g = \frac{GM_T}{R_T^2}$$

e finalmente temos que

$$v_E = \sqrt{2R_T g}$$

No nosso problema temos um objeto que é lançado com velocidade $v_0 = 2\sqrt{gR_T}$, e como $v_0 > v_E$ o objeto escapará.

- b)** Mostre que a sua velocidade, quando estiver muito distante da Terra, será

$$v_\infty = \sqrt{2gR_T}.$$

Com essa velocidade na superfície da Terra, a energia mecânica do objeto será:

$$E = \frac{1}{2}mv_0^2 - G\frac{mM_T}{R_T} = \frac{1}{2}m(4gR_T) - mgR_T \Rightarrow E = mgR_T$$

Num ponto muito longe da superfície da Terra $r \rightarrow \infty$ e a energia potencial gravitacional é nula. Desse modo a energia mecânica é puramente cinética e portanto:

$$E = \frac{1}{2}mv_\infty^2$$

onde v_∞ é a velocidade do objeto quando estiver muito distante. Igualando as energias nas duas situações, encontramos que:

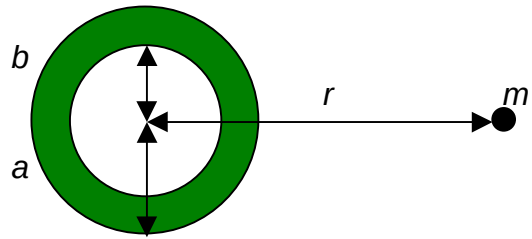
$$E = mgR_T = \frac{1}{2}mv_\infty^2 \Rightarrow v_\infty = \sqrt{2gR_T}$$

52 Uma esfera de massa M e raio a tem uma cavidade concêntrica de raio b , como é mostrado na figura à seguir.

- a)** Faça um esboço do gráfico da força gravitacional F exercida pela esfera sobre uma partícula de massa m a uma distância r do centro da esfera, em função de r entre os limites $0 < r < \infty$. Considere em particular os pontos $r = 0$, b , a e ∞ .

Quando a partícula está numa posição externa à esfera, ele sente a interação como se toda a massa de esfera estivesse em seu centro. Desse modo:

$$r \geq a \Rightarrow F(r) = -G \frac{mM}{r^2}$$



Quando a partícula estiver no interior da esfera num ponto a uma distância r do seu centro, apenas a massa da esfera localizada na região mais interna que r exercerá força gravitacional sobre essa partícula. A massa $M(r)$ da esfera que irá exercer essa força é calculada como:

$$M(r) = \rho V(r) = \rho \frac{4}{3} \pi (r^3 - b^3)$$

Mas a massa total da esfera pode ser escrita como:

$$M = \rho V = \rho \frac{4}{3} \pi (a^3 - b^3)$$

de onde encontramos que:

$$M(r) = \left[\frac{M}{a^3 - b^3} \right] (r^3 - b^3)$$

A força gravitacional terá a forma:

$$F(r) = -G \frac{M(r)m}{r^2} = -G \frac{m}{r^2} \left[\frac{M}{a^3 - b^3} \right] (r^3 - b^3)$$

e finalmente podemos concluir que:

$$b \leq r \leq a \Rightarrow F(r) = - \left(\frac{GmM}{a^3 - b^3} \right) \left(r - \frac{b^3}{r^2} \right)$$

Quando a partícula estiver no interior da cavidade será nula a força gravitacional exercida pela esfera, e portanto:

$$r \leq b \Rightarrow F(r) = 0$$

b) Esboce também o gráfico da energia potencial gravitacional $U(r)$ deste sistema

De modo equivalente ao caso da força podemos dizer que quando a partícula está numa posição externa à esfera, ele sente a interação como se toda a massa de esfera estivesse em seu centro. Desse modo:

$$r \geq a \Rightarrow V(r) = -G \frac{mM}{r}$$

Para calcular a energia potencial gravitacional no interior da esfera vamos usar os resultados dos cálculos da força. A definição variação de energia potencial é dada por:

$$U_i - U_f = - \int_i^f \vec{F} \cdot d\vec{l}$$

Vamos considerar a posição inicial um ponto distante de a do centro, localizado na superfície externa da esfera. O ponto final será interior à esfera:

$$U(r) = U(a) - \int_a^r \vec{F} \cdot d\vec{l}$$

Mas por outro lado:

$$\begin{cases} \vec{F} = -\hat{r} F(r) \\ d\vec{l} = -\hat{r} dl = \hat{r} dr \end{cases} \Rightarrow \vec{F} \cdot d\vec{l} = -F(r) dr$$

$$U(r) = U(a) + \int_a^r F(r) dr$$

$$U(r) = U(a) - \int_a^r \left(\frac{GmM}{a^3 - b^3} \right) \left(r - \frac{b^3}{r^2} \right) dr$$

$$U(r) = U(a) - \frac{GmM}{a^3 - b^3} \left\{ \frac{r^2}{2} \Big|_a^r + b^3 \frac{1}{r} \Big|_a^r \right\}$$

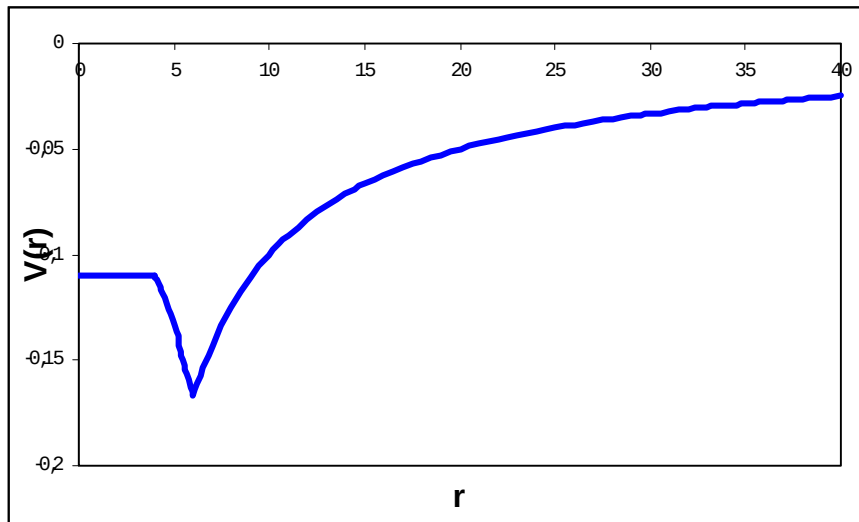
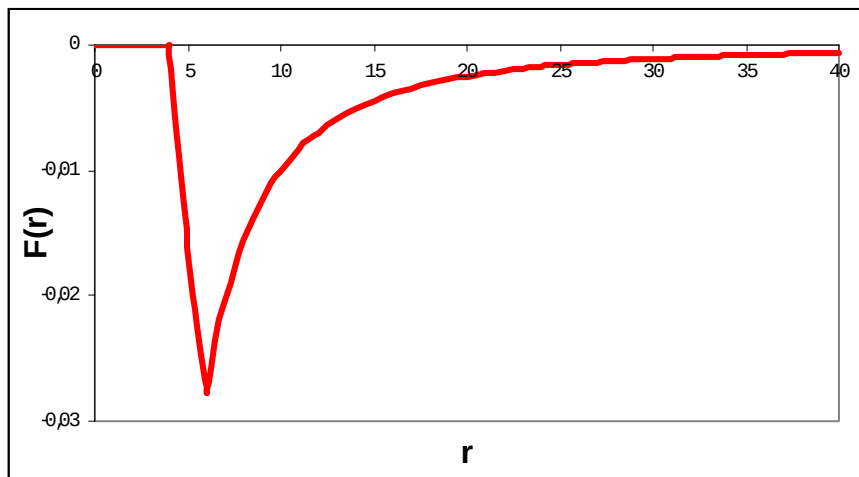
$$b \leq r \leq a \Rightarrow U(r) = -G \frac{mM}{a} - \frac{GmM}{a^3 - b^3} \left\{ \frac{r^2 - a^2}{2} + b^3 \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{a} \right) \right\}$$

e para $r \leq b$, a energia potencial assume um valor constante em toda essa região, e desse modo, esse valor constante será aquele do limite dessa região.

Assim

$$0 \leq r \leq b \Rightarrow U(r) = -G \frac{mM}{a} - \frac{GmM}{a^3 - b^3} \left\{ \frac{b^2 - a^2}{2} + b^3 \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a} \right) \right\}$$

Vamos usar nos gráficos os valores $a = 6m$ e $b = 4m$.

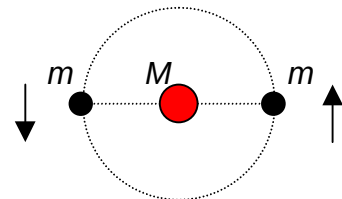


Capítulo 14 - Halliday, Resnick e Walker - 6ª. edição

- 54 Um sistema particular de três estrelas é formado por duas estrelas, cada uma de massa m , em órbita ao redor de uma estrela central de massa M , ocupando a mesma órbita circular de raio r . As duas estrelas estão, sempre, uma em cada extremo de um diâmetro da órbita. Deduza uma expressão para o período orbital das estrelas menores.

Cada uma das massas sente a interação das outras duas. Cada uma das massas menores sente a força dada por:

$$F = G \frac{mM}{r^2} + G \frac{m^2}{(2r)^2} = G \frac{m}{r^2} \left(M + \frac{m}{4} \right)$$



Mas a força resultante sobre cada uma das massas menores, pode ser colocada como a força centrípeta que age sobre ela, e desse modo, temos:

$$F = m \frac{v^2}{r}$$

Igualando as duas últimas equações encontramos que:

$$v^2 = \frac{G}{r} \left(M + \frac{m}{4} \right) = \left(\frac{2\pi r}{T} \right)^2 \Rightarrow T^2 = \left\{ \frac{4\pi}{G \left(M + \frac{m}{4} \right)} \right\} r^3$$

ou seja:

$$T = \sqrt{\frac{4\pi r^3}{G \left(M + \frac{m}{4} \right)}}$$

Notas de Aula de Física

15. FLUIDOS	2
DENSIDADE	2
PRESSÃO	2
FLUIDO EM REPOUSO	3
O PRINCÍPIO DE PASCAL	4
O PRINCÍPIO DE ARQUIMEDES	4
FLUIDOS IDEAIS EM MOVIMENTO	4
LINHAS DE CORRENTE E A EQUAÇÃO DA CONTINUIDADE	5
A EQUAÇÃO DE BERNOULLI	6
O MEDIDOR DE VENTURI	9
SOLUÇÃO DE ALGUNS PROBLEMAS	11
01	11
05	11
07	12
11	14
12	15
15	16
19	17
22	19
26	19
27	20
29	21
31	22
36	22
47	23
48	24
“49”	25
49	26
50	27
53	29
57	30
68	31
“73”	32

15. Fluidos

Fluidos compreendem líquidos e gases. Os líquidos escoam sob a ação da gravidade até preencherem as regiões mais baixas possíveis dos vasos que os contém. Os gases se expandem até ocuparem todo o volume do vaso, qualquer que seja a sua forma.

As moléculas em um gás não têm restrição de movimento dentro do recipiente que o contém, e podem se deslocar através de toda essa região do espaço.

Já o líquido está restrito a se mover abaixo da sua superfície. Grande parte de suas moléculas não têm energia suficiente para vencer essa barreira imposta pela superfície, daí a contenção entre a sua superfície e as paredes do recipiente.

Na Mecânica dos Fluidos estudamos o movimento do conjunto de partículas e não o de cada partícula, como na Mecânica Newtoniana.

Densidade

Define-se densidade ρ de um material como a relação entre a sua massa e o seu volume. De maneira formal, analisamos apenas uma pequena porção do material de massa Δm e volume ΔV e definimos a sua densidade como:

$$\rho = \frac{\Delta m}{\Delta V}$$

e se este material tiver uma distribuição uniforme de massa, a sua densidade será a mesma em todas as suas partes. Nesse caso teremos $\rho = m/V$.

Pressão

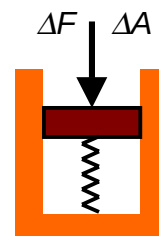
A pressão mede a relação entre a força aplicada a uma superfície e o tamanho da superfície considerada.

Seja ΔF a força que está sendo aplicada em um êmbolo de superfície ΔA . A pressão p que esta força está exercendo no êmbolo é definida como:

$$p = \frac{\Delta F}{\Delta A}$$

À rigor, a pressão é definida para o limite desta razão, no limite quando a área tender à zero. Ou seja:

$$p = \frac{dF}{dA} \quad \Rightarrow \quad dF = p \, dA$$



Fluido em repouso

Para deduzir a relação entre pressão, densidade e profundidade, analisemos um fluido de densidade ρ em repouso num dado recipiente, como mostrado na figura à seguir. Vamos considerar um cilindro imaginário desenhado nesse fluido. Esse cilindro tem superfícies A paralelas à superfície do fluido e uma altura dy ao longo da profundidade do fluido. A força líquida dF_R que o fluido exerce neste cilindro é dada por:

$$p A - (p + dp) A = dF_R$$

onde pA é a força que atua na superfície inferior e $(p + dp) A$ é a força que atua na superfície superior do cilindro imaginário. Como o cilindro está em repouso, essa força deve ser igual ao peso do cilindro. Desse modo:

$$- dp A = dF_R = g dm$$

Mas

$$dm = \rho dV = \rho A dy$$

ou seja:

$$dp = - \rho g dy$$

logo

$$\int_{p_1}^{p_2} dp = - \int_{y_1}^{y_2} \rho g dy$$

Quando a densidade puder ser considerada uniforme, ou seja quando a densidade não variar com a altura, a integração terá a forma:

$$\int_{p_1}^{p_2} dp = - \rho g \int_{y_1}^{y_2} dy$$

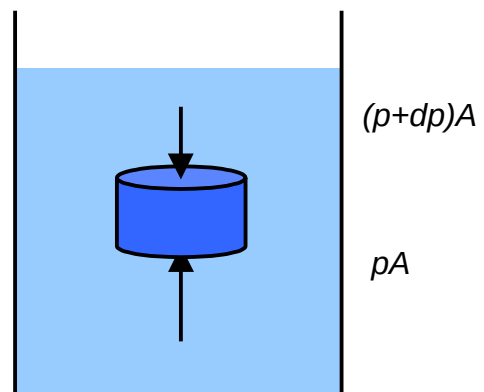
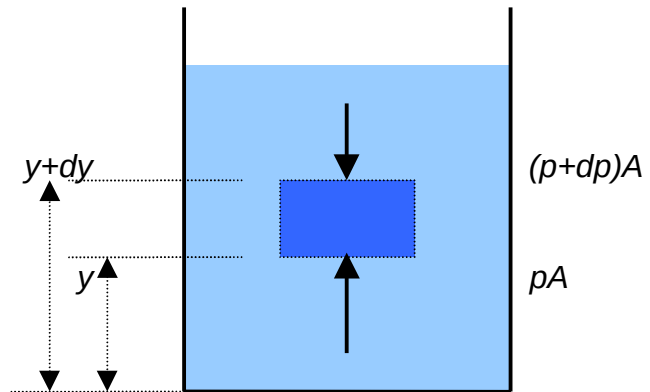
ou seja:

$$p_2 - p_1 = - \rho g (y_2 - y_1)$$

Considerando que a pressão aumenta com a profundidade, vamos definir a profundidade como h , a pressão nesta profundidade como p e a pressão superficial como p_0 , e desse modo:

$$p = p_0 + \rho g h$$

Assim encontramos que a pressão varia linearmente com a profundidade h .



O Princípio de Pascal

A pressão aplicada a um fluido contido em um recipiente é transmitida integralmente a todos os pontos do fluido e às paredes do recipiente que o contém.

Se a pressão atmosférica for chamada de p_0 , a pressão em uma profundidade h deste fluido será dada por:

$$p = p_0 + \rho g h$$

Caso a pressão atmosférica varie, e num certo dia ela passe para o valor p_1 onde $p_1 < p_0$, a pressão no interior do lago também irá variar como consequência desta mudança, e teremos:

$$p = p_1 + \rho g h$$

O Princípio de Arquimedes

Todo corpo total ou parcialmente imerso em um fluido, recebe deste um empuxo vertical dirigido para cima, de módulo igual ao peso do fluido deslocado pelo corpo.

Esse Princípio resume uma infinidade aspectos da influência de um líquido sobre um corpo sólido que nele está imerso (ou parcialmente imerso).

Porque um pedaço de madeira flutua e uma pedra afunda? Porque um navio flutua, mesmo sendo feito de ferro? Porque um submarino consegue ter controle sobre a escolha da profundidade em que se encontra? Questões deste tipo são respondidas com a aplicação do princípio de Arquimedes.

Fluidos ideais em movimento

O movimento de fluidos reais é complexo e ainda não é inteiramente compreendido. Por exemplo, não existe uma compreensão clara sobre o fenômeno das turbulências.

Vamos restringir a nossa análise aos fluidos ideais. São aqueles que apresentam um comportamento bem mais simples, e principalmente, sabemos analisar os seu movimento. Um fluido ideal tem pelo menos as seguintes características:

Escoamento estacionário

A velocidade do fluido em qualquer ponto fixo não muda com o tempo. Neste tipo de escoamento a velocidade de um elemento de volume do fluido pode variar enquanto ele muda de posição, mas a velocidade do fluido em cada ponto do espaço permanece constante ao longo do tempo.

Escoamento incompressível

A sua densidade é constante, independente das circunstâncias, como o aumento de pressão ou temperatura.

Escoamento não viscoso

Grosseiramente, a viscosidade de um fluido é uma medida da sua resistência ao escoamento.

Escoamento irrotacional

Em um escoamento não - rotacional, um corpo não girará em torno d um eixo que passe por seu centro de massa.

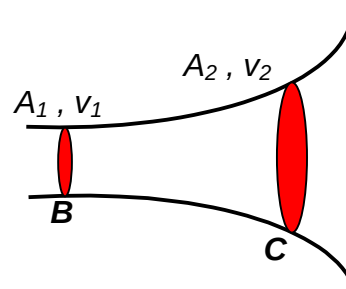
Vamos estudar o escoamento estacionário, incompressível, irrotacional e não - viscoso.

Linhas de corrente e a Equação da Continuidade

Uma linha de corrente é a trajetória de um elemento de volume do fluido. Enquanto esse elemento de volume se move, ele pode variar a sua velocidade em módulo direção e sentido. O vetor velocidade será sempre tangente á linha de corrente. Uma consequência desta definição é que as linhas de corrente nunca se cruzam, pois caso o fizessem o elemento de volume poderia ter uma das duas velocidades com diferentes direções, simultaneamente.

Em um escoamento podemos isolar tubos de corrente, cujos limites são definidos por linhas de corrente. Tal tubo funciona como um cano, porque nenhuma partícula escapa através de suas paredes - pois justamente essas paredes definem as linhas de corrente.

Consideremos o tubo de corrente na figura ao lado, onde o fluido se move da esquerda para a direita. O tubo tem seção transversal A_1 e A_2 nas posições indicadas e velocidades respectivas v_1 e v_2 .



Observemos durante um intervalo de tempo Δt o fluido que cruza a área A_1 . A massa de fluido que atravessa essa superfície neste intervalo é dado por

$$\Delta m_1 = \rho_1 \Delta V_1 = \rho_1 A_1 (v_1 \Delta t)$$

Como não existe fonte ou sorvedouro de massa entre A_1 e A_2 , essa mesma massa de fluido atravessará a superfície A_2 e será dado, nesse caso, por:

$$\Delta m_2 = \rho_2 \Delta V_2 = \rho_2 A_2 (v_2 \Delta t)$$

onde concluímos que:

$$\rho_1 A_1 v_1 = \rho_2 A_2 v_2$$

ou seja:

$$\rho A v = \text{constante}$$

ao longo de um tubo de corrente. Algumas vezes a equação anterior é chamada de equação de continuidade para escoamento de fluidos.

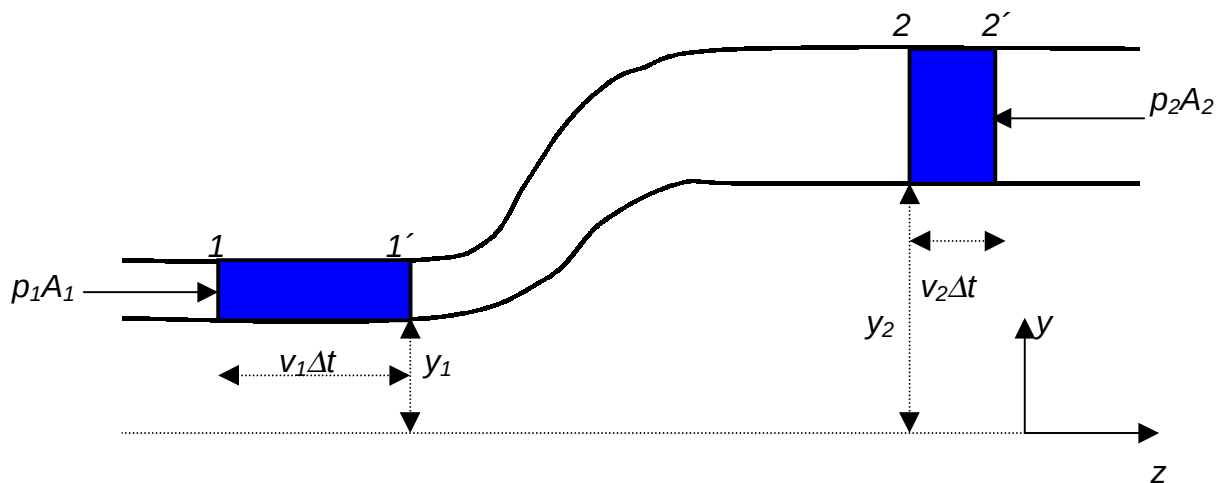
Como as linhas de corrente não se cruzam, elas se aproximam uma das outras à medida que o tubo de corrente diminui a sua seção transversal. Desse modo o adensamento de linhas de corrente significa o aumento da velocidade de escoamento.

A equação de Bernoulli

A equação de Bernoulli relaciona variação de pressão, variação de altura e variação de velocidade em um fluido incompressível num escoamento estacionário. Ela é obtida como uma consequência da conservação da energia.

Considere um tubo de largura variável por onde entra um fluido à esquerda e sai à direita, como mostra a figura à seguir. À esquerda, o tubo tem seção transversal de área A_1 e à direita ele tem uma seção transversal de área A_2 . À esquerda, parte inferior do tubo está a uma certa altura y_1 de um certo referencial e a parte superior do tubo à direita está a uma altura y_2 desse mesmo referencial.

Vamos considerar o movimento deste fluido que num dado instante ocupa o volume entre os planos 1 e 2 na figura à seguir, e depois de um intervalo de tempo Δt ele passa a ocupar o volume entre os planos 1' e 2'.



O volume entre os planos 1 e 1' é ΔV_1 e o volume entre os planos 2 e 2' é ΔV_2 , onde temos que:

$$\Delta V_1 = (v_1 \Delta t) \cdot A_1$$

$$\Delta V_2 = (v_2 \Delta t) \cdot A_2$$

Considere um intervalo de tempo Δt pequeno, tal que através da superfície A_1 passe uma massa Δm_1 e através da superfície A_2 passa uma massa Δm_2 . Essas massas podem ser escritas como:

$$\Delta m_1 = \rho_1 \Delta V_1 = \rho_1 [(v_1 \Delta t) A_1]$$

e de modo semelhante:

$$\Delta m_2 = \rho_2 \Delta V_2 = \rho_2 [(v_2 \Delta t) A_2]$$

Como a massa que entra pela esquerda deve ser igual à massa que sai à direita, temos que

$$\Delta m_1 = \Delta m_2$$

e como o fluido é considerado incompressível, a densidade à esquerda ρ_1 é igual à densidade ρ_2 à direita, logo

$$\rho_1 = \rho_2$$

Desse modo:

$$\Delta m = \Delta m_1 = \Delta m_2$$

$$\rho = \rho_1 = \rho_2$$

ou seja:

$$v_1 A_1 = v_2 A_2$$

O trabalho W realizado pelas forças externas sobre o elemento de massa Δm é igual à variação da energia cinética dessa massa quando vai da esquerda para a direita.

Uma das forças externas a esse elemento de massa é a gravidade e a outra força é uma consequência da diferença de pressão externa aplicada nas superfícies A_1 e A_2 .

$$W = W_G + W_P = \Delta K$$

W_G = trabalho realizado pela força da gravidade.

W_P = trabalho realizado como uma consequência da diferença de pressão externa.

$$W_G = \int_1^2 \vec{F}_G \cdot d\vec{l}$$

$$W_P = \int_1^2 \vec{F}_P \cdot d\vec{l}$$

$$\vec{F}_G \cdot d\vec{l} = (-\hat{j} \Delta m g) \cdot (\hat{j} dy) = -\Delta m g dy$$

$$W_G = \int_1^2 (-\Delta m g dy) = -\Delta m g y \Big|_{y_1}^{y_2} = -\Delta m g (y_2 - y_1)$$

Num intervalo de tempo Δt , um elemento de massa Δm deixou a parte inferior do tubo e passou para a parte superior. Logo, o sistema armazenou energia potencial gravitacional

$$W_G = -\Delta m g (y_2 - y_1)$$

Por outro lado:

$$\vec{F}_P \cdot d\vec{l} = \left[(\hat{k} p_1 A_1) + (-\hat{k} p_2 A_2) \right] \cdot (\hat{k} dz) = (p_1 A_1) dz - (p_2 A_2) dz$$

$$W_P = p_1 A_1 \int_1^2 dz - p_2 A_2 \int_1^2 dz = p_1 A_1 \Delta z_1 - p_2 A_2 \Delta z_2 = p_1 A_1 (v_1 \Delta t) - p_2 A_2 (v_2 \Delta t)$$

Mas

$$A(v \Delta t) = \Delta V = \frac{\Delta m}{\rho}$$

logo

$$W_p = \frac{\Delta m}{\rho} (p_1 - p_2)$$

A variação da energia cinética é dada por:

$$\Delta K = \frac{1}{2} \Delta m v_2^2 - \frac{1}{2} \Delta m v_1^2$$

Podemos então dizer que:

$$\frac{\Delta m}{\rho} (p_1 - p_2) - \Delta m g (y_2 - y_1) = \frac{1}{2} \Delta m v_2^2 - \frac{1}{2} \Delta m v_1^2$$

ou ainda:

$$\frac{p_1 - p_2}{\rho} - g (y_2 - y_1) = \frac{1}{2} (v_2^2 - v_1^2)$$

ou seja:

$$p_1 + \rho g y_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = p_2 + \rho g y_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2$$

de onde podemos concluir que:

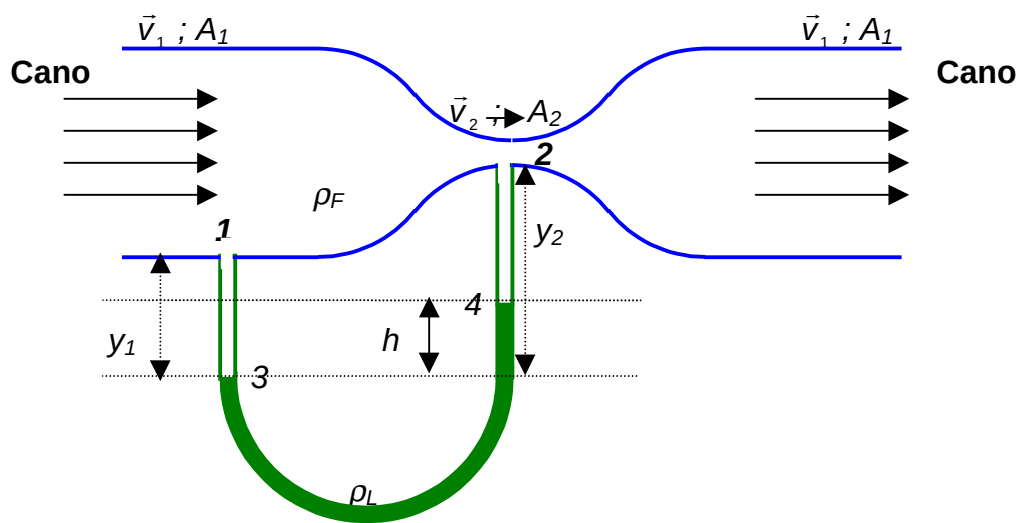
$$p + \rho g y + \frac{1}{2} \rho v^2 = \text{constante}$$

que é a equação de Bernoulli.

O medidor de Venturi

O medidor de Venturi é um aparelho usado para medir a velocidade de escoamento de um fluido de densidade ρ_F em um cano. O medidor é conectado entre duas seções do cano como mostrado na figura à seguir.

A área A da seção transversal da entrada e da saída são iguais a área da seção transversal do cano. Entre a entrada e a saída, o fluido passa por uma região estreita de área a . Um manômetro que contém um líquido de densidade ρ_L conecta a parte mais larga à parte mais estreita, onde a velocidade do fluido tem um valor V , que é maior que a velocidade v na entrada do medidor.



Vamos usar a equação de Bernoulli para analisar a variação das grandezas envolvidas.

$$p + \rho g y + \frac{1}{2} \rho v^2 = \text{constante}$$

Aplicando essa equação para esse cano, nas regiões 1 e 2, encontramos que:

$$p_1 + \frac{1}{2} \rho_F v_1^2 + \rho_F g (y_1 - h) = p_2 + \frac{1}{2} \rho_F v_2^2 + \rho_F g (y_2 - h)$$

onde estamos tomando como referencial da energia potencial gravitacional o ponto mais alto do líquido dentro do manômetro, e desse modo podemos usar a Equação de Bernoulli apenas para o fluido do cano. Esta equação pode tomar a forma:

$$p_1 + \frac{1}{2} \rho_F v_1^2 + \rho_F g y_1 = p_2 + \frac{1}{2} \rho_F v_2^2 + \rho_F g y_2$$

$$(p_1 + \rho_F g y_1) - (p_2 + \rho_F g y_2) = \frac{1}{2} \rho_F v_2^2 - \frac{1}{2} \rho_F v_1^2$$

No interior do manômetro, as pressões se equacionam do seguinte modo:

$$\begin{cases} p_3 = p_1 + \rho_F g y_1 \\ p_4 = p_2 + \rho_F g (y_2 - h) \\ p_3 = p_4 + \rho_L g h \end{cases}$$

Usando as duas primeiras equações na última, encontramos que:

$$(p_1 + \rho_F g y_1) = [p_2 + \rho_F g (y_2 - h)] + \rho_L g h$$

ou seja:

$$(p_1 + \rho_F g y_1) - (p_2 + \rho_F g y_2) = \rho_L g h - \rho_F g h = (\rho_L - \rho_F) g h$$

Identificando esta equação com a aplicação da equação de Bernoulli, encontramos que:

$$\frac{1}{2} \rho_F v_2^2 - \frac{1}{2} \rho_F v_1^2 = (\rho_L - \rho_F) g h$$

ou seja:

$$v_2^2 - v_1^2 = \frac{2(\rho_L - \rho_F) g h}{\rho_F}$$

À partir da equação da continuidade, encontramos que:

$$\rho_L v_1 A_1 = \rho_L v_2 A_2$$

ou seja:

$$v_2 = v_1 \frac{A_1}{A_2}$$

e desse modo

$$v_2^2 - v_1^2 = v_1^2 \left(\frac{A_1^2 - A_2^2}{A_2^2} \right) = \frac{2(\rho_L - \rho_F) g h}{\rho_F}$$

e finalmente:

$$v_1 = \sqrt{\frac{2A_2^2 (\rho_L - \rho_F) g h}{(A_1^2 - A_2^2) \rho_F}}$$

e portanto podemos medir a velocidade v_1 do fluido ao entrar no cano.

Solução de alguns problemas

Capítulo 15 - Halliday, Resnick e Walker - 6ª. edição

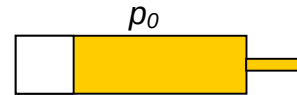
- 01 Encontre o aumento de pressão de um fluido em uma seringa quando uma enfermeira aplica uma força de $42N$ ao êmbolo da seringa, de raio $1,1cm$.

$$F = 42N$$

$$r = 1,1cm = 0,011m$$

$$\Delta p = \frac{F}{A} = \frac{F}{\pi r^2} = 110.487,7N/m^2$$

$$1N/m^2 = 1 \text{ Pascal}$$



$$1atm = 1,013 \times 10^5 Pa$$

logo

$$\Delta p = 1,08atm$$

Capítulo 15 - Halliday, Resnick e Walker - 6ª. edição

- 05 Um peixe controla a sua profundidade na água através do ajuste do conteúdo de ar de um osso poroso ou em um saco de ar para que a sua densidade fique igual à da água. Suponha que, com as bolsas de ar vazias, um peixe tenha a densidade de $1,08g/cm^3$. Se ele quiser reduzir a sua densidade à da água, que fração do volume do seu corpo deverá ser ocupada por ar dentro dos sacos? (Estes sacos são chamados bexigas natatórias.

$$\rho_I = 1,08g/cm^3$$

$$\rho_F = 1g/cm^3$$

A densidade do peixe varia de ρ_I até ρ_F :

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_I = \frac{M_P}{V_I} \\ \rho_F = \frac{M_P + M_{AR}}{V_F} \cong \frac{M_P}{V_F} \end{array} \right.$$

Na definição de ρ_F levamos em consideração que a massa de ar é muito menor que a massa do peixe.

A razão entre os volumes tem a forma:

$$\frac{V_F}{V_I} = \frac{\frac{M_P}{\rho_F}}{\frac{M_P}{\rho_I}} = \frac{\rho_I}{\rho_F}$$

Mas

$$V_F = V_I + V_{AR}$$

logo:

$$\frac{V_I + V_{AR}}{V_I} = \frac{V_F}{V_I} = \frac{\rho_I}{\rho_F} = 1 + \frac{V_{AR}}{V_I} \Rightarrow \frac{V_{AR}}{V_I} = \frac{\rho_I}{\rho_F} - 1$$

$$\frac{V_{AR}}{V_I} = 0,08$$

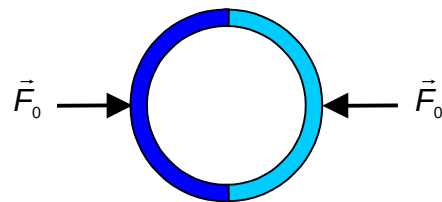
Capítulo 15 - Halliday, Resnick e Walker - 6ª. edição

07

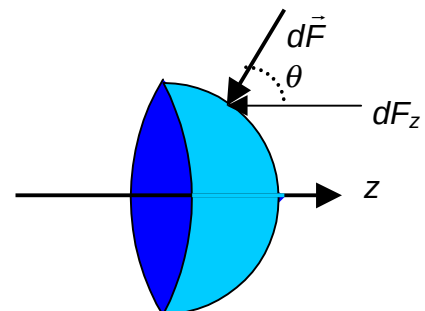
Em 1654, Otto von Guericke, burgomestre de Magdeburg e inventor da bomba de ar, deu uma demonstração diante da Dieta Imperial em que dois grupos de oito cavalos não foram capazes de separar dois hemisférios de latão unidos, dentro dos quais se fez vácuo.

- a) Pressupondo que os dois hemisférios tenham paredes finas, de forma que R , na figura à seguir, possa ser considerado o raio interno e externo, mostre que a força F necessária para separar os hemisférios é $F = \pi R^2 \Delta p$ onde Δp é a diferença entre as pressões interna e externa na esfera.

A atmosfera exerce uma pressão (e consequentemente uma força) em todos os pontos dos dois hemisférios, mas apenas a componente z dessa força "empurra" um hemisfério contra o outro. As componentes x e y dessa força são nulas.



Isso pode ser percebido se observarmos que para cada elemento de força $d\vec{F}$ existe atuando um outro elemento $d\vec{F}'$ simétrico em relação ao eixo z . As componentes x e y de $d\vec{F}'$ anularão as componentes equivalentes de $d\vec{F}$. No entanto, somar-se-ão as componentes z dessas forças elementares simétricas.

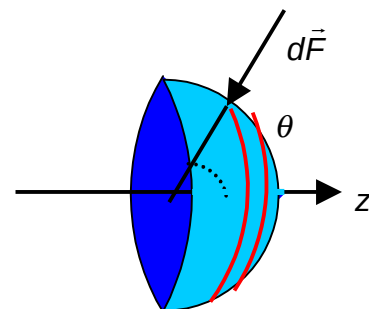


$d\vec{F}$ é um vetor radial, ou seja:

$$d\vec{F} = -\hat{r} dF$$

As suas componentes cartesianas são:

$$dF_x = -dF \sin\theta \cos\phi$$



$$dF_Y = -dF \sin\theta \sin\varphi$$

$$dF_Z = -dF \cos\theta$$

Considerando que:

$$dF = p_0 dA = p_0 (R^2 \sin\theta d\theta d\varphi)$$

teremos que:

$$dF_X = -p_0 R^2 (\sin^2\theta d\theta) (\cos\varphi d\varphi)$$

$$dF_Y = -p_0 R^2 (\sin^2\theta d\theta) (\sin\varphi d\varphi)$$

$$dF_Z = -p_0 R^2 (\sin\theta \cos\theta d\theta) (d\varphi)$$

Integrando, teremos:

$$F_X = \int dF_X = -p_0 R^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta d\theta \int_0^{2\pi} \cos\varphi d\varphi$$

$$F_Y = \int dF_Y = -p_0 R^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta d\theta \int_0^{2\pi} \sin\varphi d\varphi$$

$$F_Z = \int dF_Z = -p_0 R^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta \cos\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi$$

Mas por outro lado:

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_0^{2\pi} \cos\varphi d\varphi = \sin\varphi \Big|_0^{2\pi} = 0 \\ \int_0^{2\pi} \sin\varphi d\varphi = -\cos\varphi \Big|_0^{2\pi} = 1 - 1 = 0 \\ \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi \end{array} \right.$$

logo:

$$F_X = F_Y = 0$$

e

$$F_Z = 2\pi R^2 p_0 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta \cos\theta d\theta$$

Fazendo a substituição $u = \sin\theta$, encontramos que

$$F_Z = 2\pi R^2 p_0 \int_0^1 u du = 2\pi R^2 p_0 \frac{1}{2}$$

Como F_Z é a força resultante externa, vamos chamá-la de F_0 , ou seja:

$$F_0 = \pi R^2 p_0$$

A força líquida F é a diferença entre as forças internas e externas:

$$F = F_0 - F_1 = \pi R^2 (p_0 - p_1) = \pi R^2 \Delta p$$

- b) Fazendo $R = 30\text{cm}$ e a pressão interna igual a $0,10\text{atm}$, encontre a força que os cavalos teriam de exercer para separar os hemisférios.

$$R = 30\text{cm} = 0,30\text{m}$$

$$p_0 = 1\text{atm} = 1,013 \times 10^5 \text{ Pascal}$$

$$p_1 = 0,1\text{atm} = 1,013 \times 10^4 \text{ Pascal}$$

$$\Delta p = p_0 - p_1 = 0,9\text{atm} = 91.170\text{Pa}$$

$$F = 25.777,7 \text{ Newtons}$$

Capítulo 15 - Halliday, Resnick e Walker - 6ª. edição

11 Uma piscina tem as dimensões $24\text{m} \times 9\text{m} \times 2,5\text{m}$.

- a) Quando ela está cheia de água, qual é força (devido somente à água) sobre o fundo, nas extremidades e nos lados?

$$H = 2,5\text{m}$$

$$L = 9\text{m}$$

$$C = 24\text{m}$$

A pressão no fundo da piscina é dada por:

$$P = \rho g H$$

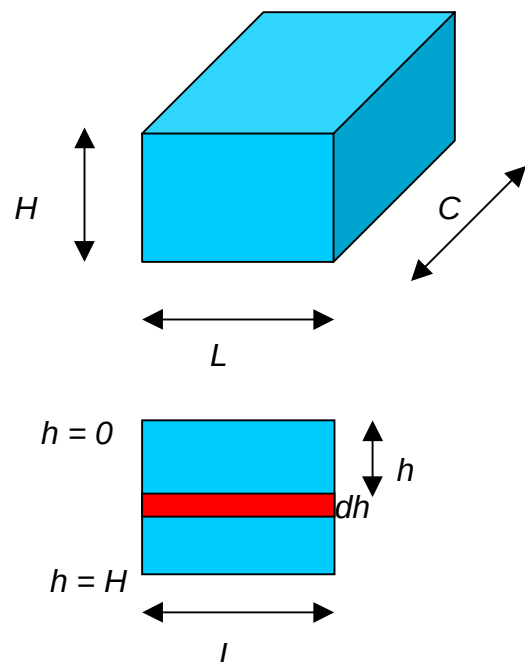
Logo, a força total no fundo será:

$$F = P A = (\rho g H) (L C)$$

$$F = \rho g V$$

$$F = (10^3 \text{ kg/m}^3)(10\text{m/s}^2)(2,5 \cdot 9 \cdot 24 \text{ m}^3)$$

$$F = 5,4 \times 10^6 \text{ N}$$



A pressão a uma profundidade genérica h é dada por:

$$P = \rho g h$$

A força lateral em uma superfície dA ao longo desta profundidade e associada a essa pressão tem a forma:

$$dF_L = P dA = P (L dh) = \rho g L h dh$$

e portanto, a força lateral é dada por:

$$F_L = \int_0^H \rho g L h dh = \frac{\rho g L H^2}{2}$$

$$F_L = 2,8 \times 10^5 \text{ N}$$

Como temos duas superfícies laterais iguais:

$$2 F_L = 5,6 \times 10^5 \text{ N}$$

A força ao longo do comprimento é dada por:

$$F_C = \int_0^H \rho g C h dh = \frac{\rho g C H^2}{2}$$

$$F_C = 7,4 \times 10^5 \text{ N}$$

Como temos duas superfícies laterais iguais:

$$2 F_C = 1,4 \times 10^6 \text{ N}$$

- b) Se você estiver preocupado com o fato das paredes e pisos de concreto se quebrarem, seria apropriado levar em conta a pressão atmosférica? Porque?

Sim, por causa do princípio de Pascal. A pressão que a atmosfera exerce na superfície se transmite para todos os pontos da água, inclusive os lados e o fundo.

Capítulo 15 - Halliday, Resnick e Walker - 6ª. edição

12

- a) Encontre o peso total da água em cima de um submarino nuclear, a uma profundidade de 200m , supondo que o seu casco (corte da seção transversal) tenha a área de 3000m^2 .

$$A = 3000\text{m}^2$$

$$h = 200\text{m}$$

$$\rho_s = 1,03\text{g/cm}^3 = \text{densidade da água do mar}$$

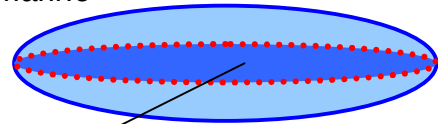
$$p = \rho_s g h$$

$$F = p A = \rho_s g h A$$

$$F = (1,03 \times 10^3 \text{kg/m}^3)(10\text{m/s}^2)(200\text{m})(3000\text{m}^2)$$

$$F = 6,16 \times 10^9 \text{ N}$$

Submarino



A = Seção transversal do submarino

- b) A que pressão da água um mergulhador estaria submetido a essa profundidade? Você acha que os ocupantes de um submarino danificado, a essa profundidade poderiam escapar sem equipamento especial? Considere a densidade da água do mar $1,03\text{g/cm}^3$.

$$p = p_0 + \rho_S g h$$

$$p = (1,01 \times 10^5 \text{ Pa}) + (1,03 \times 10^3 \text{ kg/m}^3)(10 \text{ m/s}^2)(200 \text{ m})$$

$$p = (1,01 \times 10^5 \text{ Pa}) + (2,06 \times 10^6 \text{ Pa})$$

$$p = 2,1 \times 10^6 \text{ N} = 2,08 \text{ atm}$$

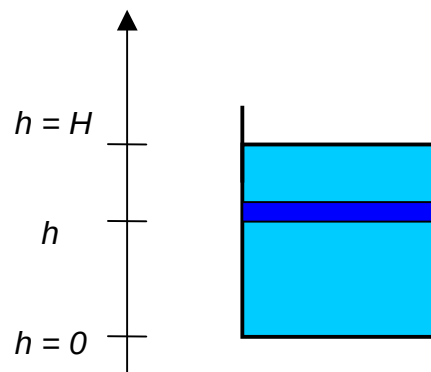
Capítulo 15 - Halliday, Resnick e Walker - 6ª. edição

- 15 Dois vasos cilíndricos idênticos, com suas bases ao mesmo nível contém um líquido de densidade ρ . A área da base é A para ambos, mas em um dos vasos a altura do líquido é h_1 e no outro é h_2 . Encontre o trabalho realizado pela força gravitacional ao igualar os níveis, quando os dois vasos são conectados.

Seja $U(H)$ a energia potencial gravitacional armazenada num recipiente de área transversal A e altura H .

A faixa de líquido a uma altura h , com uma espessura dh , tem uma energia potencial gravitacional dada por:

$$dU = dm g h = (\rho dV) g h = (\rho A dh) g h$$



ou seja:

$$dU = \rho A g h dh$$

e portanto:

$$U(H) = \rho A g \int_0^H h dh = \rho g A \frac{H^2}{2}$$

Considerando a situação inicial, quando temos dois vasos que se comunicam, a energia potencial gravitacional inicial do conjunto será:

$$U_i = U(h_1) + U(h_2) = \rho A g \frac{h_1^2}{2} + \rho A g \frac{h_2^2}{2}$$

Ou seja:

$$U_i = \frac{\rho A g}{2} (h_1^2 + h_2^2)$$

Depois que os vasos são conectados, os seus níveis alcançam uma altura h de equilíbrio. Como não existem perdas, a soma dos volumes dos líquidos dos dois tanques permanece constante, logo:

$$h_1 A + h_2 A = 2 h A$$

ou seja:

$$h = \frac{h_1 + h_2}{2}$$

A energia potencial gravitacional final do conjunto será:

$$U_F = U(h) + U(h) = 2 U(h)$$

ou seja:

$$U_F = 2 \left[\frac{\rho A g h^2}{2} \right] = 2 \left[\frac{\rho A g}{2} \left(\frac{h_1 + h_2}{2} \right)^2 \right] = \rho A g \left(\frac{h_1 + h_2}{2} \right)^2$$

$$\Delta U = U_F - U_i = \frac{\rho A g}{4} [(h_1^2 + h_2^2 + 2h_1 h_2) - 2(h_1^2 + h_2^2)]$$

$$\Delta U = \frac{\rho A g}{4} \{-h_1^2 - h_2^2 + 2h_1 h_2\}$$

$$\Delta U = -\frac{\rho A g}{4} (h_2 - h_1)^2$$

Mas

$$W = -\Delta U = \frac{\rho A g}{4} (h_2 - h_1)^2$$

Capítulo 15 - Halliday, Resnick e Walker - 6ª. edição

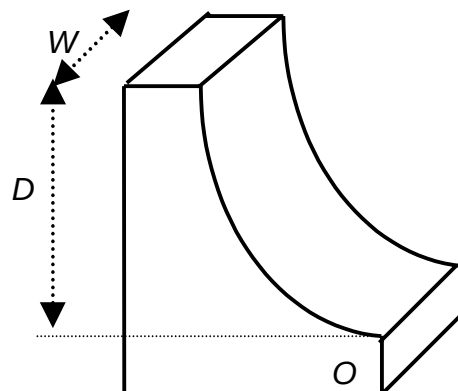
19 A água se encontra a uma profundidade D abaixo da face vertical de um dique, com ilustra a figura à seguir.

- a) Encontre a força horizontal resultante exercida no dique pela pressão manométrica da água.

Vamos considerar a força elementar dA exerci sobre o dique por uma lâmina de líquido represado. Essa lâmina está a uma profundidade h e nessa profundidade existe uma pressão p exercida pelo líquido . Desse modo:

$$dF = p dA = p W dh$$

onde W é a largura do dique e dh é a espessura da lâmina.



Mas

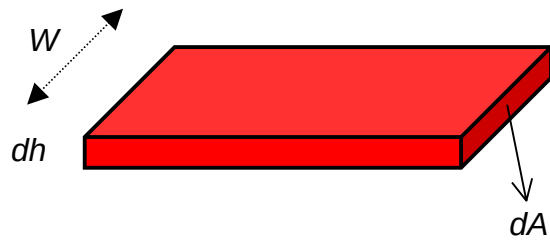
$$p = \rho g h$$

logo

$$dF = \rho g W h dh$$

e a força resultante terá a forma:

$$F = \rho g W \int_0^D h dh = \frac{\rho g W D^2}{2}$$



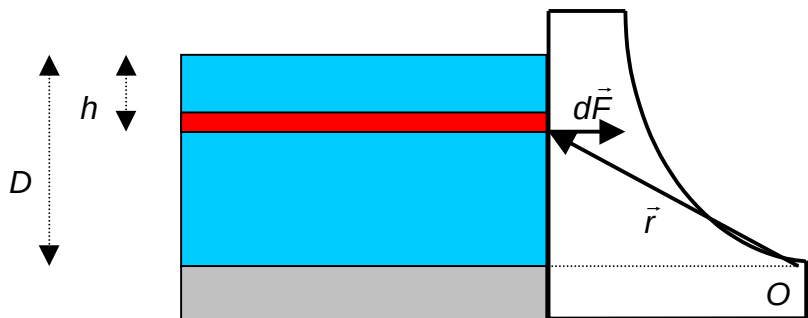
- b) Encontre o torque resultante devido à pressão manométrica da água, em relação ao ponto O .

O torque que a lâmina exerce no dique, em relação ao ponto O é dado por:

$$d\vec{\tau} = \vec{r} \times d\vec{F}$$

ou seja:

$$d\tau = (D - h) dF$$



ou ainda:

$$d\tau = (D - h) \{ \rho g W h dh \} = \rho g W (D - h) dh$$

e integrando, temos

$$\tau = \rho g W \int_0^D (D - h) h dh = \rho g W \left\{ D \int_0^D h dh - \int_0^D h^2 dh \right\}$$

$$\tau = \rho g W \left\{ D \frac{D^2}{2} - \frac{D^3}{3} \right\} = \frac{\rho g W D^3}{6}$$

- c) Encontre o braço de alavanca, em relação ao ponto O , da força horizontal resultante sobre o dique.

$$\tau = F \bar{L} \Rightarrow \frac{\rho g W D^3}{6} = \left(\rho g W \frac{D^2}{2} \right) \bar{L}$$

ou seja:

$$\bar{L} = \frac{D}{3}$$

onde $\bar{L}$ é medido à partir do fundo do dique.

Capítulo 15 - Halliday, Resnick e Walker - 6ª. edição

- 22 Um pistom de área menor a é usado em uma prensa hidráulica para exercer uma pequena força f num líquido confinado. Um tubo o conecta com um outro pistom maior de área A .

a) Que força F o pistom maior sustentará?

Usando o princípio de Pascal, a força aplicada f produz no líquido uma variação de pressão dada por:

$$\Delta p = \frac{f}{a} = \frac{F}{A} \Rightarrow F = \left(\frac{A}{a}\right)f$$

Se o pistom da menor se mover de d , o pistom maior mover-se-á de D , mas os volumes associados a esses movimentos serão os mesmos. Ou seja:

$$V = ad = AD \Rightarrow D = \left(\frac{a}{A}\right)d$$

O trabalho W_f executado pela força f será:

$$W_f = fd = \left(F \frac{a}{A}\right) \left(D \frac{A}{a}\right) = FD = W_F$$

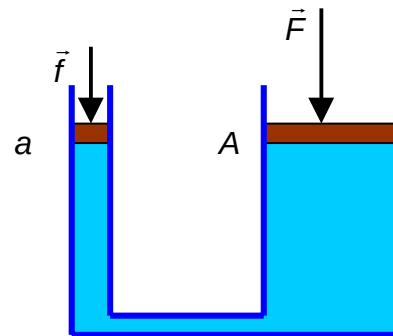
e portanto as duas forças fazem o mesmo trabalho.

- b) Se o pistom pequeno tem um diâmetro de $l = 3,8\text{cm}$ e o grande de $L = 53\text{cm}$, que peso no pistom pequeno sustentará 2 toneladas no pistom maior?

$$F = f \frac{A}{a} = f \frac{\pi \left(\frac{L}{2}\right)^2}{\pi \left(\frac{l}{2}\right)^2} = f \left(\frac{L}{l}\right)^2$$

Como $F = Mg$ e $f = mg$, temos que:

$$m = M \left(\frac{l}{L}\right)^2 = 10,28\text{kg}$$



Capítulo 15 - Halliday, Resnick e Walker - 6ª. edição

- 26 Um objeto cúbico de dimensão $L = 0,6\text{m}$ de lado e massa $M = 450\text{kg}$ é suspenso por um fio em um tanque aberto com líquido de densidade $\rho = 1030\text{kg/m}^3$.

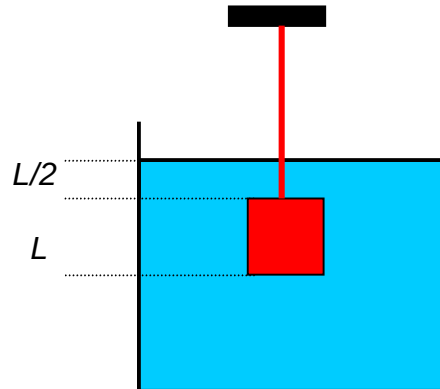
a) Encontre a força total para baixo, exercida pelo líquido e pela atmosfera sobre o objeto.

$$\begin{aligned} L &= 0,6m \\ M &= 450kg \\ \rho &= 1030kg/m^3 \\ p_0 &= 1atm = 1,013 \times 10^5 \text{ Pascal} \end{aligned}$$

A força total F_S exercida pelo líquido na parte superior do objeto é:

$$F_S = p_s A = \left(p_0 + \rho g \frac{L}{2} \right) L^2$$

$$F_S = 37.580,4N$$



b) Encontre a força total para cima, na base do objeto.

$$F_I = p_i A = \left(p_0 + \rho g \frac{3L}{2} \right) L^2$$

$$F_I = 39.805,2N$$

c) Encontre a tensão no fio.

$$T = P + F_S - F_I$$

$$T = Mg + \left(p_0 + \rho g \frac{L}{2} \right) L^2 - \left(p_0 + \rho g \frac{3L}{2} \right) L^2 = Mg - \rho L^3 g$$

$$T = 450 \cdot 10 - 39.805,2 + 37.580,4 = 4500 - 2.224,8$$

$$T = 2.275,2N$$

d) Calcule o empuxo sobre o objeto, usando o Princípio de Arquimedes.

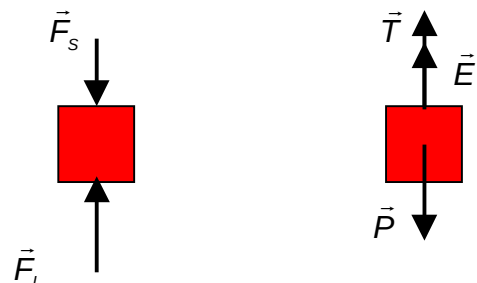
$$E = (\rho V) g = \rho L^3 g = (1030kg/m^3) (0,6m)^3 (10m/s^2)$$

$$E = 2.224,8N$$

e) Qual a relação existente entre todas essas quantidades?

$$E = F_I - F_S$$

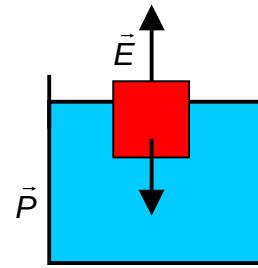
$$\vec{P} + \vec{T} + \vec{E} = 0$$



a) Encontre a densidade da madeira.

O empuxo é proporcional ao volume do corpo que está submerso, porque é esse volume que desloca o líquido.

Como o corpo está flutuando, esse empuxo é igual ao seu peso. Considerando inicialmente o corpo de madeira flutuando na água:



$$E_A = P_M$$

$$\left(\rho_A \frac{2V}{3} \right) g = (\rho_M V) g \Rightarrow \rho_M = \frac{2}{3} \rho_A$$

Como a densidade da água $\rho_A = 1g/cm^3$, encontramos que:

$$\rho_M = \frac{2}{3} g / cm^3 = 666,7kg/m^3$$

b) Encontre a densidade do óleo.

$$E_O = P_M$$

$$[\rho_O (0,9V)] g = (\rho_M V) g \Rightarrow \rho_O = \frac{\rho_M}{0,9} = \frac{10}{9} \rho_M = \frac{20}{27} g / cm^3$$

$$\rho_O = 740,7kg/m^3$$

Capítulo 15 - Halliday, Resnick e Walker - 6ª. edição

29 Uma esfera oca, de raio interno igual a $8cm$ e raio externo igual a $9cm$, flutua submersa pela metade em um líquido de densidade $800kg/m^3$.

a) Qual a massa da esfera?

$$R_I = 8cm = 0,08m$$

$$R_E = 9cm = 0,09m$$

$$\rho_L = 800kg/m^3$$

Quando a esfera flutua, temos que:

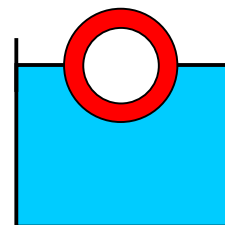
$$P = E$$

ou seja

$$M_E g = \left(\rho_L \frac{V_E}{2} \right) g$$

logo:

$$M_E = \frac{1}{2} \rho_L \frac{4}{3} \pi R_E^3 \Rightarrow M_E = 1,22kg$$



b) Calcule a densidade do material de que ele é feita.

$$\rho_E = \frac{M_E}{V} = \frac{M_E}{V_E - V_I} = \frac{M_E}{\frac{4}{3}\pi(R_E^3 - R_I^3)}$$

$$\rho_E = 1342,18 \text{ kg/m}^3$$

Capítulo 15 - Halliday, Resnick e Walker - 4ª. edição

- 31 Uma lata tem volume de 1200 cm^3 e massa de 130 g . Quantos gramas de balas de chumbo ela poderia carregar sem que afundasse na água? A densidade do chumbo é $11,4 \text{ g/cm}^3$.

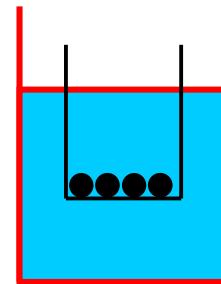
$$V = 1200 \text{ cm}^3$$

$$M_L = 130 \text{ g}$$

$$\rho_{Pb} = 11,4 \text{ g/cm}^3$$

$$\rho_A = 1 \text{ g/cm}^3 \text{ (densidade da água)}$$

A lata tem um volume interno V e está flutuando. Que massa M_{Pb} de chumbo pode ser colocada em seu interior? O peso total da lata mais balas de chumbo tem de ser igual ao empuxo exercido pela água na lata. Ou seja:



$$(M_{Pb} + M_L) g = E$$

Usando o Princípio de Arquimedes, o empuxo será igual ao volume do fluido deslocado, logo:

$$E = (\rho_A V) g \Rightarrow (M_{Pb} + M_L) g = (\rho_A V) g$$

ou seja:

$$M_{Pb} = \rho_A V - M_L = 1200 \text{ g} - 130 \text{ g}$$

$$M_{Pb} = 1070 \text{ g}$$

Capítulo 15 - Halliday, Resnick e Walker - 6ª. edição

- 36 Três crianças, cada uma pesando 356 N , constroem uma jangada amarrando troncos de diâmetro $0,30 \text{ m}$ e comprimento $1,80 \text{ m}$. Quantos troncos serão necessários para que a jangada as sustente? Considere a densidade da madeira como sendo 800 kg/m^3 .

$$P = 356 \text{ N}$$

$$d = 0,30 \text{ m}$$

$$L = 1,80 \text{ m}$$

$$\rho_M = 800 \text{ kg/m}^3$$

$$\rho_A = 1000 \text{ kg/m}^3$$

Seja V_T o volume de cada tronco. Desse modo:

$$V_T = \pi \left(\frac{d}{2} \right)^2 L = 0,12 m^3$$

Como a jangada será construída com N troncos, o volume V da jangada será:

$$V = N V_T$$

Para que a jangada flutue com carga máxima, vamos considerar que ela ficará completamente submersa. Neste caso, o empuxo será:

$$E = (\rho_A V) g$$

E a jangada suportará o seu próprio peso mais o peso das crianças:

$$(\rho_A V) g = (\rho_M V) g + 3P$$

ou seja:

$$V = \frac{\rho_M V}{\rho_A} + \frac{3P}{\rho_A g} \Rightarrow V = \frac{3P}{g(\rho_A - \rho_M)}$$

Mas

$$V = N V_T \Rightarrow N = \frac{3P}{V_T g (\rho_A - \rho_M)}$$

$$N = 4,45$$

Será necessário um número de toras maior que quatro. Supondo que a jangada será construída com um número inteiro de toras, serão necessários **cinco troncos** para a construção da jangada.

Capítulo 15 - Halliday, Resnick e Walker - 6ª. edição

47 Um tanque de grande área é cheio de água a uma profundidade de $0,30m$. Um buraco de área $A = 6,5cm^2$ no fundo do tanque permite que a água escoe.

a) A que taxa a água flui pelo buraco?

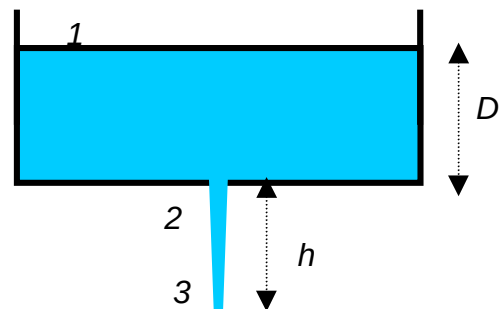
$$D = 0,30m$$

$$A = 6,5cm^2 = 6,5 \times 10^{-4} m^2$$

Vamos usar a Equação de Bernoulli:

$$p + \rho g y + \frac{1}{2} \rho v^2 = \text{constante}$$

nos pontos 1 na superfície da água dentro do tanque e o ponto 2 no buraco no fundo do tanque:



$$p_1 + \rho g y_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = p_2 + \rho g y_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2$$

Considerando que o buraco é pequeno em comparação à superfície da água dentro do tanque, podemos dizer, com boa aproximação, que a velocidade que o nível da água baixa v_1 é desprezível. Ainda considerando que o buraco é pequeno, podemos considerar que o nível D da água varia muito pouco, e desse modo:

$$D = y_1 - y_2$$

portanto:

$$p_1 + \rho g D = p_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2$$

Os pontos 1 e 2 estão em contato com a atmosfera, logo:

$$p_1 = p_2 = p_0$$

logo:

$$\rho g D = \frac{1}{2} \rho v_2^2 \Rightarrow v_2 = \sqrt{2gD} = 2,4 \text{ m/s}$$

O fluxo de água é definido como

$$\phi = v A$$

ou seja:

$$\phi = A \sqrt{2gD} = 1,58 \text{ m}^3/\text{s}$$

- b) A que distância abaixo do fundo do tanque, a área da seção transversal do jato será a metade da área do buraco?

A água vai fluir através do buraco e formar um tubo de corrente. Podemos usar a equação da continuidade para calcular a velocidade quando a seção transversal do tubo de corrente tiver a metade do valor original.

$$v_2 A = v_3 (A/2) \Rightarrow v_3 = 2 v_2 = 4,8 \text{ m/s}$$

Vamos usar a equação de Torricelli para calcular a altura h , abaixo do fundo do tanque, em que acontece essa relação de áreas; já que a água está em queda livre.

$$h = \frac{v_3^2 - v_2^2}{2g} = 0,86 \text{ m}$$

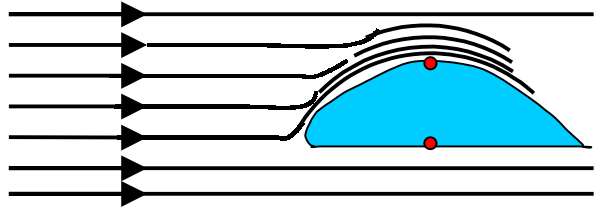
Capítulo 15 - Halliday, Resnick e Walker - 6ª. edição

- 48 Sobre a asa de um avião de área A , o ar escoa com velocidade v_C e sob a asa deste mesmo avião (também de área A), a velocidade do ar é v_B . Mostre que nesta situação simplificada, a equação de Bernoulli prediz que a magnitude L da força de sustentação na asa será:

$$L = \frac{1}{2} \rho A (v_C^2 - v_B^2)$$

onde ρ é a densidade do ar.

O fluxo de ar em torno da asa de um avião tem qualitativamente a forma desenhada ao lado. Devido ao seu formato, existe um adensamento das linhas de corrente acima da asa, e portanto a velocidade nesta região é maior que a velocidade abaixo da asa.



Usando a equação de Bernoulli, iremos calcular quais as consequências deste desenho peculiar de uma asa no que diz respeito à força de sustentação de um avião:

$$p + \rho g y + \frac{1}{2} \rho v^2 = \text{constante}$$

Aplicando essa equação para em ponto na parte superior da asa e para um outro ponto na sua parte inferior:

$$p_c + \rho g y_c + \frac{1}{2} \rho v_c^2 = p_b + \rho g y_b + \frac{1}{2} \rho v_b^2$$

ou seja:

$$\Delta p = p_b - p_c = \frac{1}{2} \rho (v_c^2 - v_b^2) + \rho g (y_c - y_b)$$

Como a diferença de energia potencial gravitacional é desprezível frente a outras diferenças de energia presentes na equação, podemos escrever que:

$$\Delta p = \frac{L}{A} = \frac{1}{2} \rho (v_c^2 - v_b^2) \Rightarrow L = \frac{1}{2} \rho A (v_c^2 - v_b^2)$$

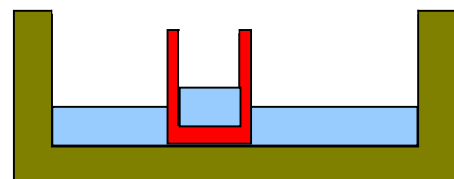
Capítulo 15 - Halliday, Resnick e Walker - 4ª. edição

“49” Coloca-se um bquer de vidro, parcialmente cheio de água, em uma pia, conforme a figura à seguir. Ele tem massa de $390g$ e um volume interno de $500cm^3$. Começa-se, então, a encher a pia com água e verifica-se por experiência que, se o bquer estiver com água até menos da metade, flutuará; mas se a água nele estiver acima da metade, permanecerá no fundo da pia até a água alcançar as suas bordas. Qual a densidade do material de que é feito o bquer?

$$M_B = 390g = 0,39kg$$

$$V_I = 500cm^3 = 0,0005m^3$$

Vamos considerar o caso limite, onde o nível da água da pia atingiu a borda do bquer, que tem metade do volume interno ocupado com água.



O peso do conjunto água + bquer será:

$$P = (M_A + M_B) g = (\rho_A V_I/2 + M_B) g$$

O empuxo será

$$E = (\rho_A V_E) g$$

onde V_E é o volume externo do béquer. Além disso, a densidade do béquer será dada por:

$$\rho_B = \frac{M_B}{V_E - V_I}$$

No caso limite, o empuxo E será igual ao peso P , e portanto teremos:

$$(\rho_A V_E) g = (\rho_A V_I/2 + M_B) g$$

$$V_E = \frac{M_B + \rho_A \frac{V_I}{2}}{\rho_A} = \frac{M_B}{\rho_A} + \frac{V_I}{2}$$

Mas

$$\rho_B = \frac{M_B}{V_E - V_I} \Rightarrow V_E = \frac{M_B}{\rho_B} + V_I$$

ou seja:

$$V_E = \frac{M_B}{\rho_A} + \frac{V_I}{2} = \frac{M_B}{\rho_B} + V_I$$

ou ainda:

$$\frac{M_B}{\rho_A} = \frac{M_B}{\rho_B} + \frac{V_I}{2} \Rightarrow \rho_B = \frac{M_B}{\frac{M_B}{\rho_A} - \frac{V_I}{2}} = 2,79 \text{g/cm}^3$$

Capítulo 15 - Halliday, Resnick e Walker - 6ª. edição	
---	--

- | | |
|----|--|
| 49 | Se a velocidade de escoamento, passando debaixo de uma asa, é 110m/s , que velocidade de escoamento na parte de cima criará uma diferença de pressão de 900Pa entre as superfícies de cima e de baixo? Considere a densidade do ar $\rho = 1,3 \times 10^{-3} \text{g/cm}^3$ |
|----|--|

$$v_B = 110 \text{m/s} = 396 \text{km/h}$$

$$\Delta p = 900 \text{Pa} = 0,00888 \text{atm}$$

$$\rho = 1,3 \times 10^{-3} \text{g/cm}^3 = 1,3 \text{kg/m}^3$$

$$1 \text{atm} = 1,013 \times 10^5 \text{Pa}$$

$$\Delta p = \frac{1}{2} \rho (v_C^2 - v_B^2) \Rightarrow v_C^2 = v_B^2 + \frac{2 \Delta p}{\rho}$$

$$v_C = 116,1 \text{m/s} = 417,9 \text{km/h}$$

Se cada asa tiver dimensões aproximadas de $A = 0,5m \times 3m = 1,5m^2$, as duas asas corresponderão a uma área de $3m^2$. A força de sustentação, neste caso, será:

$$L = A \Delta p = 2.700N$$

Capítulo 15 - Halliday, Resnick e Walker - 6ª. edição

50 Suponha que dois tanques, 1 e 2, cada um com uma grande abertura na parte de cima, contenham dois líquidos diferentes. Um pequeno furo é feito nos dois tanques, a uma mesma profundidade h abaixo da superfície do líquido, mas o furo no tanque 1 tem a metade da área de seção transversal do furo no tanque 2.

- a) Qual a razão ρ_1 / ρ_2 das densidades dos fluidos, se for observado que a vazão de massa é a mesma nos dois furos?

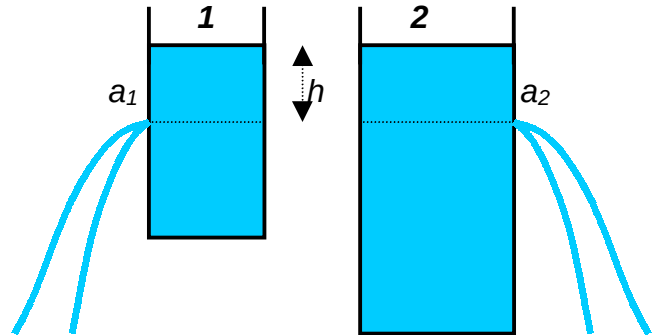
$$m = \rho V$$

$$\Delta m = \rho \Delta V$$

$$\Delta m_1 = \rho A \Delta y_1$$

$$\Delta m_2 = \rho A \Delta y_2$$

Δm é a variação de massa no tanque quando o seu volume varia de ΔV e o nível do líquido varia de Δy .



Para um intervalo de tempo Δt temos que

$$\frac{\Delta m}{\Delta t} = \rho A \frac{\Delta y}{\Delta t}$$

e no limite em que $\Delta t \rightarrow 0$

$$\frac{dm}{dt} = \rho A \frac{dy}{dt} \Rightarrow \frac{dm}{dt} = \rho A v_s$$

onde v_s é a velocidade com que o nível da água diminui. Se considerarmos os dois tanques, teremos que:

$$\begin{cases} \frac{dm_1}{dt} = \rho_1 A_1 v_{s1} \\ \frac{dm_2}{dt} = \rho_2 A_2 v_{s2} \end{cases}$$

Mas, neste problema, se observa que a vazão de massa é a mesma nos dois furos, logo:

$$\frac{dm_1}{dt} = \frac{dm_2}{dt} \Rightarrow \rho_1 A_1 v_{s1} = \rho_2 A_2 v_{s2}$$

Quando consideramos que v é a velocidade com que o líquido flui através do orifício de área a , podemos usar a equação da continuidade para concluir que:

$$\rho A v_s = \rho a v$$

Se usarmos esse resultado para cada um dos tanques, encontramos que:

$$\begin{cases} \rho_1 A_1 v_{s1} = \rho_1 a_1 v_1 \\ \rho_2 A_2 v_{s2} = \rho_2 a_2 v_2 \end{cases}$$

usando a igualdade da vazão das massas, temos:

$$\rho_1 a_1 v_1 = \rho_2 a_2 v_2 \quad (1)$$

Aplicando a equação de Bernoulli para o tanque 1, considerando a superfície e um ponto do orifício, temos que:

$$p_{s1} + \frac{1}{2} \rho_1 v_{s1}^2 + \rho_1 g h = p_1 + \frac{1}{2} \rho_1 v_1^2$$

e levando em conta que a pressão p_{s1} na superfície é a mesma pressão p_1 em um ponto do orifício, temos que:

$$v_1^2 = v_{s1}^2 + 2gh$$

Como a lâmina do líquido é muito grande, ou seja $A \gg a$, a velocidade v_{s1} que o nível do líquido diminui é muito menos que a velocidade v_1 desse líquido escapando pelo orifício, logo:

$$v_1 = \sqrt{2gh} \quad (2)$$

Toda essa argumentação anterior é válida para o tanque 2, e portanto:

$$v_2 = \sqrt{2gh} \quad (3)$$

Usando as equações (2) e (3) na equação (1), encontramos que:

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{a_2 v_2}{a_1 v_1} \quad \therefore \quad \frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{a_2}{a_1} \frac{\sqrt{2gh}}{\sqrt{2gh}} \Rightarrow \frac{\rho_1}{\rho_2} = 2$$

b) Qual é a razão entre as vazões dos dois tanques?

$$R = A v = \text{vazão}$$

Logo:

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{a_1 v_1}{a_2 v_2} = \frac{1}{2}$$

- c) Até que altura acima do furo se deve adicionar ou retirar líquido do tanque 2, para igualar as vazões?

Vamos considerar que os furos agora estão em profundidades diferentes, logo

$$\begin{cases} v_1 = \sqrt{2gH_1} \\ v_2 = \sqrt{2gH_2} \end{cases}$$

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{a_1 v_1}{a_2 v_2} = \frac{a_2/2}{a_2} \frac{\sqrt{2gH_1}}{\sqrt{2gH_2}} = \sqrt{\frac{H_1}{4H_2}}$$

Quando as vazões forem iguais, teremos:

$$R_1 = R_2 \Rightarrow H_1 = 4H_2$$

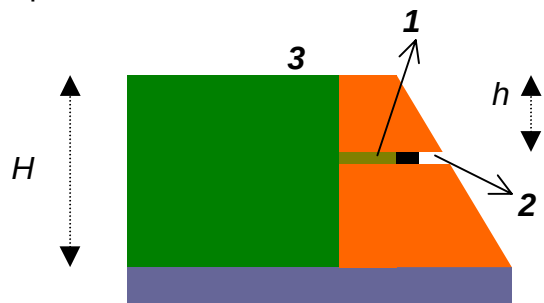
Capítulo 15 - Halliday, Resnick e Walker - 6ª. edição

- 53 A profundidade da água doce em repouso atrás de um dique é de 15m. Um tubo horizontal de 4cm de diâmetro passa através do dique 6m abaixo da superfície da água, como mostra a figura à seguir. Uma rolha fecha a abertura do tubo.

- a) Encontre a força de atrito entre a rolha e as paredes do tubo.

$$\begin{aligned} H &= 15\text{m} \\ h &= 6\text{m} \\ d &= 4\text{cm} = 0,04\text{m} \end{aligned}$$

Seja 1 um ponto no interior do dique e próximo à rolha; e seja 2 um ponto no exterior do dique e próximo à rolha.



Como os pontos não fazem parte de um mesmo fluido, usando a hidrostática nós temos então que:

$$\begin{cases} p_1 = p_0 + \rho g h \\ p_2 = p_0 \end{cases} \Rightarrow \Delta p = p_1 - p_2 = \rho g h$$

Essa é a diferença de pressão que o atrito entre a rolha e as paredes do tubo têm de suportar. Logo a força de atrito será:

$$F = A \Delta p = \rho g h A = 73,89\text{N}$$

- b) A rolha é removida. Que volume de água flui através do tubo em 3h?

Seja dV o elemento de volume que flui através do orifício, em um intervalo de tempo dt . temos então que:

$$dV = (v dt) A$$

Considerando que a velocidade com que o a água fluirá será constante, tendo em vista o volume do dique em comparação com o tamanho do orifício, temos que:

$$V = v t A$$

Vamos relacionar um ponto da superfície da água do dique (3) com um ponto na saída do tubo horizontal (2).

$$p_3 + \rho g y_3 + \frac{1}{2} \rho v_3^2 = p_2 + \rho g y_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2$$

Considerando que a área transversal do tubo é muito menor que a lâmina d'água do dique, usando a equação da continuidade, podemos aproximar que a velocidade que o nível da água do dique vai baixar com uma velocidade muito menor que a velocidade do fluxo d'água no tubo. Desse modo, temos que $v_3 \approx 0$

$$p_3 + \rho g y_3 = p_2 + \rho g y_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2$$

Considerando que $p_3 = p_2 = p_0$

$$\frac{1}{2} \rho v_2^2 = \rho g (y_3 - y_2) = \rho g h \Rightarrow v_2 = \sqrt{2gh}$$

O volume que fluirá será dado por:

$$V = tA\sqrt{2gh} = 147,17m^3$$

Capítulo 15 - Halliday, Resnick e Walker - 6ª. edição	
57	Um tubo de Pitot, como esquematizado na figura à seguir, é usado para determinar a velocidade de um avião em relação ao ar. Consiste em um tubo externo com um número de pequenos furos B (são mostrados quatro na figura); o tubo é conectado a um dos braços de um outro tubo em U, cujo segundo braço está conectado a um buraco, A, na parte frontal do aparelho, que se alinha com a direção de vôo do avião. Em A, o ar fica parado, logo $v_A = 0$. Em B, entretanto, a velocidade do ar presumidamente se iguala à velocidade do avião relativa ao ar. Use a equação de Bernoulli para mostrar que $v = \sqrt{\frac{2\rho g h}{\rho_{AR}}}$ onde v é a velocidade do avião em relação ao ar e ρ é a densidade do líquido dentro do tubo em U.

Considerando a diferença de pressão entre os dois níveis do líquido dentro do tubo em U, temos que:

$$p_2 = p_1 + \rho g h$$

Mas, usando a equação de Bernoulli, encontramos que:

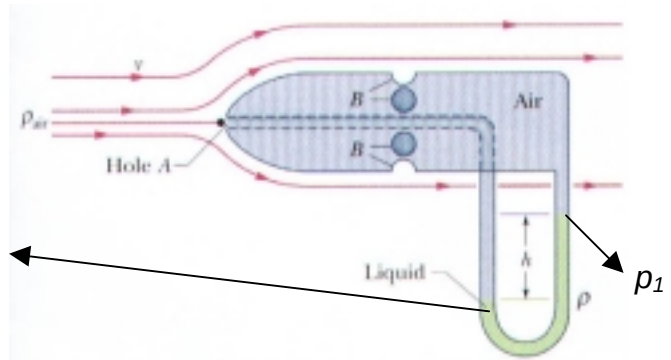
$$p_A + \frac{1}{2} \rho_{AR} v^2 = p_B$$

Se

$$\left\{ \begin{array}{l} p_A \approx p_1 \\ p_B \approx p_2 \end{array} \right\} \Rightarrow \Delta p = p_B - p_A = p_2 - p_1$$

ou seja:

$$\Delta p = \frac{1}{2} \rho_{AR} v^2 = \rho g h \quad \therefore v = \sqrt{\frac{2 \rho g h}{\rho_{AR}}}$$



Capítulo 15 - Halliday, Resnick e Walker - 6ª. edição - Suplemento

68 Um *sifão* é um aparelho usado para remover líquido de um recipiente. Seu funcionamento é mostrado na figura à seguir. O tubo ABC necessita estar inicialmente cheio, mas uma vez que isso tenha sido feito, o líquido fluirá através do tubo até que o nível do líquido no recipiente esteja abaixo da abertura A. O líquido tem densidade ρ e viscosidade desprezível.

a) Com que velocidade o líquido sai do tubo em C ?

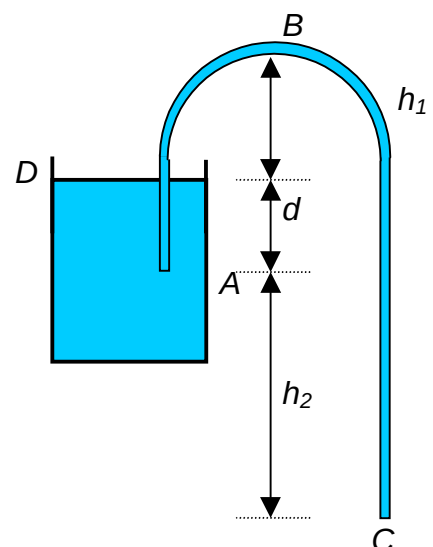
A equação de Bernoulli tem a forma:

$$p + \rho g y + \frac{1}{2} \rho v^2 = \text{constante}$$

Usando essa equação entre um ponto na saída do sifão C e um ponto na superfície do líquido D, temos que:

$$p_D + \rho g(d + h_2) + \frac{1}{2} \rho v_D^2 = p_C + \frac{1}{2} \rho v_C^2$$

Supondo que a superfície do líquido tem uma área muito maior que a seção transversal do sifão, podemos considerar que a velocidade com



que a superfície do líquido varia(baixa) é desprezível frente a velocidade com que o líquido entra no sifão. desse modo $v_D \cong 0$, e portanto

$$\frac{1}{2} \rho v_C^2 = p_D - p_C + \rho g (d + h_2)$$

Mas, tanto o ponto C quanto o ponto D estão em contato com a atmosfera em repouso, e portanto estão a uma mesma pressão p_0 , e desse modo $p_D = p_C = p_0$, logo:

$$v_C = \sqrt{2g(d + h_2)}$$

b) Qual a pressão do líquido no ponto mais alto B ?

Usando a equação de Bernoulli para equacionar as grandezas dos pontos B e D, encontramos:

$$p_D + \frac{1}{2} \rho v_D^2 + \rho g(d + h_2) = p_B + \frac{1}{2} \rho v_B^2 + \rho g(d + h_1 + h_2)$$

ou seja:

$$p_D = p_B + \frac{1}{2} \rho v_B^2 + \rho g h_1$$

Usando a equação da continuidade entre os pontos B e C, encontramos que:

$$\rho v A = \text{constante} \Rightarrow v_B = v_C = \sqrt{2g(d + h_2)}$$

e portanto:

$$p_B = p_D - \rho g h_1 - \frac{1}{2} \rho v_B^2 = p_D - \rho g h_1 - \frac{1}{2} \rho [2g(d + h_2)]$$

Como $p_D = p_0$, temos que:

$$p_B = p_0 - \rho g (h_1 + h_2 + d)$$

c) Teoricamente, qual a maior altura possível h , que um sifão pode elevar água?

A menor pressão que pode acontecer no ponto B será a pressão nula, logo:

$$p_{MIN} = 0 \Rightarrow p_0 - \rho g [(h_1)_{MAX} + h_2 + d] = 0$$

ou seja:

$$(h_1)_{MAX} = \frac{p_0}{\rho g} - (h_2 + d)$$

Capítulo 15 - Halliday, Resnick e Walker - 4ª. edição

“73”

As janelas de um prédio de escritórios tem dimensões de $4m \times 5m$. Em um dia tempestuoso, o ar passa pela janela do 53^o andar, paralelo à janela, a uma velocidade de $30m/s$. Calcule a força resultante aplicada na janela. A densidade do ar é $1,23kg/m^3$.

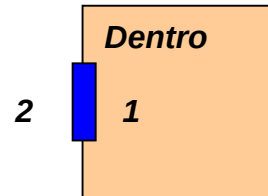
$$v_2 = 30\text{m/s} = 108\text{km/h}$$

Iremos usar a equação de Bernoulli, equacionando um ponto dentro e outro fora do escritório:

$$p + \rho g y + \frac{1}{2} \rho v^2 = \text{constante}$$

ou seja:

$$p_1 + \rho g y_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = p_2 + \rho g y_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2$$



Como os pontos estão no mesmo nível $y_1 = y_2$, e como o ar dentro do escritório está parado $v_1 = 0$, temos que:

$$\Delta p = p_1 - p_2 = \frac{1}{2} \rho v_2^2$$

Mas

$$F = A \Delta p = \frac{1}{2} \rho A v_2^2 = 11.070 \text{Newtons}$$

Notas de Aula de Física

16. OSCILAÇÕES	2
O MOVIMENTO HARMÔNICO SIMPLES - MHS	2
MHS - A velocidade	4
MHS - A aceleração	4
MHS - A LEI DA FORÇA	5
MHS - CONSIDERAÇÕES SOBRE ENERGIA	5
A EQUAÇÃO PARA O MHS	6
UM OSCILADOR HARMÔNICO SIMPLES ANGULAR - O PÊNDULO DE TORÇÃO	7
PÊNDULOS	8
O pêndulo simples	8
O pêndulo físico	9
MHS E O MOVIMENTO CIRCULAR E UNIFORME	10
MHS AMORTECIDO	11
SOLUÇÃO DE ALGUNS PROBLEMAS	15
01	15
03	15
10	16
11	16
15	17
16	18
18	19
22	20
23	21
24	23
25	24
27	24
29	26
36	27
37	28
41	29
46	30
50	31
52	32
53	34
58	35

16. Oscilações

Quando o movimento de um corpo descreve uma trajetória, e a partir de um certo instante começa a repetir esta trajetória, dizemos que esse movimento é periódico. O tempo que o corpo gasta para voltar a percorrer os mesmos pontos da trajetória é chamado de período.

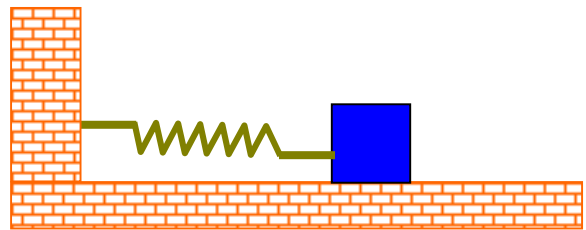
No nosso cotidiano existem inúmeros exemplos de movimento periódico, tais como o pêndulo de um relógio ou um sistema massa - mola, quando um desses conjuntos descrevem um vai e vem em torno das suas posições de equilíbrio.

O movimento harmônico simples - MHS

O movimento harmônico simples - MHS é movimento periódico, e portanto o objeto passa novamente por uma dada posição depois de um período T . O período é o inverso da frequência f de oscilação:

$$T = \frac{1}{f}$$

Um exemplo típico de aparato que se movimenta segundo um MHS é sistema massa-mola. Uma mola tem uma de suas extremidades presa em uma parede rígida e a outra extremidade está presa em um corpo que está sobre uma superfície sem atrito. Quando deslocado de sua posição de equilíbrio o corpo começa a oscilar.



Um objeto que se desloca em MHS tem a sua posição descrita pela equação

$$x(t) = x_M \cos(\omega t + \varphi)$$

onde

x_M = amplitude de oscilação

$(\omega t + \varphi)$ = fase

ω = frequência angular de oscilação

φ = constante de fase

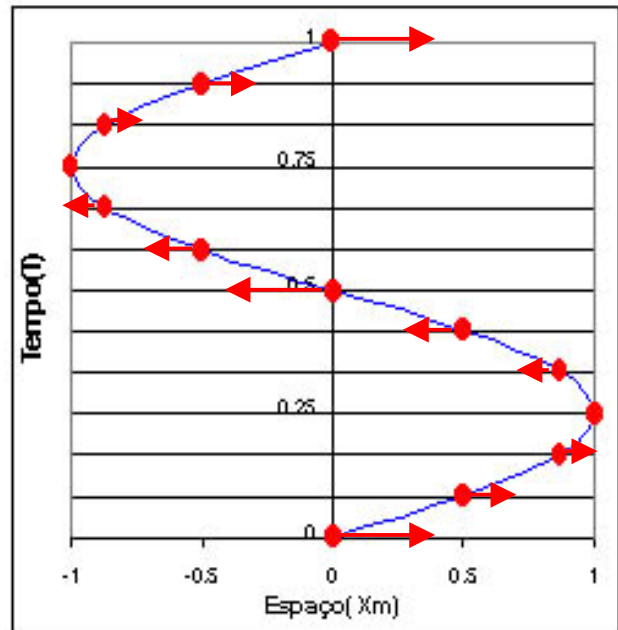
Quando a constante de fase assume o valor $\varphi = -\pi/2$ a equação anterior, que descreve o movimento do corpo, tem a forma:

$$x(t) = x_M \sin \omega t$$

À medida que o tempo evolui, o corpo ocupa as diversas posições mostradas na figura à seguir.

Em cada posição ocupada, o corpo terá uma velocidade correspondente, como veremos mais adiante.

Também em cada posição, ele terá uma aceleração correspondente. Tanto a aceleração quanto a velocidade variam à medida que a posição se altera.

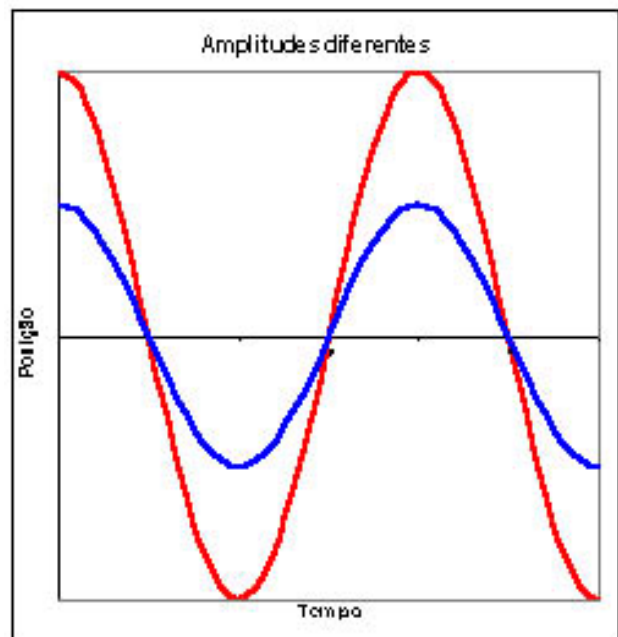


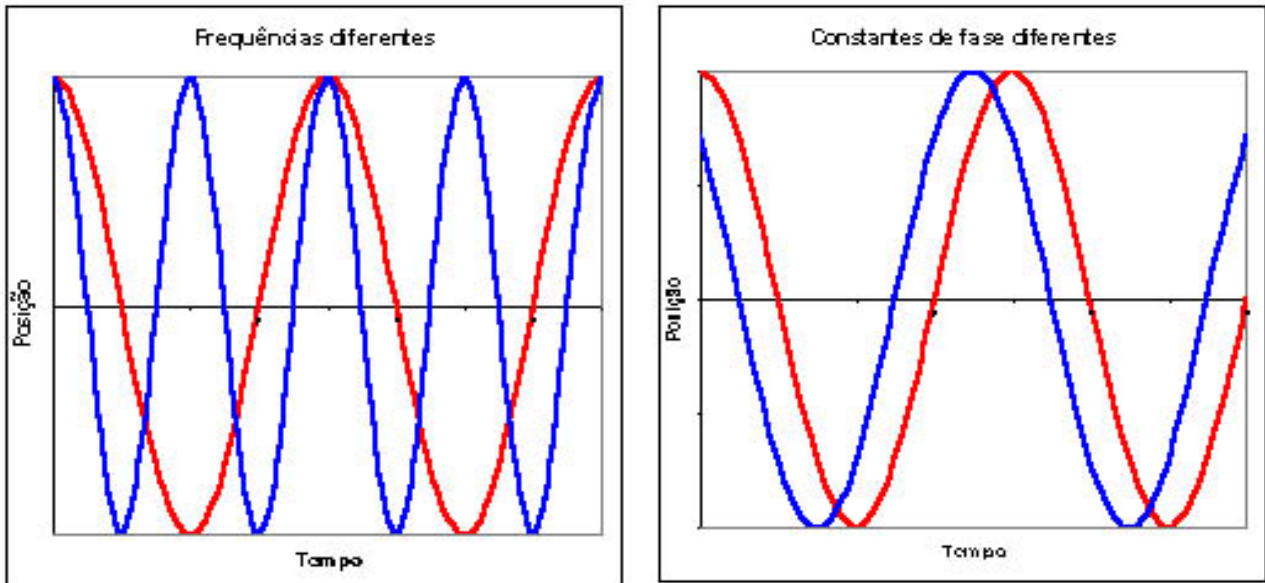
O gráfico da posição em função do tempo toma diversas formas quando modificamos a amplitude, frequência ou constante de fase.

Quando alteramos a **amplitude** de oscilação, o movimento se consuma para deslocamentos máximos diferentes, mas com mesma frequência e mesma constante de fase. Desse modo os dois movimentos alcançam os extremos no mesmo instante.

Quando aumentamos a **frequência** (e consequentemente diminuimos o período), os movimentos terão a forma descrita a seguir onde a função de maior período é a vermelha e a de menor período é azul.

Quando variamos a constante de fase, a função mantém a forma, mas sofre um deslocamento, como é mostrado a seguir.





Como o movimento é periódico, teremos que as posições se repetem depois de um tempo igual ao período T , ou seja:

$$x(t) = x(t + T)$$

e portanto:

$$x(t + T) = x_M \cos[\omega(t + T) + \varphi] = x(t) = x_M \cos[(\omega t + \varphi) + \omega T]$$

logo:

$$\omega T = 2\pi \Rightarrow \begin{cases} \omega = \frac{2\pi}{T} \\ \omega = 2\pi f \end{cases}$$

MHS - A velocidade

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = -\omega x_M \sin(\omega t + \varphi)$$

Definindo a amplitude da velocidade $v_M = \omega x_M$, encontramos que:

$$v(t) = -v_M \sin(\omega t + \varphi)$$

MHS - A aceleração

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = -\omega v_M \cos(\omega t + \varphi)$$

Definindo a amplitude da aceleração $a_M = \omega v_M = \omega^2 x_M$, encontramos que:

$$a(t) = -a_M \cos(\omega t + \varphi)$$

ou ainda

$$a(t) = -w^2 x(t)$$

MHS - A Lei da força

Considerando um sistema massa - mola que obedeça à Lei de Hooke e supondo que a resultante das forças que atuam na massa é a força restauradora da mola, encontramos que:

$$F = ma = -mw^2 x$$

Mas

$$F = -k x$$

logo

$$k = mw^2 \Rightarrow \begin{cases} w = \sqrt{\frac{k}{m}} \\ T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \end{cases}$$

MHS - Considerações sobre energia

A energia potencial elástica de um sistema massa - mola é definido como:

$$U(t) = \frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{2} k x_M^2 \cos^2(wt + \varphi)$$

e a energia potencial desse sistema é definida como:

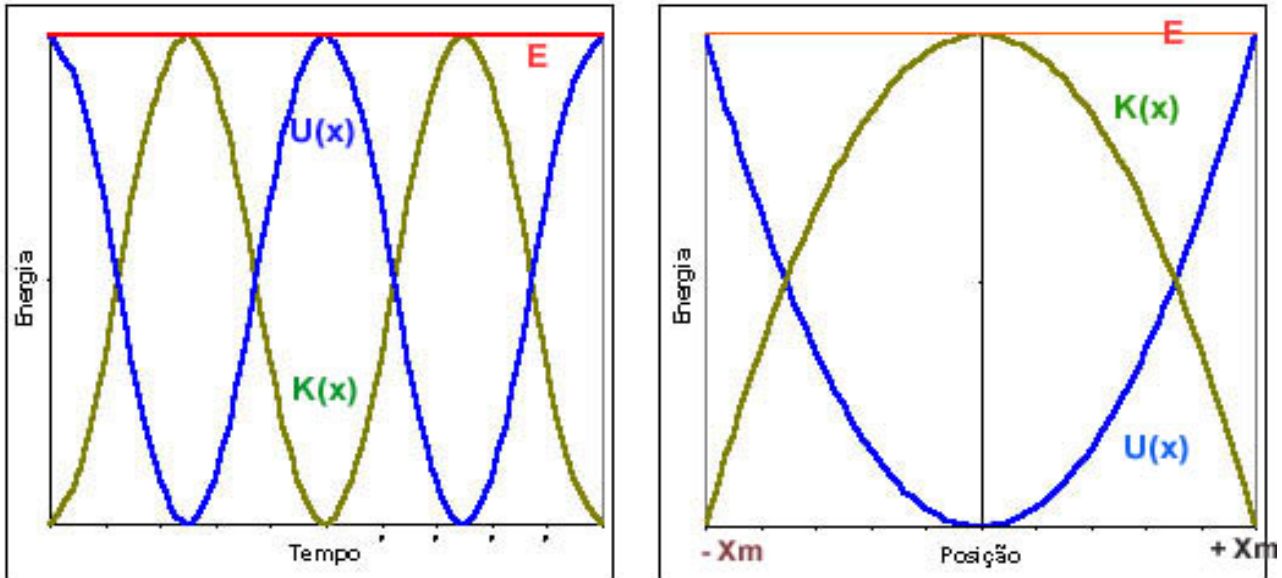
$$K(t) = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m [-w x_M \sin(wt + \varphi)]^2$$

Se considerarmos que $m w^2 = k$, encontramos que:

$$K(t) = \frac{1}{2} k x_M^2 \sin^2(wt + \varphi)$$

A energia mecânica E , definida como a soma das energias cinética K e potencial U , terá a forma:

$$E = U + K = \frac{1}{2} k x_M^2 = constante$$



A equação para o MHS

$$F = m \frac{d^2 x}{dt^2} = -k x$$

ou seja:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \left(\frac{k}{m} \right) x = 0$$

ou ainda:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + w^2 x = 0 \quad \text{onde} \quad w = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

A solução mais geral da equação anterior tem a forma:

$$x(t) = Ae^{\alpha t}$$

onde A e α são constantes a determinar. Usando a solução, encontramos:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = A\alpha e^{\alpha t} \\ \frac{d^2 x}{dt^2} = A\alpha^2 e^{\alpha t} \end{cases}$$

Aplicando estes resultados na equação do MHS, temos que:

$$A\alpha^2 e^{\alpha t} + w^2 A e^{\alpha t} = 0$$

ou ainda:

$$Ae^{\alpha t}(\alpha^2 + w^2) = 0$$

Como A e α são diferentes de zero, em princípio, a única forma da equação acima se anular será quando:

$$\alpha^2 + w^2 = 0 \quad \therefore \quad \alpha^2 = -w^2 \quad \Rightarrow \quad \alpha = \pm iw$$

A solução da equação do MHS toma, então, a forma:

$$x(t) = A_1 e^{+i\omega t} + A_2 e^{-i\omega t}$$

A solução da equação do MHS poderá tomar outra forma se redefinirmos as constantes A_1 e A_2 , da seguinte forma:

$$\begin{cases} A_1 = \frac{1}{2} x_M e^{+i\varphi} \\ A_2 = \frac{1}{2} x_M e^{-i\varphi} \end{cases}$$

$$x(t) = \frac{1}{2} x_M e^{+i(\omega t + \varphi)} + \frac{1}{2} x_M e^{-i(\omega t + \varphi)}$$

Considerando a fórmula de De Moivre:

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta \quad \Rightarrow \quad \cos \theta = \frac{1}{2} (e^{+i\theta} + e^{-i\theta})$$

temos que:

$$x(t) = x_M \cos(\omega t + \varphi)$$

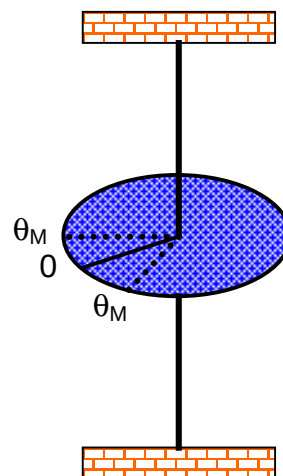
Um oscilador harmônico simples angular - O pêndulo de torção

Vamos considerar um disco preso a um fio que passa pelo seu centro e perpendicular à sua superfície, como mostra a figura ao lado.

Se giramos o disco à partir de sua posição de equilíbrio ($\theta = 0$) e depois soltarmos, ele irá oscilar em torno daquela posição em Movimento Harmônico Simples - MHS entre os ângulos ($\theta = -\theta_M$) e ($\theta = +\theta_M$)

Rodando o disco de um ângulo θ em qualquer direção, faremos surgir um torque restaurador dado por

$$\tau = -\kappa \theta$$



onde kapa (κ) é a constante de torção.

Como a força restauradora é a única que atua no plano do disco, ela provocará o torque resultante:

$$\tau = I \alpha$$

onde I é o momento de inércia do disco e α é a sua aceleração angular. Desse modo, temos que:

$$\tau = I \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\kappa\theta$$

ou seja:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \left(\frac{\kappa}{I}\right)\theta = 0$$

A equação anterior define a frequência angular de oscilação do pêndulo de torção:

$$\omega = \sqrt{\frac{\kappa}{I}} \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{\kappa}}$$

e tem como solução:

$$\theta(t) = \theta_M \cos(\omega t + \delta)$$

Pêndulos

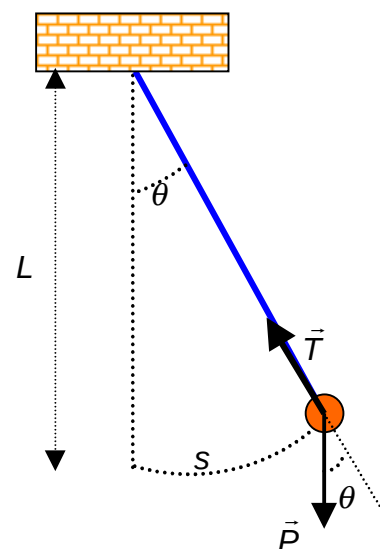
Os pêndulos fazem parte de uma classe de osciladores harmônicos simples nos quais a força restauradora está associada à gravidade, ao invés das propriedades elásticas de um fio torcido ou de uma mola comprimida.

O pêndulo simples

O pêndulo simples é composto de um corpo suspenso através de um fio de massa desprezível, e ele é posto a oscilar em torno de sua posição de equilíbrio. No seu movimento a corpo descreve um arco de circunferência.

A componente do peso, tangencial ao deslocamento é a força de restauração desse movimento, porque age no corpo de modo a trazê-lo de volta à sua posição central de equilíbrio.

A componente do peso, perpendicular ao deslocamento é equilibrada pela tração exercida pelo fio, de modo que a resultante das forças tem a forma:



$$F = -mg \sin \theta = m \frac{d^2 s}{dt^2}$$

onde s é o deslocamento medido ao longo do arco que descreve a oscilação, e o sinal negativo indica que a força age na direção da posição de equilíbrio - como no caso do sistema massa - mola. O arco s é definido como

$$s = L \theta \Rightarrow \frac{d^2 s}{dt^2} = L \frac{d^2 \theta}{dt^2}$$

temos que:

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} + \left(\frac{g}{L} \right) \sin \theta = 0$$

Para pequenas oscilações do pêndulo, podemos aproximar $\sin \theta \approx \theta$, e teremos então:

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} + \left(\frac{g}{L} \right) \theta = 0$$

A equação anterior define a frequência angular de oscilação do pêndulo simples:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L}} \Rightarrow T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$$

e tem como solução:

$$\theta(t) = \theta_M \cos(\omega t + \delta)$$

O pêndulo físico

A maior parte dos pêndulos do mundo real não é nem ao menos aproximadamente simples.

Vamos considerar um objeto de forma arbitrária, que pode oscilar em torno de um eixo que passa pelo ponto O , perpendicular à folha de papel. O eixo está a uma distância h do centro de massa, onde atua a força peso.

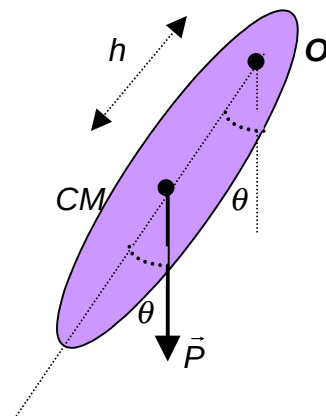
Quando o pêndulo da figura ao lado é deslocado de sua posição de equilíbrio de um ângulo θ , surge um torque restaurador

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$$

com módulo:

$$\tau = - (mg \sin \theta) h$$

e esse é o torque resultante, portanto:



$$\tau = I\alpha = I \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

ou seja:

$$\tau = -mgh \sin\theta = I \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

ou ainda:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \left(\frac{mgh}{I} \right) \sin\theta = 0$$

Para pequenas oscilações do pêndulo, podemos aproximar $\sin\theta \approx \theta$, e teremos então:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \left(\frac{mgh}{I} \right) \theta = 0$$

A equação anterior define a frequência angular de oscilação do pêndulo físico:

$$\omega = \sqrt{\frac{mgh}{I}} \Rightarrow T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgh}}$$

e tem como solução:

$$\theta(t) = \theta_M \cos(\omega t + \delta)$$

MHS e o movimento circular e uniforme

Vamos considerar um corpo que descreve um movimento circular e uniforme, com velocidade constante v em um círculo de raio R . O vetor posição $\vec{r}(t)$ que descreve a trajetória do corpo tem módulo constante, e suas projeções nos eixos cartesianos são dadas por:

$$\vec{r}(t) = \hat{i}x(t) + \hat{j}y(t)$$

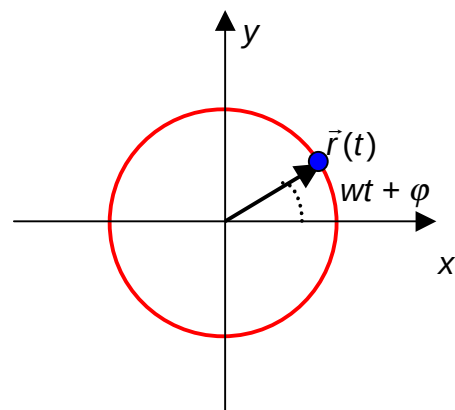
onde

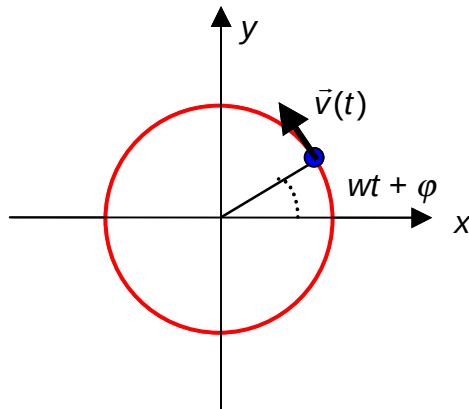
$$x(t) = R \cos(\omega t + \varphi)$$

e

$$y(t) = R \sin(\omega t + \varphi)$$

Observando a forma funcional de $x(t)$ podemos concluir que o Movimento Harmônico Simples é a projeção do movimento circular e uniforme num diâmetro do círculo onde este último acontece.





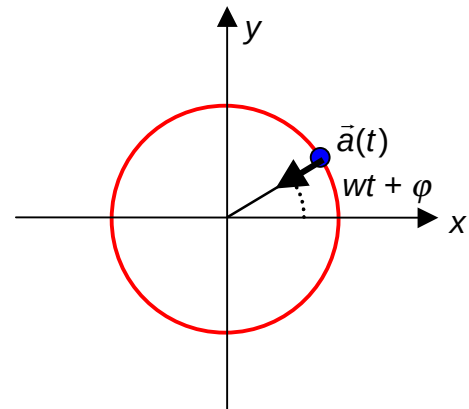
A velocidade tem a forma:

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$\vec{v}(t) = \hat{i}v_x + \hat{j}v_y$$

$$v_x = -w R \sin(wt + \varphi)$$

$$v_y = +w R \cos(wt + \varphi)$$



A aceleração tem a forma:

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$\vec{a}(t) = \hat{i}a_x + \hat{j}a_y$$

$$a_x = -w^2 R \cos(wt + \varphi)$$

$$a_y = -w^2 R \sin(wt + \varphi)$$

MHS amortecido

Em diversas situações do nosso cotidiano, os movimentos oscilatórios têm uma duração finita, eles têm um começo e um fim. Não ficam se movendo no ir e vir de modo indefinido. Isso acontece, basicamente, devido a atuação de forças dissipativas tais como as forças de atrito.

Em uma situação simples as forças dissipativas podem ser representadas por uma função que depende linearmente da velocidade.

Vamos considerar um sistema composto de uma mola de constante elástica k com uma das extremidades presa ao teto e a outra suspendendo um corpo de massa m . Nesse corpo está presa uma haste vertical que tem a sua outra extremidade presa a um anteparo que está mergulhado em um líquido. Quando o anteparo se move no líquido

esse movimento é amortecido por uma força que surge devido à viscosidade do líquido.

Essa força dissipativa pode ser descrita por uma equação do tipo:

$$F_A = -b v$$

onde b é chamado de constante de amortecimento. A resultante das forças que atuam no corpo de massa m é dada por:

ou seja:

$$F = -kx - b v$$

$$m a = -kx - b v$$

A forma diferencial da equação anterior é:

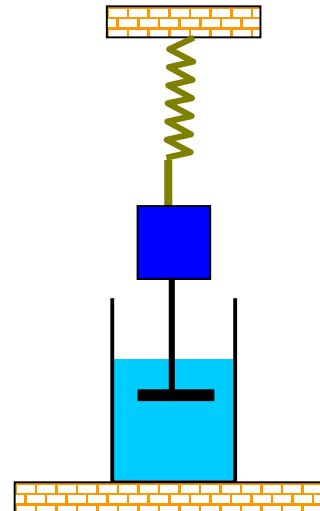
$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx - b \frac{dx}{dt}$$

ou

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \left(\frac{b}{m} \right) \frac{dx}{dt} + w_0^2 x = 0$$

onde

$$w_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$



A solução da equação diferencial anterior tem a forma:

$$x(t) = A e^{\alpha t}$$

onde A e α são constantes a serem determinadas. Aplicando essa forma na equação diferencial encontramos que:

$$A \alpha^2 e^{\alpha t} + \left(\frac{b}{m} \right) A \alpha e^{\alpha t} + w_0^2 A e^{\alpha t} = 0$$

ou seja:

$$A e^{\alpha t} \left[\alpha^2 + \left(\frac{b}{m} \right) \alpha + w_0^2 \right] = 0$$

Como $A e^{\alpha t} \neq 0$, teremos então que:

$$\alpha^2 + \left(\frac{b}{m} \right) \alpha + w_0^2 = 0$$

cujas soluções são:

$$\alpha = \frac{-\frac{b}{m} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{m} \right)^2 - 4w_0^2}}{2}$$

ou ainda:

$$\alpha = -\frac{b}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2m} \right)^2 - w_0^2}$$

Vamos considerar inicialmente que o movimento é **sub-amortecido** :

$$w_0^2 > \left(\frac{b}{2m}\right)^2$$

e definir:

$$w_A = \sqrt{w_0^2 - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}$$

logo:

$$\alpha = -\frac{b}{2m} \pm i w_A$$

A função $x(t)$ terá, então, a forma:

$$x(t) = A_1 e^{-\frac{bt}{2m} + i w_A t} + A_2 e^{-\frac{bt}{2m} - i w_A t}$$

ou seja:

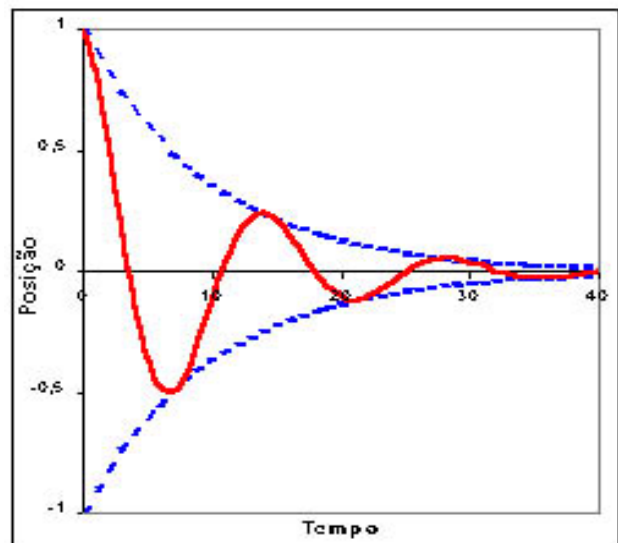
$$x(t) = (A_1 e^{+i w_A t} + A_2 e^{-i w_A t}) e^{-\frac{bt}{2m}}$$

e usando uma transformação equivalente àquela do MHS, temos que:

$$x(t) = x_M e^{-\frac{bt}{2m}} \cos(w_A t + \varphi)$$

A equação da posição em função do tempo tem a forma da curva da figura ao lado. Ela é um cosseno multiplicado por uma exponencial, e o resultado é um cosseno cuja amplitude de oscilação vai diminuindo à medida que as oscilações se processam.

Um exemplo típico dessa situação é a porta dos *saloons* dos filmes de *bang-bang*. Quando alguém passa pela porta ela inicia a oscilação com uma grande amplitude, que vai diminuindo com o tempo.



Quando supomos que o movimento é **super-amortecido** , temos que:

$$w_0^2 < \left(\frac{b}{2m}\right)^2$$

temos

$$w_B = \sqrt{\left(\frac{b}{2m}\right)^2 - w_0^2}$$

e o parâmetro α agora tem a forma:

$$\alpha = -\frac{b}{2m} \pm w_B$$

e à partir dele encontramos a equação da posição em função do tempo:

$$x(t) = (A_1 e^{+w_B t} + A_2 e^{-w_B t}) e^{-\frac{bt}{2m}}$$

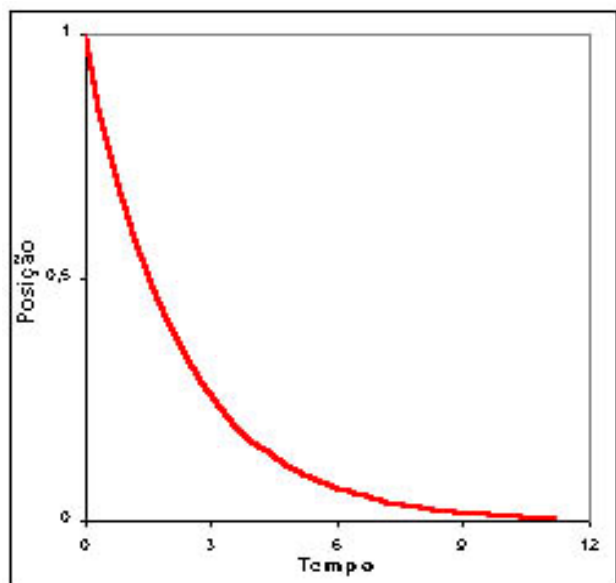
ou, se redefinirmos as constantes:

$$x(t) = x_M e^{-\frac{bt}{2m}} \cosh(w_B t + \varphi)$$

A equação da posição em função do tempo tem a forma da curva da figura ao lado. Ela é um cosseno hiperbólico multiplicado por uma exponencial, e o resultado é um decréscimo monotônico da amplitude.

Na realidade não chega a acontecer nenhuma oscilação, e à medida que o tempo evolui, a amplitude de oscilação vai ficando sempre menor.

Um exemplo típico dessa situação é a porta dos escritórios. Quando alguém passa pela porta ela inicia a um movimento em direção ao repouso na posição de equilíbrio.



Solução de alguns problemas

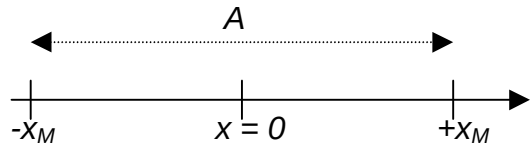
Capítulo 16 - Halliday, Resnick e Walker - 6ª. edição

01 Um objeto sujeito a um movimento harmônico simples leva $0,25s$ para ir de um ponto de velocidade zero até o próximo ponto onde isso ocorre. A distância entre esses pontos é de $36cm$.

a) Calcule o período do movimento.

$$A = 36cm = 0,36m = 2x_M$$

$$T/2 = 0,25s$$



Considerando o movimento harmônico simples, a velocidade é nula nos dois pontos de elongação máxima $x = \pm x_M$. Por outro lado, o tempo para ir de um extremo ao outro é igual a metade do período. Desse modo:

$$T = 0,5s$$

b) Calcule a frequência do movimento.

$$f = 1/T = 1/0,5 \quad \therefore \quad f = 2Hz$$

c) Calcule a amplitude do movimento.

$$x_M = 0,18m$$

Capítulo 16 - Halliday, Resnick e Walker - 4ª. edição

03 Um bloco de $4,0Kg$ está suspenso de uma certa mola, estendendo-a a $16,0cm$ além de sua posição de repouso.

a) Qual a constante da mola?

$$m_1 = 4Kg$$

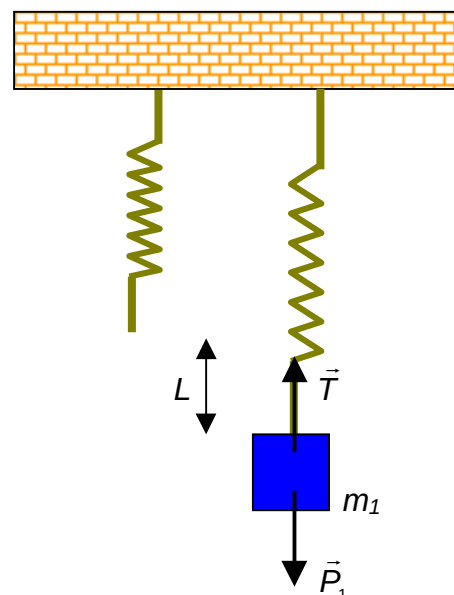
$$L = 16cm = 0,16m$$

Como o bloco está em repouso, existe o equilíbrio entre as forças que estão atuando nele. O peso e a força restauradora elástica são iguais, logo:

$$\vec{F} + \vec{P}_1 = 0$$

ou seja:

$$k L - m_1 g = 0$$



$$k = \frac{m_1 g}{L} = \frac{4 \times 9,8}{0,16}$$

$$k = 245 \text{ N/m}$$

$$w_1 = \sqrt{\frac{k}{m_1}} = \sqrt{\frac{245}{4}} = 7,8 \text{ rad/s} \Rightarrow T_1 = \frac{2\pi}{w_1} = 0,8 \text{ s}$$

- b)** O bloco é removido e um corpo de 0,5Kg é suspenso da mesma mola. Se esta mola for então puxada e solta, qual o período de oscilação?

$$m_2 = 0,5 \text{ Kg}$$

$$w_2 = \sqrt{\frac{k}{m_2}} = \sqrt{\frac{245}{0,5}} = 22,1 \text{ rad/s} \Rightarrow T_2 = \frac{2\pi}{w_2} = 0,28 \text{ s}$$

Capítulo 16 - Halliday, Resnick e Walker - 6ª. edição

- 10** O diafragma de um alto-falante está vibrando num movimento harmônico simples com a frequência de 440Hz e um deslocamento máximo de 0,75mm.

- a)** Qual é a frequência angular deste diafragma?

$$w = 2\pi f = 2764,60 \text{ Hz}$$

$$f = 440 \text{ Hz}$$

$$x_M = 0,75 \text{ mm} = 7,5 \times 10^{-4} \text{ m}$$

- b)** Qual é a velocidade máxima deste diafragma?

$$v_M = w x_M = 2,07 \text{ m/s}$$

- c)** Qual é a aceleração máxima deste diafragma?

$$a_M = w^2 x_M = 5732,25 \text{ m/s}^2$$

Capítulo 16 - Halliday, Resnick e Walker - 6ª. edição

- 11** Podemos considerar que um automóvel esteja montado sobre quatro molas idênticas, no que concerne às suas oscilações verticais. As molas de um certo carro estão ajustadas de forma que as vibrações tenham uma frequência de 3,0Hz.

- a)** Qual a constante de elasticidade de cada mola, se a massa do carro é de 1450kg e o peso está homogeneamente distribuído entre elas?

$$f = 3 \text{ Hz}$$

$$M = 1450 \text{ Kg}$$

Como o peso está distribuído uniformemente entre as quatro molas, cada mola suportará a quarta parte do peso total. Logo podemos definir $m = M/4$ e então:

$$w = \sqrt{\frac{k}{m}} = 2\pi f \quad \therefore \quad \frac{k}{m} = (2\pi f)^2 \Rightarrow k = \frac{M}{4} (2\pi f)^2$$

$$k = 128.798,33 \text{ N/m} = 1,29 \times 10^5 \text{ N/m}$$

- b)** Qual será a frequência de vibração se cinco passageiros, com média de 73kg cada um, estiverem no carro? (Novamente, considere uma distribuição homogênea de peso.)

$$m_P = 73 \text{ Kg}$$

O peso dos cinco passageiros será distribuída uniformemente entre as quatro molas, portanto:

$$f = \frac{w}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{\frac{M}{4} + \frac{5m_P}{4}}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{4k}{M + 5m_P}} \quad \therefore \quad f = 2,68 \text{ Hz}$$

Capítulo 16 - Halliday, Resnick e Walker - 6ª. edição

- 15 Um corpo oscila com movimento harmônico simples de acordo com a equação:

$$x(t) = (6,0 \text{ m}) \cos[(3\pi \text{ rad/s}) t + \pi/3 \text{ rad}]$$

- a)** Em $t = 2,0 \text{ s}$, qual é o deslocamento nesse movimento?

$$x(2) = x_M \cos(2w + \varphi)$$

$$x(t) = x_M \cos(wt + \varphi)$$

Mas

$$\cos(2w + \varphi) = \cos(2.3\pi + \pi/3) = \cos(19\pi/3) = 0,5$$

$$x_M = 6 \text{ m}$$

$$w = 3\pi \text{ rad/s}$$

$$\varphi = \pi/3 \text{ rad}$$

$$x(2) = 6 \cos(19\pi/3) = 3 \text{ m}$$

- b)** Em $t = 2,0 \text{ s}$, qual é a velocidade nesse movimento?

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = -w x_M \sin(wt + \varphi)$$

$$v(2) = -w x_M \sin(2w + \varphi)$$

Mas

$$\sin(2w + \varphi) = \sin(2.3\pi + \pi/3) = \sin(19\pi/3) = 0,866$$

$$v(2) = -3\pi 6 \sin(19\pi/3) = -48,97 \text{ m/s}$$

- c)** Em $t = 2,0 \text{ s}$, qual é a aceleração nesse movimento?

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = -w^2 x_M \cos(wt + \varphi)$$

$$a(2) = -w^2 x_M \cos(2w + \varphi)$$

$$\cos(2w + \varphi) = \cos(2.3\pi + \pi/3) = \cos(19\pi/3) = 0,5$$

$$a(2) = - (3\pi)^2 6 \cos(19\pi/3) = -266,47\text{m/s}^2$$

d) Em $t = 2,0\text{s}$, qual é a fase nesse movimento?

$$\text{Fase} = \Phi(t) = \omega t + \varphi$$

$$\Phi(2) = 2\omega + \varphi = 19\pi/3 = 39,79\text{rad}$$

e) Qual é a frequência deste movimento?

$$f = \omega/2\pi = 3\pi/2\pi = 1,5\text{Hz}$$

f) Qual é o período deste movimento?

$$T = 1/f = 2/3 \text{ s}$$

Capítulo 16 - Halliday, Resnick e Walker - 6ª. edição

- 16 Dois blocos ($m = 1,0\text{kg}$ e $M = 10,0\text{kg}$) e uma única mola ($k = 200\text{N/m}$) estão colocados em uma superfície horizontal sem atrito, como ilustra a figura abaixo. O coeficiente de atrito estático entre os dois blocos é $\mu_E = 0,40$. Qual a máxima amplitude possível do movimento harmônico simples, se não houver deslizamento entre os blocos?

Vamos considerar que na figura ao lado o conjunto está em movimento e passou da posição $x = 0$ (primeira figura) e se encaminha para a posição $x = +x_M$. A força máxima que os blocos exercerão entre si acontecerá quando $x = \pm x_M$ pois nessa situação $a = \pm a_M$.

Se $F(x)$ for a força que a mola exerce no conjunto dos dois blocos, teremos essa força, numa posição genérica, com a forma:

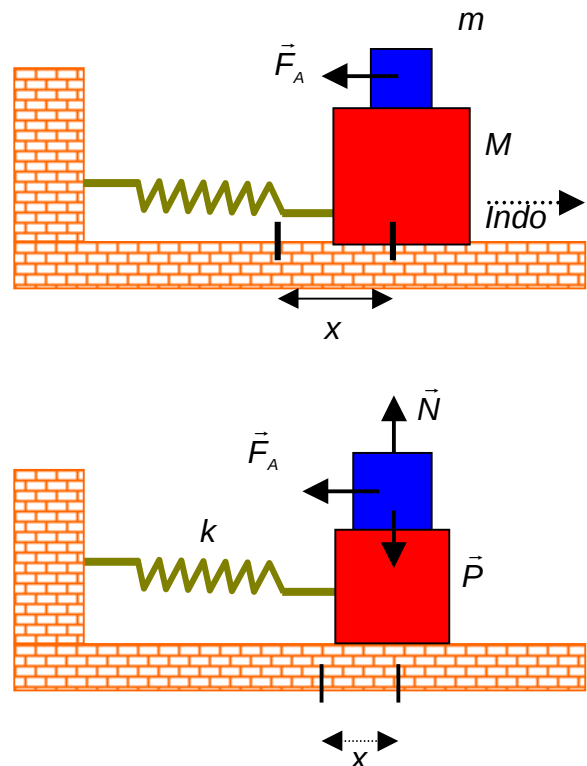
$$F(x) = (m + M) a = k x$$

Como o conjunto está sendo retardado, a tendência do bloco menor é escorregar para frente, daí a força de atrito ser dirigida para trás.

Na posição de elongação máxima da mola, teremos:

$$F_M = (m + M) a_M = k x_M$$

ou seja



$$a_M = \left(\frac{k}{m+M} \right) x_M$$

Se considerarmos isoladamente o bloco menor, teremos que:

$$\begin{cases} F_A = m a_M \\ N = p = mg \end{cases}$$

Mas como $F_A = \mu_E N$, concluímos que:

$$m a_M = \mu_E m g \quad \therefore \quad a_M = \mu_E g$$

Mas

$$a_M = \mu_E g = \left(\frac{k}{m+M} \right) x_M \Rightarrow x_M = \frac{\mu_E (m+M) g}{k}$$

$$x_M = 0,22m = 22cm$$

Capítulo 16 - Halliday, Resnick e Walker - 6ª. edição

18

Um bloco está num pistom que se move verticalmente em um movimento harmônico simples.

- a) Se o MHS tem um período de 1,0s, em que amplitude do movimento o bloco e o pistom irão se separar?

O bloco está sobre o pistom que oscila entre os limites $x = \pm x_M$. Usando a Segunda Lei de Newton, temos que:

$$\vec{N} + \vec{P} = m \vec{a}$$

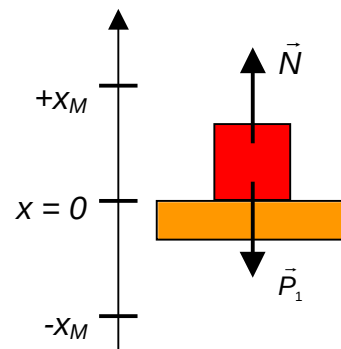
Acima da posição $x = 0$, ou seja para $x \geq 0$, nós temos que $\vec{a} = -\hat{i} a$

Nessa região ($x \geq 0$) a Segunda Lei de Newton toma a forma:

$$N - P = -ma \quad \therefore \quad N = m(g - a)$$

Quando o pistom está subindo desacelerado, depois de passar por $x = 0$, o valor da normal N começa a diminuir, até chegar ao seu valor mínimo em $x = +x_M$. Se a frequência aumentar, a desaceleração também aumentará. Existe um valor limite da desaceleração para a qual o bloco ainda manterá contato com o pistom.

Nesse limite teremos $a = g$ e consequentemente $N = 0$, segundo a equação anterior. Com a maior desaceleração para uma dada frequência acontece nos extremos do movimento, o pistom e o bloco ainda manterão o contato se em



$$x = +x_0, a = g$$

Mas

$$x(t) = x_M \cos(\omega t + \delta)$$

$$a(t_0) = -\omega^2 x_M \cos(\omega t_0 + \delta) = -\omega^2 x_0$$

$$x(t_0) = x_0 \Rightarrow |a(t_0)| = \omega^2 x_0$$

Logo

$$\omega^2 x_0 = g \quad \therefore \quad x_0 = \frac{g}{\omega^2} = g \left(\frac{T}{2\pi} \right)^2$$

$$x_M = 0,248m = 24,8cm$$

- b) Se o pistom tem uma amplitude de $5,0cm$, qual a frequência máxima em que o bloco e o pistom estarão continuamente em contato?

$$x_M = 5cm = 0,05m$$

Do item anterior temos que:

$$x_M = \frac{g}{\omega^2} = \frac{g}{(2\pi f)^2} \Rightarrow f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{x_M}} = 2,22Hz$$

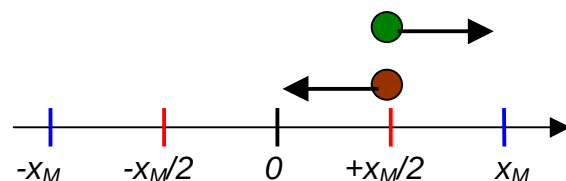
Capítulo 16 - Halliday, Resnick e Walker - 6ª. edição

- 22 Duas partículas executam um movimento harmônico simples com as mesmas amplitudes e frequências ao longo da mesma linha reta. Elas passam uma pela outra, movendo-se em sentidos opostos, cada vez que o seu deslocamento é a metade da amplitude. Qual a diferença de fase entre elas?

As partículas se passam uma pela outra em dois instantes: $t = t_1$ e $t = t_2$.

Quando $t = t_1$ temos que:

$$\begin{cases} x_A(t_1) = x_B(t_1) = \frac{x_M}{2} \\ v_A(t_1) = -v_B(t_1) \end{cases}$$



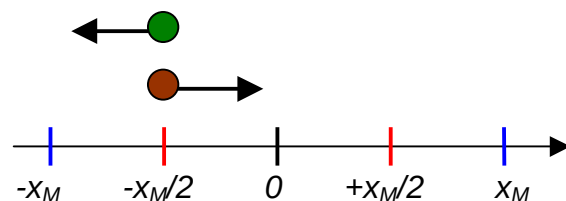
Da primeira equação temos que:

$$x_M \cos(\omega t_1 + \varphi_A) = x_M \cos(\omega t_1 + \varphi_B) = x_M/2$$

ou seja:

$$\omega t_1 + \varphi_A = 2n\pi \pm \pi/3 \quad (1)$$

e



$$\omega t_1 + \varphi_B = 2n\pi \pm \pi/3 \quad (2)$$

Por outro lado:

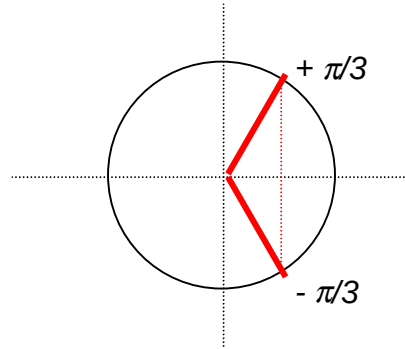
$$v = \frac{dx}{dt}$$

ou seja:

$$v_A(t_1) = -\omega x_M \sin(\omega t_1 + \varphi_A)$$

e

$$v_B(t_1) = -\omega x_M \sin(\omega t_1 + \varphi_B)$$



Considerando que nesse problema as velocidades devem ter sentidos contrários:

$$\sin(\omega t_1 + \varphi_A) = -\sin(\omega t_1 + \varphi_B)$$

Para que a equação anterior juntamente com as equações (1) e (2) sejam válidas simultaneamente, deveremos ter:

$$\Phi_A(t_1) = \omega t_1 + \varphi_A = 2n\pi + \pi/3$$

e

$$\Phi_B(t_1) = \omega t_1 + \varphi_B = 2n\pi - \pi/3$$

onde $\Phi(t)$ é a fase do movimento de oscilação considerado no instante t e φ é a constante de fase.

$$\Delta\Phi = \Phi_A(t_1) - \Phi_B(t_1) = 2\pi/3$$

$$\Delta\Phi = 2\pi/3 = 120^\circ$$

Capítulo 16 - Halliday, Resnick e Walker - 6ª. edição

23

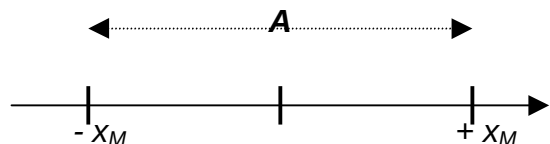
Duas partículas oscilam em um movimento harmônico simples ao longo de um segmento de reta comum de comprimento A . Cada partícula tem um período de $1,5s$, mas diferem em fase de $\pi/6rad$.

a) Qual a distância entre elas, em termos de A , $0,5s$ após a partícula mais atrasada deixar uma das extremidades do percurso?

$$T = 1,5s \Rightarrow \omega = 2\pi/T = 4\pi/3$$

$$\Delta\varphi = \varphi_B - \varphi_A = \pi/6$$

$$\Delta t = t_2 - t_1 = 0,5s$$



$$x_A(t) = x_M \cos(\omega t + \varphi_A)$$

$$x_B(t) = x_M \cos(\omega t + \varphi_B)$$

Em $t = t_1$ a partícula A estará na extremidade, então:

$$x_A(t_1) = x_M \cos(\omega t_1 + \varphi_A) = \pm x_M$$

e isso implica que:

$$(\omega t_1 + \varphi_A) = n\pi$$

Considerando que $t_2 = t_1 + \Delta t$, temos:

$$x_A(t_2) = x_M \cos(\omega t_2 + \varphi_A) =$$

onde

$$\omega t_2 = \omega (t_1 + \Delta t) = \omega t_1 + \omega \Delta t$$

ou seja

$$x_A(t_2) = x_M \cos[(\omega t_1 + \varphi_A) + \omega \Delta t] = x_M \cos[n\pi + \omega \Delta t]$$

e como

$$\omega \Delta t = (4\pi/3) 0,5 = 2\pi/3$$

temos que

$$x_A(t_2) = x_M \cos[n\pi + 2\pi/3]$$

Mas

$$\cos[n\pi + 2\pi/3] = \cos(n\pi)\cos(2\pi/3) - \sin(n\pi)\sin(2\pi/3) = (-1)^{n+1}(0,5)$$

logo

$$x_A(t_2) = x_M \cos[n\pi + 2\pi/3] = (-1)^{n+1}(0,5)$$

Por outro lado

$$x_B(t_2) = x_M \cos(\omega t_2 + \varphi_B)$$

Como

$$\varphi_B = \varphi_A + \Delta\varphi$$

temos que

$$\omega t_2 + \varphi_B = \omega (t_1 + \Delta t) + (\varphi_A + \Delta\varphi) = (\omega t_1 + \varphi_A) + (\omega \Delta t + \Delta\varphi)$$

ou seja:

$$\omega t_2 + \varphi_B = n\pi + (\omega \Delta t + \Delta\varphi)$$

onde

$$\omega \Delta t = (4\pi/3) 0,5 = 2\pi/3$$

$$\Delta\varphi = \pi/6$$

Logo

$$\omega t_2 + \varphi_B = n\pi + 5\pi/6$$

$$x_B(t_2) = x_M \cos[n\pi + 5\pi/6]$$

Mas

$$\cos[n\pi + 5\pi/6] = \cos(n\pi)\cos(5\pi/6) - \sin(n\pi)\sin(5\pi/6) = (-1)^{n+1} \frac{\sqrt{3}}{2}$$

ou seja:

$$x_B(t_2) = x_M \cos[n\pi + 5\pi/6] = (-1)^{n+1} \frac{\sqrt{3}}{2}$$

A distância Δx que separa as duas partículas será dada por:

$$\Delta x = |x_A(t_2) - x_B(t_2)| = x_M |(-1)^{n+1}(0,5) - (-1)^{n+1} \frac{\sqrt{3}}{2}|$$

$$\Delta x = x_M |0,5 - 0,866| = 0,366 x_M$$

Mas como

$$A = 2 x_M$$

$$\Delta x = 0,183 A$$

- b) Elas estão se movendo no mesmo sentido, em direção uma da outra ou estão se afastando?

$$v_A(t_2) = w x_M \text{sen}(wt_2 + \varphi_A) = -w x_M \text{sen}(2\pi/3 + n\pi)$$

$$v_B(t_2) = w x_M \text{sen}(wt_2 + \varphi_B) = -w x_M \text{sen}(5\pi/6 + n\pi)$$

Mas

$$\text{sen}(\alpha + \beta) = \text{sen}\alpha \cos\beta + \cos\alpha \text{sen}\beta$$

logo

$$\text{sen}(2\pi/3 + n\pi) = \text{sen}(2\pi/3)\cos(n\pi) + \text{sen}(n\pi)\cos(2\pi/3) = (-1)^n \text{sen}(2\pi/3)$$

ou seja

$$\text{sen}(2\pi/3 + n\pi) = (-1)^{n+1} \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Por outro lado:

$$\text{sen}(5\pi/6 + n\pi) = \text{sen}(5\pi/6)\cos(n\pi) + \text{sen}(n\pi)\cos(5\pi/6) = (-1)^n \text{sen}(5\pi/6)$$

ou seja

$$\text{sen}(5\pi/6 + n\pi) = (-1)^{n+1} \frac{1}{2}$$

e finalmente:

$$\begin{cases} v_A(t_2) = (-1)^{n+2} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ v_B(t_2) = (-1)^{n+2} \frac{1}{2} \end{cases}$$

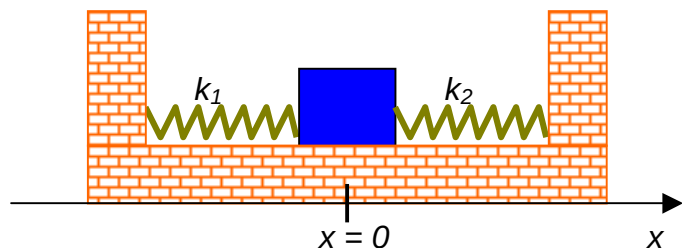
Como as duas partículas têm velocidades com mesmo sinal, elas estão se movendo no mesmo sentido.

Capítulo 16 - Halliday, Resnick e Walker - 6ª. edição

- 24 Duas molas idênticas estão ligadas a um bloco de massa m e aos dois suportes mostrados na figura ao lado. Mostre que a frequência de oscilação na superfície sem atrito é:

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{2k}{m}}$$

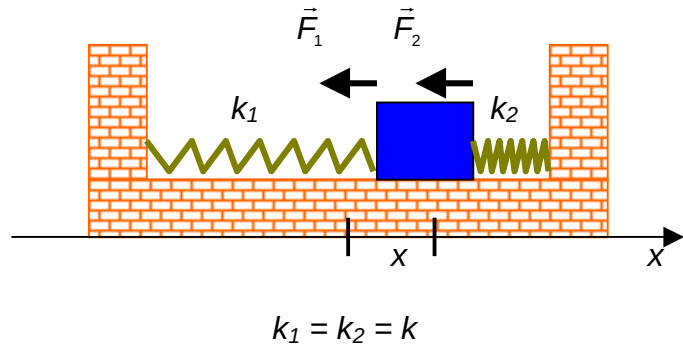
Vamos distinguir as molas com os rótulos k_1 e k_2 . Considerando que o corpo deslocou-se de uma



distância x para a direita, à partir de sua posição de equilíbrio em $x=0$, temos que:

$$\vec{F}_1 = -k_1 x \hat{i}$$

$$\vec{F}_2 = -k_2 x \hat{i}$$



Se considerarmos que o corpo vai sentir a ação das duas molas como se fosse apenas uma mola, teremos:

$$\vec{F} = -\kappa x \hat{i}$$

Mas de acordo com a suposição, a força equivalente é igual à soma das duas forças, e portanto:

$$\kappa = k_1 + k_2 \quad \therefore \quad w = \sqrt{\frac{\kappa}{m}} = \sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m}}$$

Mas $k_1 = k_2 = k$, ou seja $\kappa = 2k$, e desse modo:

$$w = \sqrt{\frac{\kappa}{m}} = \sqrt{\frac{2k}{m}} \Rightarrow f = \frac{w}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{2k}{m}}$$

Capítulo 16 - Halliday, Resnick e Walker - 6ª. edição

- 25 Suponha que as duas molas da figura do *problema 33* têm constantes diferentes k_1 e k_2 . Mostre que a frequência f das oscilações do bloco é então dada por:

$$f = \sqrt{f_1^2 + f_2^2}$$

Como já foi deduzido

$$w = \sqrt{\frac{\kappa}{m}} = \sqrt{\frac{2k}{m}} \Rightarrow f = \frac{w}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{2k}{m}}$$

logo:

$$w^2 = \frac{k_1}{m} + \frac{k_2}{m} = w_1^2 + w_2^2$$

ou seja:

$$(2\pi)^2 f^2 = (2\pi)^2 (f_1^2 + f_2^2) \Rightarrow f = \sqrt{f_1^2 + f_2^2}$$

Capítulo 16 - Halliday, Resnick e Walker - 6ª. edição

- 27 Duas molas estão ligadas entre si e conectadas a determinada massa m , como mostra figura ao lado. A superfície é sem atrito. Se ambas as molas tiverem uma constante de elasticidade k , mostre que a frequência da oscilação de m é dada por:

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{2m}}$$

Vamos distinguir as molas com os rótulos k_1 e k_2 . Vamos considerar que a mola 1 se distende de x_1 e a mola 2 se distende de x_2 , e a distensão do conjunto é x . Logo:

$$x = x_1 + x_2$$

Diante destas distensões, surgem as forças representadas na figura ao lado:

$\vec{F}_3$ = força que a parede faz na mola da esquerda. $\vec{F}_3'$ = força que a mola da esquerda faz na parede. De acordo com a Terceira Lei de Newton $\vec{F}_3' = -\vec{F}_3$.

A convenção anterior será utilizada para todos os pares de forças.

Quando temos apenas uma mola substituindo as duas molas mencionadas:

$$\vec{R}_1 = -\hat{i} k x$$

Como as molas têm massa desprezível, é nula a resultante das forças que nela atuam, ou seja:

$$\vec{R}_1' + \vec{R}_2 = 0$$

Pela Terceira Lei de Newton:

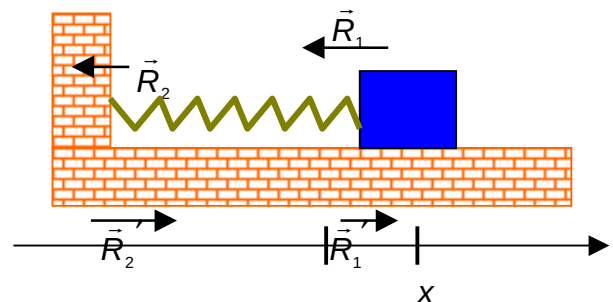
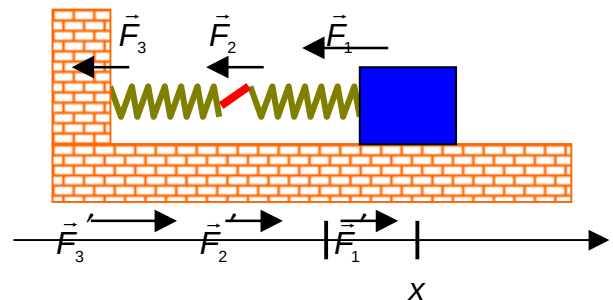
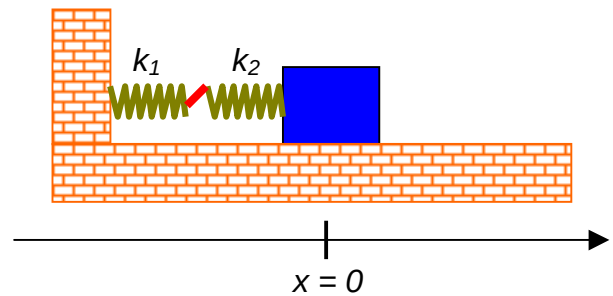
$$\begin{cases} \vec{R}_1 = -\vec{R}_1' \\ \vec{R}_2 = \vec{R}_2' \end{cases}$$

Usando as três últimas equações, constatamos que:

$$\vec{R}_1 = -\vec{R}_2'$$

ou seja: a força que a mola faz no bloco tem o mesmo módulo da força que esta mola faz na parede. Estamos aptos a fazer a comparação entre a mola única e o conjunto de molas no que diz respeito as interações desses sistemas com a parede e o bloco.

Por outro lado, considerando o deslocamento de cada mola, teremos que:



$$\begin{cases} \vec{F}'_1 = +\hat{i} k_1 x_1 \\ \vec{F}'_2 = +\hat{i} k_2 x_2 \end{cases}$$

Se observarmos as forças que atuam no sistema das duas molas encontramos que:

$$\begin{cases} \vec{F}_1 = -\vec{F}'_1 \\ \vec{F}_2 = -\vec{F}'_2 \\ \vec{F}_3 = -\vec{F}'_3 \end{cases} \quad e \quad \begin{cases} \vec{F}'_1 + \vec{F}_2 = 0 \\ \vec{F}'_2 + \vec{F}_3 = 0 \end{cases}$$

ou seja: todas as forças envolvidas têm o mesmo módulo, e portanto:

$$x = x_1 + x_2 \Rightarrow \frac{R_1}{k} = \frac{F'_1}{k_1} + \frac{F'_2}{k_2} \Rightarrow \frac{1}{k} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}$$

logo:

$$k = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}$$

e então:

$$f = \frac{w}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\kappa}{m}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{m} \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}}$$

Se $k_1 = k_2 = k$

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{2m}}$$

Capítulo 16 - Halliday, Resnick e Walker - 6ª. edição

29	Uma mola uniforme, cujo comprimento de repouso é L , tem uma constante de força k . A mola é cortada em duas partes com comprimentos de repouso L_1 e L_2 .
----	---

a) Quais as correspondentes constantes de força k_1 e k_2 em termos de n e k .

$$L = L_1 + L_2$$

Quando a mola se distende de x , os pedaços distender-se-ão respectivamente de x_1 e x_2 , tal que:

$$x = x_1 + x_2$$

Como a mola é uniforme, podemos supor que ao distender-se o comprimento dos pedaços manterão a mesma relação de proporcionalidade. Se D é o comprimento da mola quando distendida, temos que:

$$D = L + x \Rightarrow D_1 = nD_2 \quad \therefore \quad L_1 + x_1 = n(L_2 + x_2)$$

ou seja:

$$x_1 = n x_2$$

logo

$$L = L_1 + L_2 = nL_2 + L_2 = (n+1)L_2$$

e

$$x = x_1 + x_2 = nx_2 + x_2 = (n+1)x_2$$

No *problema 35* temos duas molas alinhadas e formando um conjunto, e encontramos que todas as forças envolvidas têm o mesmo módulo. Assim:

$$F = F_1 = F_2 \quad \therefore \quad kx = k_1 x_1 = k_2 x_2$$

Logo

$$kx = k_1 x_1 \Rightarrow k[(n+1)x_2] = k_1[nx_2] \quad \therefore \quad k_1 = k[(n+1)/n]$$

e

$$kx = k_2 x_2 \Rightarrow k[(n+1)x_2] = k_2 x_2 \quad \therefore \quad k_2 = k(n+1)$$

- b)** Se um bloco for ligado à mola original, oscila com frequência f . Se esta última for substituída por pedaços L_1 ou L_2 , a frequência correspondente é f_1 ou f_2 . Ache f_1 e f_2 em termos de f .

$$\begin{cases} f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} \\ f_1 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k_1}{m}} \\ f_2 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k_2}{m}} \end{cases}$$

$$\frac{f_1}{f} = \sqrt{\frac{k_1}{k}} = \sqrt{\frac{n+1}{n}} \quad \therefore \quad f_1 = f \sqrt{\frac{n+1}{n}}$$

$$\frac{f_2}{f} = \sqrt{\frac{k_2}{k}} = \sqrt{n+1} \quad \therefore \quad f_2 = f \sqrt{n+1}$$

Capítulo 16 - Halliday, Resnick e Walker - 6ª. edição

36

Um bloco de massa M , em repouso numa mesa horizontal sem atrito, é ligado a um suporte rígido por uma mola de constante k . Uma bala de massa m e velocidade v atinge o bloco como mostrado na figura à seguir. A bala penetra no bloco.

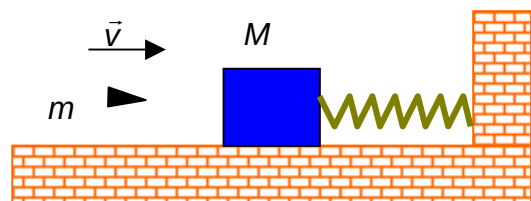
- a)** Determine a velocidade do bloco imediatamente após a colisão.

Usando a conservação do momento linear, temos que:

$$mv = (m + M) V$$

ou seja:

$$V = \left(\frac{m}{m + M} \right) v$$



- b) Determine a amplitude do movimento harmônico simples resultante.

A energia cinética do conjunto bala + massa logo após a colisão transformar-se-á em energia potencial elástica quando a mola for comprimida e o bloco para à direita. Logo:

$$\frac{1}{2}(m+M)V^2 = \frac{1}{2}kx_M^2 \Rightarrow x_M^2 = \left(\frac{m+M}{k}\right)V^2 = \left(\frac{m+M}{k}\right)\left[\left(\frac{m}{m+M}\right)v\right]^2$$

ou seja:

$$x_M = \sqrt{\frac{m^2 v^2}{k(m+M)}}$$

Capítulo 16 - Halliday, Resnick e Walker - 6ª. edição

37 Quando o deslocamento no movimento harmônico simples é metade da amplitude x_M

- a) Que fração da energia total é cinética? Que fração da energia total é potencial?

$$x(t) = x_M \cos(\omega t + \varphi)$$

$$\begin{cases} U(t) = \frac{1}{2}kx(t)^2 = \frac{1}{2}kx_M^2 \cos^2(\omega t + \varphi) \\ K(t) = \frac{1}{2}mv(t)^2 = \frac{1}{2}kx_M^2 \sin^2(\omega t + \varphi) \end{cases}$$

Para um dado instante $t = t_0$ o deslocamento é metade da amplitude, logo:

$$x(t_0) = x_M/2 \Rightarrow \cos(\omega t_0 + \varphi) = 1/2$$

A fase $\Phi(t_0)$ tem a forma:

$$\Phi(t_0) = \omega t_0 + \varphi = \pi/3$$

A energia total, ou energia mecânica E é a soma das energias cinética e potencial:

$$E = K + U = \frac{1}{2}kx_M^2$$

$$\begin{cases} U(t_0) = \frac{1}{2}kx_M^2 \cos^2\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}kx_M^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}E \\ K(t_0) = \frac{1}{2}kx_M^2 \sin^2\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}kx_M^2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}E \end{cases}$$

- c) Com que deslocamento, em termos da amplitude, a energia do sistema é metade cinética e metade potencial?

Para um dado instante $t = t_1$ a energia cinética é igual à energia potencial e cada uma delas é a metade da metade da energia mecânica:

$$2E = \frac{1}{2} k x_M^2 \cos^2(\omega t_1 + \varphi) = \frac{1}{2} k x_M^2 \sin^2(\omega t_1 + \varphi)$$

Desse modo

$$\cos(\omega t_1 + \varphi) = \pm \sin(\omega t_1 + \varphi)$$

$$\Phi(t_1) = \omega t_1 + \varphi = n\pi \pm \pi/4$$

Logo:

$$x(t_1) = x_M \cos(\omega t_1 + \varphi) = x_M \cos(\pi/4)$$

$$\frac{x(t_1)}{x_M} = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Capítulo 16 - Halliday, Resnick e Walker - 6ª. edição

41

A roda de balanço de um relógio oscila com uma amplitude angular de $\pi \text{ rad}$ e um período de $0,5 \text{ s}$.

- a) Ache a velocidade angular máxima da roda.

$$\theta(t) = \theta_M \cos(\omega t + \varphi)$$

$$\theta_M = \pi \text{ rad}$$

$$T = 0,5 \text{ s}$$

$$\dot{\theta}(t) \equiv \frac{d\theta(t)}{dt} = -\omega \theta_M \sin(\omega t + \varphi)$$

$$[\dot{\theta}(t)]_M = \omega \theta_M = \frac{2\pi}{T} \theta_M = \left(\frac{2\pi}{1/2}\right) \pi \quad \therefore [\dot{\theta}(t)]_M = 4\pi^2$$

- b) Ache a velocidade angular da roda quando o seu deslocamento for de $\pi/2 \text{ rad}$. Vamos considerar que o deslocamento tem o valor estipulado quando $t = t_1$. Desse modo:

$$\theta(t_1) = \theta_M \cos(\omega t_1 + \varphi) = \frac{\pi}{2}$$

$$\cos(\omega t_1 + \varphi) = \frac{\pi/2}{\theta_M} = \frac{1}{2} \quad \therefore \omega t_1 + \varphi = \pm \frac{\pi}{3}$$

Logo:

$$\dot{\theta}(t_1) = -\omega \theta_M \sin(\omega t_1 + \varphi) = -\left(\frac{2\pi}{T}\right) \theta_M \sin\left(\pm \frac{\pi}{3}\right) = -\left(\frac{2\pi}{0,5}\right) \pi \left(\pm \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\dot{\theta}(t_1) = \mp 2\pi^2 \sqrt{3} \text{ rad/s}$$

- c) Ache a aceleração angular da roda quando o seu deslocamento for de $\pi/4$ rad .

Vamos considerar que o deslocamento tem o valor estipulado quando $t = t_2$.
Desse modo:

$$\theta(t_2) = \theta_M \cos(\omega t_2 + \varphi) = \frac{\pi}{4}$$

$$\cos(\omega t_2 + \varphi) = \frac{\pi/4}{\theta_M} = \frac{1}{4} \quad \therefore \quad \omega t_2 + \varphi = \pm 1,318 \text{ rad}$$

$$\dot{\theta}(t_2) = -\omega \theta_M \sin(\omega t_2 + \varphi) = -\left(\frac{2\pi}{T}\right) \theta_M \sin(\pm 1,318) = -\left(\frac{2\pi}{0,5}\right) \pi (\pm 0,968)$$

$$\dot{\theta}(t_1) = \mp 3,872 \pi^2 \text{ rad/s}$$

Capítulo 16 - Halliday, Resnick e Walker - 6ª. edição

- 46 Um pêndulo físico consiste em um disco sólido uniforme (de massa M e raio R), suportado num plano vertical por um eixo localizado a uma distância d do centro do disco - ver figura à seguir. O disco é deslocado um pequeno ângulo e liberado. Ache uma expressão para o movimento harmônico simples resultante.

Seja $\vec{P}$ o peso do disco e $\vec{T}$ a força que o eixo exerce sobre esse disco. Quando esse sistema está em repouso a resultante das forças e o torque resultante são nulos. Quando ele começa a oscilar, o torque resultante é diferente de zero, e tem a forma:

$$\tau = -P d \sin\theta = I\alpha$$

onde I é o momento de inércia do disco em relação ao eixo de giro. Por outro lado:

$$I = I_{CM} + Md^2$$

$$I = \frac{1}{2}MR^2 + Md^2 = M\left(\frac{R^2}{2} + d^2\right)$$

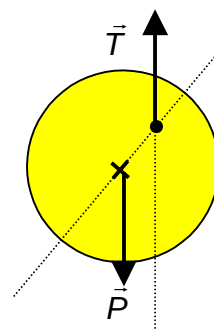
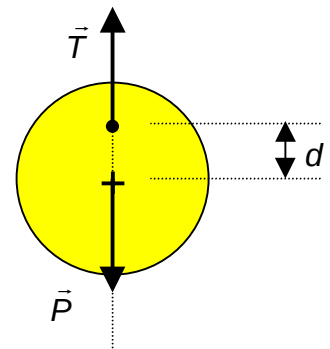
Da primeira equação temos que:

$$\alpha + \frac{Pd}{I} \sin\theta = 0$$

Para pequenas oscilações podemos aproximar o seno pelo seu argumento, logo:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \left(\frac{Mgd}{I}\right)\theta = 0 \quad \therefore \quad \omega^2 = \frac{Mgd}{I}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{Mgd}{I}} = \sqrt{\frac{2gd}{R^2 + 2d^2}}$$



- 50 Um cilindro sólido está ligado a uma mola horizontal sem massa de forma que ele possa rolar, sem deslizamento, sobre uma superfície horizontal. A constante da mola é $k = 3,0 \text{ N/m}$. Se o sistema for liberado de uma posição de repouso em que a mola esteja distendida de $0,25 \text{ m}$,

Mostre que nessas condições o centro de massa do cilindro executa um movimento harmônico simples com período

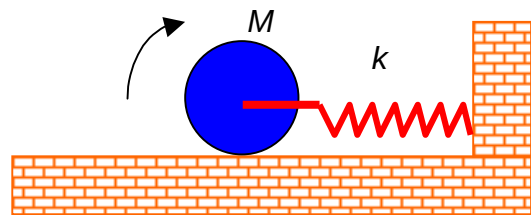
$$T = 2\pi \sqrt{\frac{3M}{2k}}$$

onde M é a massa do cilindro. (Sugestão: Ache a derivada da energia mecânica total em relação ao tempo) .

$$I_{CM} = MR^2/2$$

$$K = K_{Rot} + K_{Trans}$$

$$K = \frac{1}{2} I_{CM} \omega^2 + \frac{1}{2} M v_{CM}^2$$



Mas

$$v_{CM} = \omega R$$

$$K = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} MR^2 \right) \frac{v_{CM}^2}{R^2} + \frac{1}{2} M v_{CM}^2 = \frac{1}{4} M v_{CM}^2 + \frac{1}{2} M v_{CM}^2 = \frac{3}{4} M v_{CM}^2$$

$$\begin{cases} K_{Trans} = \frac{1}{2} M v_{CM}^2 \\ K_{Rot} = \frac{1}{4} M v_{CM}^2 \end{cases}$$

$$E = K + U = \frac{3}{4} M v_{CM}^2 + \frac{1}{2} k x^2$$

Como o sistema é conservativo a energia mecânica não varia, e portanto:

$$\frac{dE}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{3}{4} M \left(2 v_{CM} \frac{dv_{CM}}{dt} \right) + \frac{1}{2} k \left(2 x \frac{dx}{dt} \right) = 0$$

ou seja:

$$\left(\frac{3}{2} M \frac{d^2 x}{dt^2} + k x \right) v_{CM} = 0$$

Mas como $v_{CM} \neq 0$, temos que:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \left(\frac{2k}{3M} \right) x = 0$$

O sistema considerado obedece a equação diferencial acima, e portanto ele tem frequência angular natural de:

$$\omega = \sqrt{\frac{2k}{3M}} \Rightarrow T = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{3M}{2k}}$$

- a) Ache a energia cinética translacional do cilindro quando ele passa pela posição de equilíbrio.

No ponto de elongação máxima a posição é dada por x_M e nessa ocasião a velocidade é nula. No ponto de equilíbrio a elongação é nula e a velocidade é máxima com o valor v_M . Desse modo, considerando a conservação da energia mecânica:

$$E = \frac{1}{2} k x_M^2 = \frac{3}{4} M v_{CM}^2 \quad \therefore \quad v_{CM}^2 = \frac{2k}{3M} x_M^2$$

e finalmente:

$$K_{Trans} = \frac{1}{2} M v_{CM}^2 = \frac{1}{2} M \left(\frac{2k}{3M} x_M^2 \right) \quad \therefore \quad K_{Trans} = \frac{1}{3} k x_M^2$$

- b) Ache a energia rotacional do cilindro quando ele passa pela posição de equilíbrio.

$$K_{Rot} = \frac{1}{4} M v_{CM}^2 \quad \therefore \quad K_{Rot} = \frac{1}{6} k x_M^2$$

Capítulo 16 - Halliday, Resnick e Walker - 6ª. edição

52

Uma haste de comprimento L oscila como um pêndulo físico, com eixo no ponto O , como mostra a figura à seguir.

- a) Deduza uma expressão para o período do pêndulo em termos de L e x a distância do ponto de suspensão ao centro de massa do pêndulo.

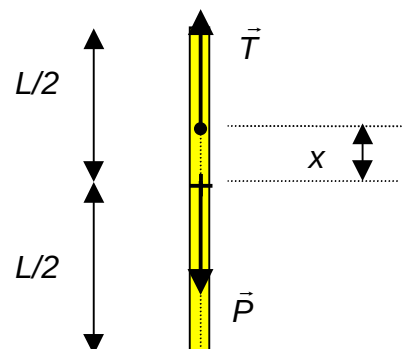
Seja $\vec{P}$ o peso da haste e $\vec{T}$ a força que o eixo exerce sobre essa haste. Quando esse sistema está em repouso a resultante das forças e o torque resultante são nulos. Quando ela começa a oscilar, o torque resultante é diferente de zero, e tem a forma:

$$\tau = -P x \sin \theta = I \alpha$$

onde I é o momento de inércia da haste em relação ao eixo de giro. Por outro lado:

$$I = I_{CM} + Mx^2$$

$$I = \frac{1}{12} ML^2 + Mx^2 = M \left(\frac{L^2}{12} + x^2 \right)$$



Da primeira equação temos que:

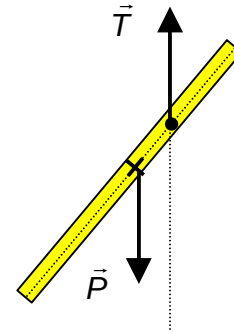
$$\alpha + \frac{Px}{I} \sin \theta = 0$$

Para pequenas oscilações podemos aproximar o seno pelo seu argumento, logo:

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} + \left(\frac{Mgx}{I} \right) \theta = 0 \quad \therefore \quad w^2 = \frac{Mgx}{I}$$

$$w = \sqrt{\frac{Mgx}{I}} = \sqrt{\frac{12gx}{L^2 + 12x^2}}$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L^2 + 12x^2}{12gx}}$$



b) Para qual valor de x/L o período é mínimo?

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L^2 \left[1 + 12 \left(\frac{x}{L} \right)^2 \right]}{L \left[12g \left(\frac{x}{L} \right) \right]}} = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}} \sqrt{\frac{1 + 12 \left(\frac{x}{L} \right)^2}{12 \left(\frac{x}{L} \right)}}$$

Vamos definir:

$$T_0 \equiv 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}} \quad \text{e} \quad u = \frac{x}{L}$$

logo:

$$T(u) = T_0 \sqrt{\frac{1 + 12u^2}{12u}} = T_0 \left(u + \frac{1}{12u} \right)^{1/2}$$

$$\frac{dT}{du} = T_0 \left(-\frac{1}{2} \right) \left(u + \frac{1}{12u} \right)^{-1/2} \left(1 - \frac{1}{12u^2} \right)$$

$$\frac{dT}{du} = -\frac{T_0}{2} \frac{1 - \frac{1}{12u^2}}{\left(u + \frac{1}{12u} \right)^{1/2}} = 0 \quad \Rightarrow \quad 1 - \frac{1}{12u^2} = 0 \quad \therefore \quad u_M = \frac{1}{\sqrt{12}}$$

$$u_M = \frac{x_M}{L} = \frac{1}{\sqrt{12}} \quad \Rightarrow \quad x_M = \frac{L}{\sqrt{12}}$$

c) Mostre que se $L = 1,0m$, e $g = 9,8m/s^2$, esse mínimo é $1,53s$.

$$T_M = T(u_M) = T_0 \left(u_M + \frac{1}{12u_M} \right)^{1/2}$$

$$T_M = 1,519s$$

Capítulo 16 - Halliday, Resnick e Walker - 6ª. edição

- 53 Uma haste longa e uniforme de comprimento L e massa m roda livremente no plano horizontal em torno de um eixo vertical, através de seu centro. Uma determinada mola com constante de força k é ligada horizontalmente entre um extremidade da haste e uma parede fixa, conforme figura à seguir. Quando a haste está em equilíbrio fica paralela à parede.
Qual o período das pequenas oscilações que resultam, quando a haste é ligeiramente girada e liberada?

Quando a haste se desloca de um ângulo θ um ponto de sua extremidade traça um arco de comprimento s , e este ponto está distante x da posição de equilíbrio.

A mola exerce uma força F na haste e essa força produz um torque τ

$$\tau = -F (L/2) \cos\theta$$

Para pequenas oscilações podemos aproximar $\cos\theta \approx 1$, logo

$$\tau = -F (L/2)$$

Mas $F = k x$, e como θ é pequeno podemos aproximar a corda (x) pelo arco ($s = \theta \cdot L/2$), ou seja:

$$x \approx s = \theta (L/2)$$

Desse modo:

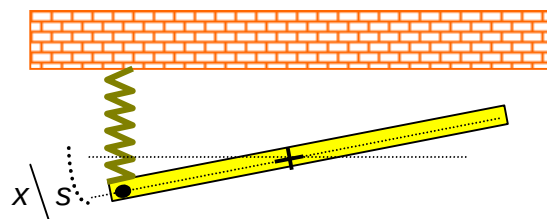
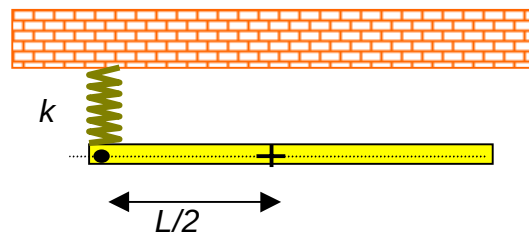
$$\tau = -k \cdot x \cdot \frac{L}{2} \approx -k \left(\frac{L}{2} \theta \right) \frac{L}{2} \quad \therefore \quad \tau = - \left(\frac{kL^2}{4} \right) \theta$$

Mas, por outro lado:

$$\tau = I\alpha = \left(\frac{mL^2}{12} \right) \ddot{\theta}$$

ou seja:

$$\tau = \left(\frac{mL^2}{12} \right) \ddot{\theta} = - \left(\frac{kL^2}{4} \right) \theta \quad \therefore \quad \ddot{\theta} + \left(\frac{3k}{m} \right) \theta = 0$$



e portanto:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{3k}}$$

Capítulo 16 - Halliday, Resnick e Walker - 6ª. edição

58

Uma roda gira livremente em torno de seu eixo fixo. Uma mola está ligada a um de seus raios, a uma distância r do eixo, como mostra a figura à seguir.

- a) Considerando que a roda é um aro de raio R e massa m , obtenha a frequência angular de pequenas oscilações deste sistema em termos de m , R , r e a constante da mola k .

Como no problema 75, temos que:

$$\tau = -F r \cos\theta \approx -F r$$

Mas

$$F = kx \approx kr\theta$$

Logo

$$\tau = -(kr\theta)r = -kr^2\theta$$

Mas por outro lado:

$$\tau = I\alpha = (mR^2)\ddot{\theta}$$

ou seja:

$$\tau = (mR^2)\ddot{\theta} = -kr^2\theta \quad \therefore \quad \ddot{\theta} + \left(\frac{kr^2}{mR^2}\right)\theta = 0$$

$$w^2 = \frac{k}{m} \left(\frac{r}{R}\right)^2 = w_0^2 \left(\frac{r}{R}\right)^2 \quad \therefore \quad w = w_0 \frac{r}{R}$$

- b) Como mudaria o resultado se $r = R$?

Quando $r = R$, teremos:

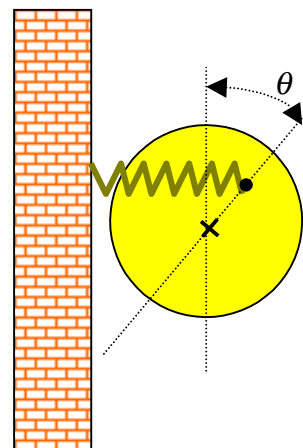
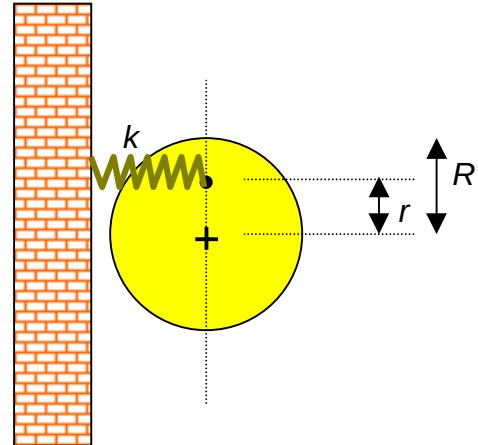
$$w = w_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

- c) Como mudaria o resultado se $r = 0$?

Se $r = 0$, a mola estará fixa no eixo, e conseqüentemente não exercerá influência na possível oscilação. Da equação que deduzimos para a frequência em função dos parâmetros chegamos ao resultado que

$$w = 0$$

nessa situação.



Notas de Aula de Física

17. ONDAS I - ONDAS EM MEIOS ELÁSTICOS.....	2
ONDAS E PARTÍCULAS	2
ONDAS	2
ONDAS TRANSVERSAIS E LONGITUDINAIS	2
ONDAS PROGRESSIVAS	3
COMPRIMENTO DE ONDA E FREQUÊNCIA	4
VELOCIDADE DE PROPAGAÇÃO DE UMA ONDA	5
VELOCIDADE DE UMA ONDA NUMA CORDA ESTICADA.....	6
ENERGIA E POTÊNCIA NUMA ONDA PROGRESSIVA	7
O PRINCÍPIO DA SUPERPOSIÇÃO.....	8
INTERFERÊNCIA - ONDAS NO MESMO SENTIDO	8
INTERFERÊNCIA - ONDAS EM SENTIDO CONTRÁRIO	9
<i>Reflexão de ondas na extremidade de uma corda.....</i>	<i>11</i>
ONDAS ESTACIONÁRIAS E RESSONÂNCIA.....	11
SOLUÇÃO DE ALGUNS PROBLEMAS	13
05.....	13
"09".....	13
"11".....	15
12.....	15
13.....	16
"15".....	16
20.....	16
23.....	17
27.....	19
32.....	20
34.....	20
35.....	21
"38".....	21
40.....	22

17. Ondas I - Ondas em meios elásticos

Quando você joga uma pedra no meio de um lago, ao se chocar com a água ela criará uma onda que se propagará em forma de um círculo de raio crescente, que se afasta do ponto de choque da pedra. As ondas também podem se propagar em uma corda esticada, presa por suas extremidades; se introduzirmos uma perturbação num ponto qualquer dessa ela se propagará ao longo da corda. Esses são dois exemplos de ondas que necessitam de um meio para se propagar.

O som necessita de um meio para se propagar. A luz também é uma onda, e em particular uma onda eletromagnética. Ondas eletromagnéticas podem se propagar em um meio ou no vácuo.

Ondas e partículas

Escrever uma carta ou usar o telefone são duas maneiras de se entrar em contato com uma amiga numa cidade distante.

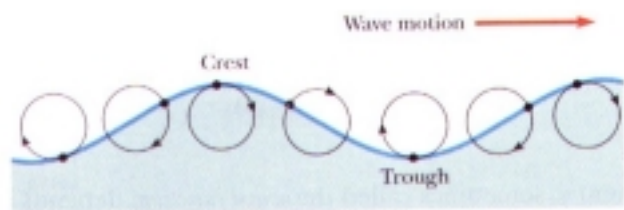
A primeira opção (a carta) envolve o conceito de partícula. Um objeto material se desloca de um ponto para outro, carregando consigo a informação e energia.

A segunda opção (o telefone) envolve o conceito de onda. Numa onda, informação e energia se deslocam de um ponto para outro, mas nenhum objeto material está realizando esta viagem. Em uma onda não existe o transporte de matéria

Ondas

As ondas no mar movem-se com velocidade perceptível. Mas cada partícula de água meramente oscila em torno de seu ponto de equilíbrio.

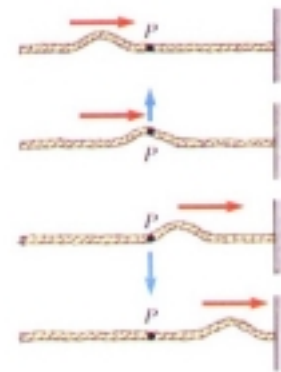
As partículas descrevem um movimento circular e temos uma combinação de um movimento na direção de movimento da onda com um movimento perpendicular à direção de movimento da onda.



Ondas transversais e longitudinais

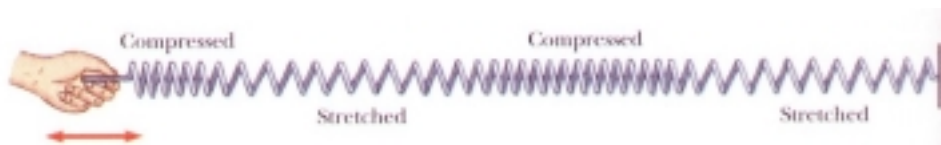
Inicialmente a corda está esticada horizontalmente e em repouso. Introduz-se uma perturbação de modo a se criar uma corcova na corda, e a onda dessa forma se propaga. Depois da passagem da perturbação por um dado pedaço da corda ela retornará a sua situação original de repouso.

Numa corda esticada temos a propagação de ondas transversais. Nas ondas transversais, o meio no qual a onda se propaga oscila na direção perpendicular à direção de propagação da onda. Se isolarmos para observação um elemento de corda, ele oscilará para cima e para baixo enquanto a onda se propagará horizontalmente.



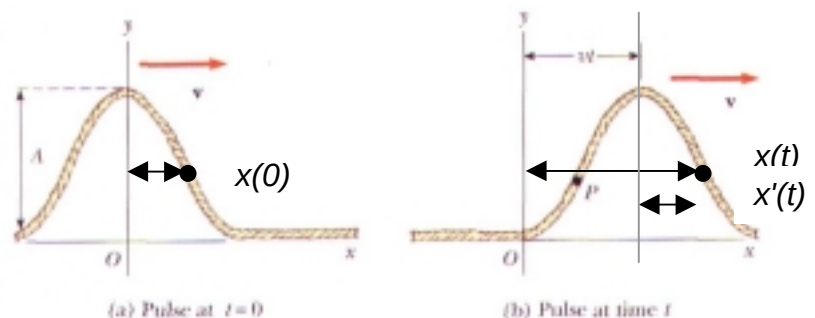
Por outro lado, se considerarmos uma mola, teremos a propagação de ondas longitudinais. Nas ondas longitudinais, o meio no qual a onda se propaga oscila na direção de propagação da onda.

Um exemplo típico de onda longitudinal é mostrado ao lado, onde pulsos periódicos estão sendo comunicados à uma mola



Ondas progressivas

Vamos considerar um pulso em forma de corcova se propagando em uma corda. No instante $t = 0$, o pulso tem o formato da esquerda e num instante t posterior o pulso manteve o mesmo formato, mas se moveu para a direita.



A função que descreve o formato da corda em $t = 0$ é dada por:

$$y(x, 0) = f(x)$$

Num instante posterior t , a função que descreverá a forma da corda é dada por:

$$y(x, t) = f(x')$$

Se o pulso na corda move-se com velocidade com velocidade v , depois de um tempo t , todos os pontos da corcova mover-se-ão de uma distância vt .

Se estivermos observando um dado ponto específico da corcova, por exemplo onde ela tem metade do valor máximo. Em $t = 0$ esse ponto está distante de x da coordenada do ponto de máxima altura, mas num tempo t posterior ele estará distante x' do máximo, que se moveu de vt com toda a corcova. A relação entre essas grandezas é tal que:

$$x = x' + vt \quad \Rightarrow \quad x' = x - vt$$

Desse modo teremos que para uma onda progressiva que se move no sentido positivo do eixo x ,

$$y(x, t) = f(x - vt)$$

Uma onda progressiva, independente da sua forma, depende de x e t como mostrado na equação anterior.

Por outro lado, se tivéssemos uma onda progressiva viajando para a esquerda (quer dizer na direção negativa do eixo x), ela teria uma dependência funcional em x e t da forma:

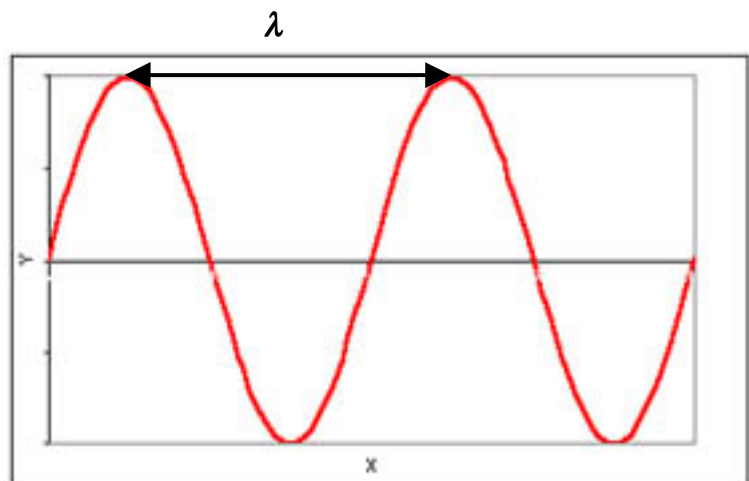
$$y(x, t) = g(x + vt)$$

Se tivéssemos ondas progressivas viajando nos dois sentidos, elas seriam representadas funcionalmente por:

$$y(x, t) = f(x - vt) + g(x + vt)$$

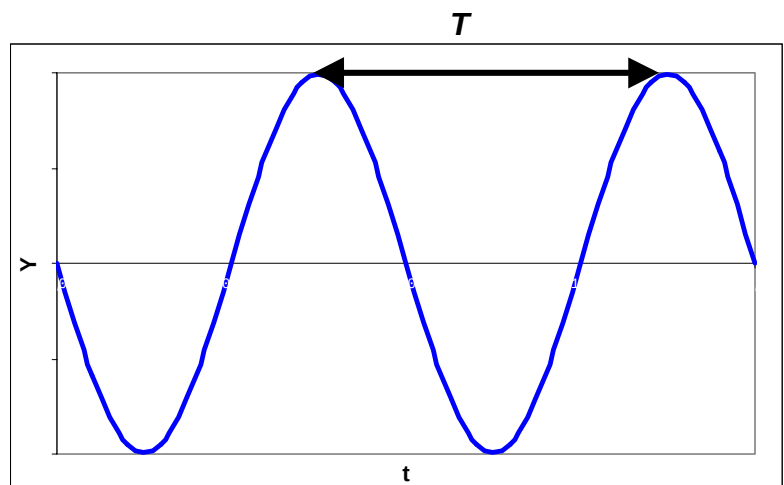
Comprimento de onda e frequência

Se estivermos observando a propagação de uma onda harmônica em uma corda, denominamos comprimento de onda λ distância entre dois pontos equivalentes consecutivos. Na figura ao lado consideramos o comprimento de onda como a distância entre dois máximos consecutivos.



Se estivermos observando um pequeno pedaço da corda enquanto uma onda harmônica se propaga, notaremos que esse elemento de corda irá se mover para cima e para baixo.

Se medirmos cada posição desse pedaço de corda à medida que o tempo evolui, ao desenhar o gráfico das posições desse pedaço versus o tempo encontraremos uma curva do tipo mostrado à esquerda.



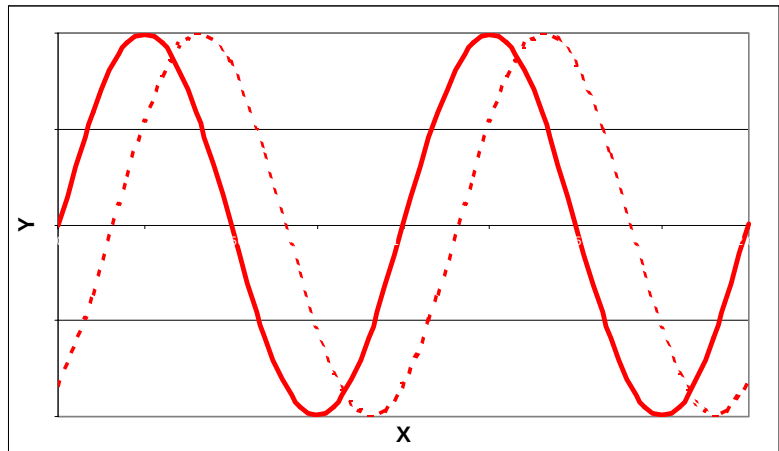
Denominamos período T o tempo entre dois pontos equivalentes consecutivos. Na figura ao lado consideramos o período como a distância entre dois máximos consecutivos.

Velocidade de propagação de uma onda

Um caso particular muito importante de onda progressiva tem a forma de uma senóide:

$$y(x,t) = y_M \text{sen}(kx - \omega t)$$

No instante $t = 0$ a função tem a forma da curva de traço contínuo e para um tempo posterior Δt a função tem a forma da curva tracejada.



Chamamos a grandeza k de número de onda (ou vetor de onda) e o definimos como:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

Chamamos ω de frequência angular e a definimos como:

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

Chamamos de fase $\phi(x,t)$ o argumento da senóide, ou seja:

$$\phi(x,t) = kx - \omega t$$

Um ponto de fase constante ocupa uma certa posição relativa na onda. Se marcarmos um certo ponto de máximo e passarmos a acompanhá-lo, iremos verificar que mesmo com a onda se movimentando à medida que o tempo evolui, a fase daquele máximo se mantém constante.

Assim, se quisermos calcular a velocidade com que uma onda se propaga devemos acompanhar um dado ponto dela, ou seja um ponto de fase constante:

$$\phi(x,t) = kx - \omega t = \text{constante}$$

$$k \frac{dx}{dt} - \omega = 0 \Rightarrow v = \frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{k} = \frac{\lambda}{T} \therefore \lambda = vT$$

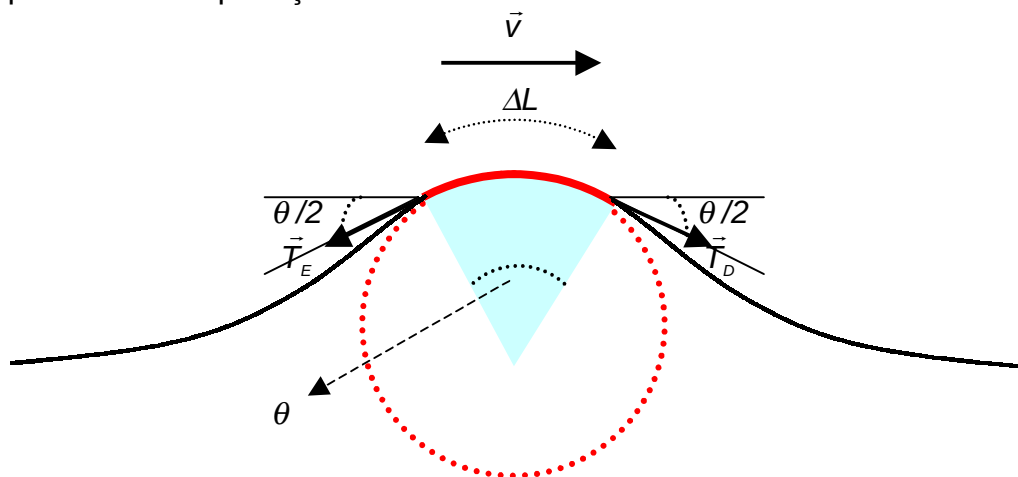
Velocidade de uma onda numa corda esticada

Para calcular a velocidade de uma onda em uma corda vamos considerar um pequeno pulso se propagando da esquerda para a direita em uma corda de densidade linear de massa μ e que é esticada através de uma tensão T aplicada nas suas extremidades. No sentido de facilitar a visualização apresentamos à seguir uma ampliação do pequeno pulso que se propaga.

Vamos analisar um pequeno pedaço de comprimento ΔL na parte superior do pulso. esse pedaço ΔL pode se considerado aproximadamente com o formato de um arco de círculo de raio R e definindo um pequeno ângulo θ .

A análise ficará adequada aos nossos propósitos se observarmos o movimento do pulso em um referencial que o acompanha com mesma velocidade. Neste referencial que se move com velocidade $\vec{v}$ em relação aos suportes que prendem a corda, observamos a corda se mover e tomar a forma de pulso. Se observarmos apenas o pedaço de comprimento ΔL veremos que momentaneamente ele tem uma trajetória circular. Teremos a percepção de um pulso congelado e a corda escorregando através dele, como se existisse um tubo na forma de pulso e a corda escorregasse por dentro desse pulso.

Como as forças que atuam na corda não se alteram devido a essa mudança de referencial, temos que é nula a resultante horizontal das forças que atuam no pedaço de corda e é não nula a resultante vertical. E como no referencial que se move com velocidade $\vec{v}$ o pedaço de corda descreve movimento circular, esta resultante vertical é a força centrípeta que atua neste pedaço de corda.



Logo:

$$\left\{ \begin{array}{l} T_D \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - T_E \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = 0 \\ T_D \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) + T_E \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = F_R \end{array} \right.$$

Como a tensão da esquerda T_E é igual à tensão da direita T_D , ou seja: $T_E = T_D = T$ temos que:

$$2T \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = F_R$$

Considerando que o ângulo é muito pequeno, temos que:

$$2T \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cong 2T\left(\frac{\Delta L}{2R}\right) = T\left(\frac{\Delta L}{R}\right)$$

e por outro lado:

$$F_R = m \frac{v^2}{R}$$

logo:

$$T\left(\frac{\Delta L}{R}\right) = m \frac{v^2}{R} \Rightarrow v^2 = \frac{T}{m/\Delta L} = \frac{T}{\mu} \quad \therefore v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

Energia e potência numa onda progressiva

Quando consideramos a propagação de uma onda progressiva em uma corda o movimento oscilatório de um elemento de corda será no sentido perpendicular à sua propagação. Levando em conta que o deslocamento de um elemento de corda que se encontra na posição x no instante t é dado por $y(x,t)$

$$y(x,t) = y_M \sin(kx - \omega t)$$

esse elemento de corda deslocar-se-á transversalmente com uma velocidade dada por $u(x,t)$:

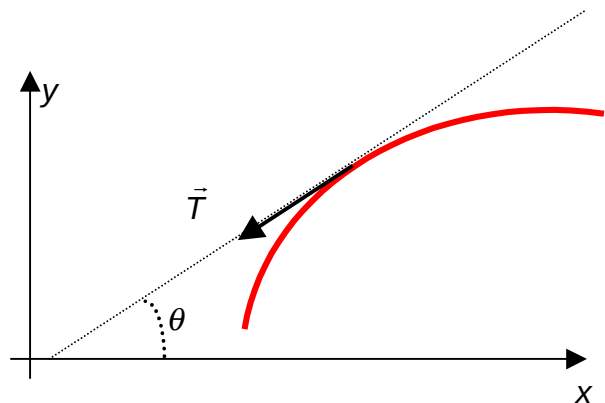
$$u(x,t) = \frac{\partial y(x,t)}{\partial t} = -\omega y_M \cos(kx - \omega t)$$

Num dado instante a porção da corda à esquerda deste elemento de corda, exerce nele uma força transversal à direção de propagação dada por

$$F_y = -T \sin \theta$$

Considerando que os ângulos envolvidos serão muito pequenos, podemos aproximar

$$F_y = -T \tan \theta = -T \frac{\partial y}{\partial x}$$



Portanto, a potência transmitida a um elemento de corda específico por seu vizinho da esquerda é dada pelo produto da força exercida pela velocidade desse elemento:

$$P(x,t) = F_y(x,t)u(x,t) = -T \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right) \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right) = -T [ky_M \cos(kx - \omega t)] [-\omega y_M \cos(kx - \omega t)]$$

$$P(x,t) = \omega k T y_M^2 [\cos(kx - \omega t)]^2$$

Para uma análise global da propagação da onda na corda é interessante que saibamos qual o valor médio da potência comunicada por um elemento ao seu vizinho, e esse resultado é o fluxo de energia na corda por unidade de tempo.

Considerando que:

$$\langle [\cos(kx - \omega t)]^2 \rangle = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau dt [\cos(kx - \omega t)]^2 = \frac{1}{2}$$

onde usamos que τ é o período da função, e desse modo:

$$\bar{P} = \langle P(x, t) \rangle = \frac{1}{2} \mu v \omega^2 y_M^2$$

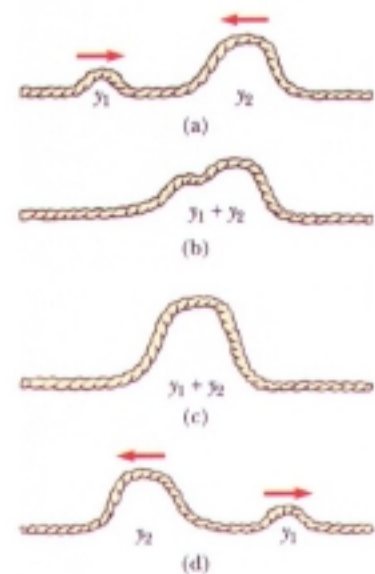
onde usamos que $T = \mu v^2$ e $\omega = k v$.

O Princípio da Superposição

Quando estamos ouvindo uma orquestra chegam simultaneamente aos nossos ouvidos os sons de todos os instrumentos que estão sendo tocados num dado instante. Isto significa que uma o mais ondas sonoras podem se propagar ao mesmo tempo numa dada região do espaço. O efeito global que percebemos será a soma dos efeitos que cada uma das ondas produziria se estivesse se propagando isoladamente.

Chamamos de princípio da superposição ao efeito global ser a soma dos efeitos isolados, como se depreende da figura ao lado que represente a interação entre duas ondas progressivas em uma corda.

Num dado instante as ondas viajam uma na direção da outra, produzem um efeito cumulativo ao se encontrar, e depois disso se afastam com o formato original.



Interferência - ondas no mesmo sentido

Vamos considerar o efeito da interação entre duas ondas que viajam no mesmo sentido. Para simplificar a análise, sem perder muito em generalidade, vamos considerar que essas ondas tenham mesma frequência, mesmo comprimento de onda, mesma amplitude, mas tenham uma defasagem. A primeira onda tem constante de fase nula e a segunda onda tem constante de fase ϕ . Elas têm a forma:

$$y_1(x, t) = y_M \sin(kx - \omega t)$$

$$y_2(x, t) = y_M \sin(kx - \omega t + \phi)$$

Vamos usar a identidade trigonométrica:

$$\operatorname{sen} \alpha + \operatorname{sen} \beta = 2 \operatorname{sen} \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cos \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right)$$

A onda resultante será a soma das duas ondas, ou seja:

$$y(x, t) = y_1(x, t) + y_2(x, t)$$

logo:

$$y(x, t) = \left[2y_M \cos \left(\frac{\varphi}{2} \right) \right] \operatorname{sen} \left(kx - \omega t + \frac{\varphi}{2} \right)$$

A onda resultante tem uma amplitude modificada de acordo com o valor da diferença de fase entre as ondas formadoras. Alguns casos simples podem ser analisados facilmente:

a. $\varphi = 0$

$$y(x, t) = 2 y_M \operatorname{sen}(kx - \omega t)$$

Esse é um exemplo de uma interferência construtiva, as ondas se somam de modo a alcançar a maior amplitude possível.

b. $\varphi = \pi$

$$y(x, t) = 0$$

Esse é um exemplo de uma interferência destrutiva, as ondas interagem e o resultado é a anulação de uma pela outra.

Interferência - ondas em sentido contrário

Vamos analisar o resultado da interação entre duas ondas que se propagam em sentidos contrários

$$y_1(x, t) = y_M \operatorname{sen}(kx - \omega t)$$

$$y_2(x, t) = y_M \operatorname{sen}(kx + \omega t)$$

Para simplificar a análise, sem perder muito em generalidade, vamos considerar que essas ondas tenham mesma frequência, mesmo comprimento de onda, mesma amplitude, e mesma constante de fase.

Novamente vamos usar a identidade trigonométrica:

$$\operatorname{sen} \alpha + \operatorname{sen} \beta = 2 \operatorname{sen} \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cos \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right)$$

A onda resultante será a soma das duas ondas, ou seja:

$$y(x,t) = y_1(x,t) + y_2(x,t)$$

logo:

$$y(x,t) = [2 y_M \text{sen}(kx)] \cos(\omega t)$$

Esta não é uma onda progressiva, porque não depende de x e t na forma $(kx - \omega t)$ mas no entanto a corda oscila para cima e para baixo.

Existem alguns pontos na corda onde a amplitude é máxima, e eles são localizados quando kx assumem valores múltiplos ímpares de $\pi/2$. Ou seja:

$$kx = \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2} \Rightarrow kx = (2n+1)\frac{\pi}{2} = \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi \quad ; \quad n = 0;1;2;3;\dots$$

A partir do resultado anterior podemos encontrar os valores de x para os quais a amplitude é máxima. Esses pontos são chamados antinodos. Temos que $k = 2\pi/\lambda$, logo

$$x_N = \left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{\lambda}{2} \quad ; \quad n = 0;1;2;3;\dots$$

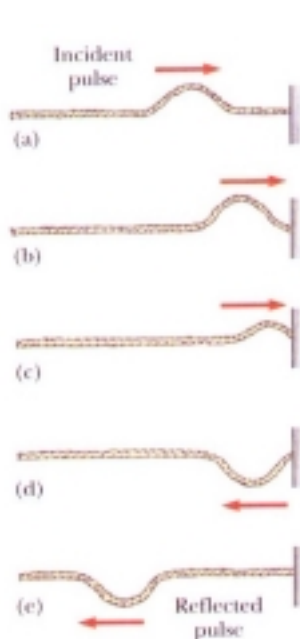
Por outro lado existem pontos onde a amplitude de oscilação é sempre nula, ou seja: a corda não se move. Esses pontos são localizados quando kx assume valores múltiplos de π .

$$kx = 0;\pi;2\pi;3\pi;\dots \Rightarrow kx = n\pi \quad ; \quad n = 0;1;2;3;\dots$$

A partir do resultado anterior podemos encontrar os valores de x para os quais a amplitude é nula. Esses pontos são chamados nós. Temos que $k = 2\pi/\lambda$, logo

$$x_N = n\frac{\lambda}{2} \quad ; \quad n = 0;1;2;3;\dots$$

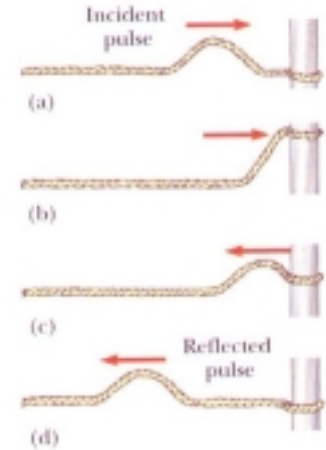
Reflexão de ondas na extremidade de uma corda



Uma corda pode ter a sua extremidade presa a um ponto fixo ou a uma presilha móvel.

Uma onda quando incide na extremidade de uma corda será refletida de um modo quando tem-se a extremidade fixa e de modo diverso quando a extremidade é móvel.

As duas situações podem ser vistas nas figuras vizinhas, e uma dedução desses resultados pode ser encontrada no **Vol 2 do Curso de Física Básica de H Moysés Nussenzveig**.



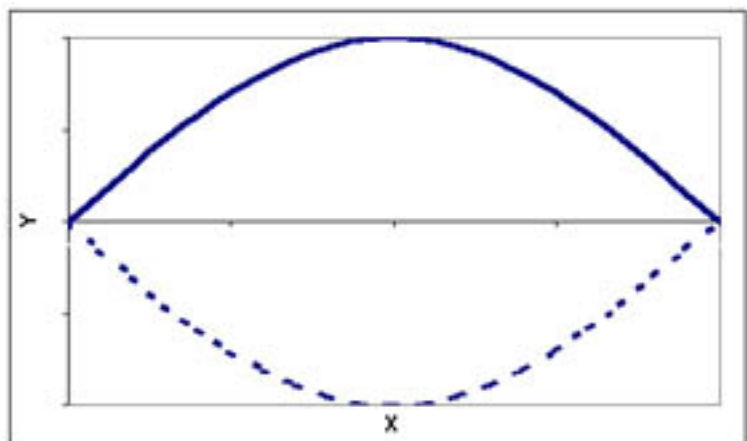
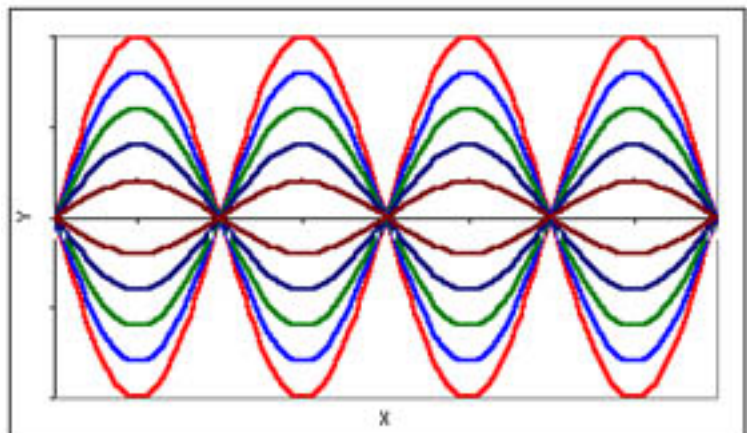
Ondas estacionárias e ressonância

Quando uma presa por ambas as extremidades é posta para vibrar em certa frequência as ondas se propagam nos dois sentidos formando um padrão de interferência, como já foi analisado anteriormente.

Para algumas frequências específicas a corda entra em ressonância, e acontecem as ondas estacionárias

Na primeira figura à direita temos uma onda estacionária com três nós intermediários. O nó é um ponto onde a corda não se movimenta. Obviamente, as extremidades são dois nós. Numa onda estacionária, essa situação define o primeiro padrão de oscilação, ou seja:

$$L = \lambda / 2$$



É um padrão de oscilação onde a onda estacionária tem meio comprimento de onda.

Num segundo padrão de oscilação temos um nó intermediário e desse modo:

$$L = \lambda$$

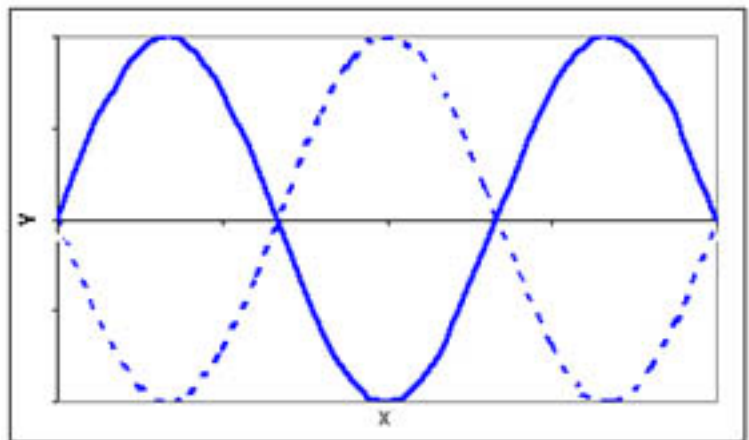
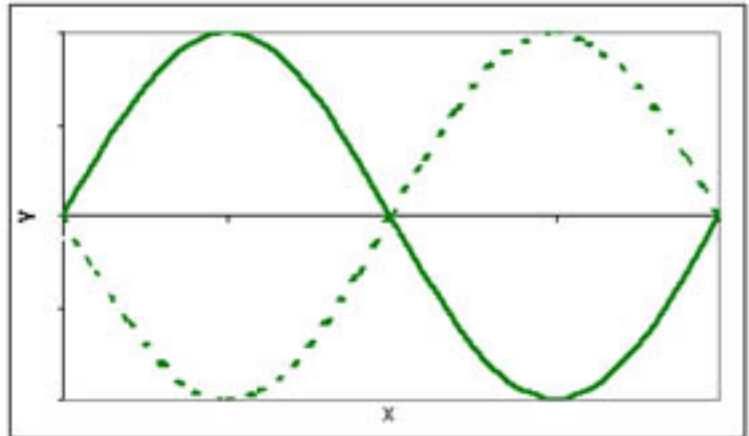
É um padrão de oscilação onde a onda estacionária tem um comprimento de onda.

Num terceiro padrão de oscilação temos dois nós intermediários e desse modo:

$$L = \lambda$$

É um padrão de oscilação onde a onda estacionária tem três meios comprimentos de onda.

$$L = 3 \lambda / 2$$



Podemos generalizar dizendo que a condição para existir um padrão de oscilação para uma onda estacionária é que:

$$L = n \frac{\lambda}{2} \Rightarrow \lambda_n = \frac{2L}{n}$$

Já mostramos anteriormente que:

$$\lambda = vT = \frac{v}{f} \Rightarrow f = \frac{v}{\lambda}$$

Mas para uma corda presa pelas extremidades, apenas algumas frequências específicas podem desenvolver uma onda estacionária, portanto:

$$f_n = \frac{n}{2L}v \Rightarrow f_n = \frac{n}{2L}\sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

Essas frequências específicas são chamadas frequências de ressonância, e como pode-se notar elas são múltiplas de uma certa frequência mais baixa ($n=1$). Chama-se a frequência mais baixa ($n=1$) de fundamental ou primeiro harmônico. O segundo harmônico corresponde a ($n=2$). Chama-se série harmônica o conjunto dos possíveis modos de oscilação, enquanto n é chamado de número harmônico.

Solução de alguns problemas

Capítulo 17 - Halliday, Resnick e Walker - 6ª. edição

05 Mostre que $y(x,t) = y_M \text{sen}(k x - w t)$ pode ser reescrito nas seguintes formas alternativas:

a) $y(x,t) = y_M \text{sen}[k (x - v t)]$

$$kx - wt = k \left(x - \frac{w}{k} t \right) = k(x - vt)$$

b) $y(x,t) = y_M \text{sen}[2\pi (x / \lambda - f t)]$

$$kx - wt = \frac{2\pi}{\lambda} x - 2\pi f t = 2\pi \left(\frac{x}{\lambda} - f t \right)$$

c) $y(x,t) = y_M \text{sen}[w (x / v - t)]$

$$kx - wt = \frac{w}{v} x - wt = w \left(\frac{x}{v} - t \right)$$

d) $y(x,t) = y_M \text{sen}[2\pi [x / \lambda - t / T]]$

$$kx - wt = \frac{2\pi}{\lambda} x - \frac{2\pi}{T} t = 2\pi \left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T} \right)$$

Capítulo 17 - Halliday, Resnick e Walker - 4ª. edição

“09” Um pulso isolado, cuja forma de onda é dado pela função $h(x - 5 t)$ é mostrado na figura à seguir para $t = 0$, onde x é dado em centímetros e t é dado em segundos.

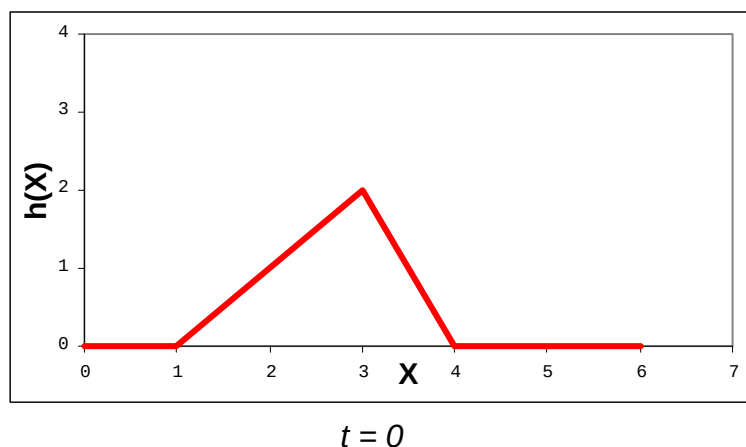
a) Qual a velocidade de propagação deste pulso?

Um ponto com fase constante na onda é definido por:

$$\phi(x,t) = x - 5 t = cte$$

A velocidade desse ponto é a velocidade da onda, logo:

$$v = \frac{dx}{dt} = +5 \text{ cm / s}$$



- b) Qual o sentido de propagação deste pulso?

O sentido positivo do eixo x .

- c) Trace o gráfico $h(x - 5t)$ como uma função de x para $t = 2s$.

Como é uma onda progressiva em um meio não dispersivo e sem atenuação, a forma da onda manter-se-á a mesma. Assim, basta calcular onde um ponto do pulso vai estar. Vamos escolher o ponto mais à esquerda da onda que se encontra na posição inicial $L_i = 1cm$.

No intervalo de tempo $\Delta t = 2s$ esse ponto move-se de ΔL , onde

$$\Delta L = v \Delta t = 5 \cdot 2 = 10cm$$

A posição final L_F desse ponto será:

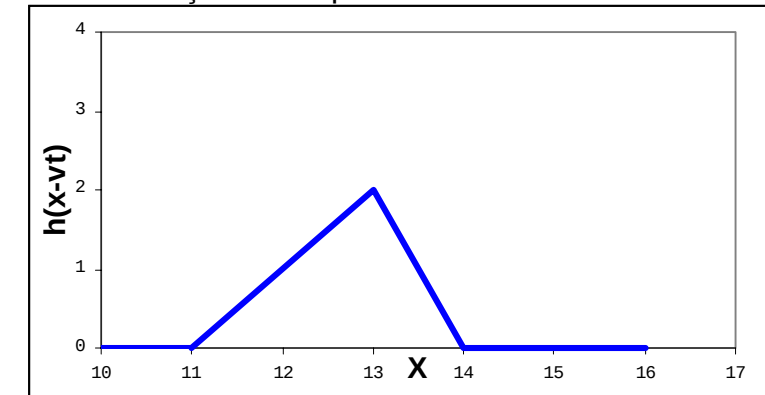
$$L_F = L_i + \Delta L = 1 + 10 = 11cm$$

- d) Trace o gráfico $h(x - 5t)$ como uma função de t para $x = 10cm$.

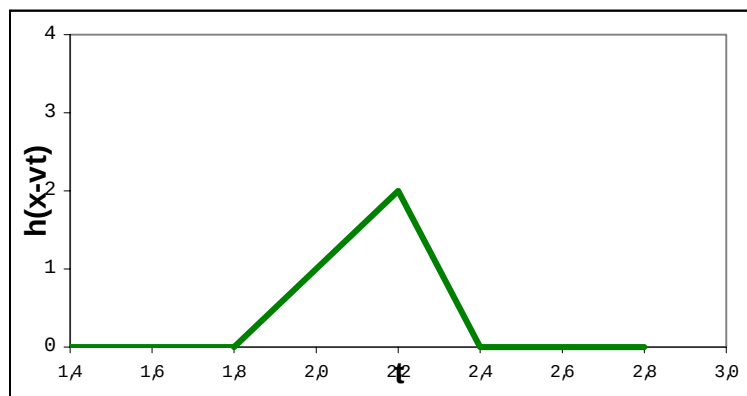
Seja t_E o tempo necessário para que a parte da esquerda do pulso alcance o ponto $x = 10cm$. O máximo do pulso já passou por esse ponto um tempo Δt_M anterior e a parte da direita do pulso já passou um tempo Δt_D .

Temos três tempos característicos t_E ;

$t_M = t_E + \Delta t_M$ e $t_D = t_E + \Delta t_D$.



$t = 5s$



$x = 10cm$

$$t_E = \frac{d_E}{v} = \frac{10-1}{5} = 1,8s$$

$$\Delta t_M = \frac{\Delta x_M}{v} = \frac{3-1}{5} = 0,4s \Rightarrow t_M = t_E + \Delta t_M = 2,2s$$

$$\Delta t_D = \frac{\Delta x_D}{v} = \frac{4-1}{5} = 0,6s \Rightarrow t_D = t_E + \Delta t_D = 2,4s$$

Capítulo 17 - Halliday, Resnick e Walker - 4ª. edição

“11” A equação de uma onda transversal se propagando em uma corda é dada por:

$$y(x,t) = (2,0\text{mm}) \sin[(20\text{m}^{-1})x - (600\text{s}^{-1})t]$$

a) Ache a amplitude, frequência, velocidade e comprimento de onda.

$$y_M = 2,0\text{mm}$$

$$w = 600\text{rad/s} \Rightarrow f = w/2\pi = 95,5\text{Hz}$$

$$k = 20\text{rad/m} \Rightarrow \lambda = 2\pi/k = 0,31\text{m}$$

$$v = w/k = 30\text{m/s}$$

b) Ache a velocidade escalar máxima de uma partícula da corda.

$$u(x,t) = \frac{\partial y(x,t)}{\partial t} = (-600\text{s}^{-1})(2,0\text{mm})\cos[(20\text{m}^{-1})x - (600\text{s}^{-1})t]$$

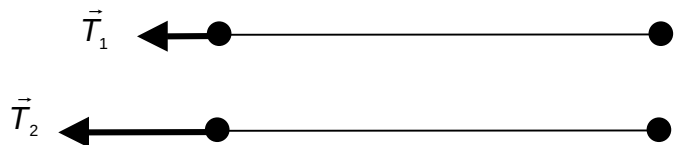
$$u_M = 1200\text{mm/s} = 1,2\text{m/s}$$

Capítulo 17 - Halliday, Resnick e Walker - 6ª. edição

12 A tensão num fio preso em ambos os extremos é duplicada sem que haja qualquer mudança considerável em seu comprimento. Qual é a razão entre as velocidades das ondas transversais nesse fio, antes e depois do aumento de tensão?

$$T_F = 2 T_I$$

A velocidade de propagação de uma onda numa fio é dada por:



$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

$$\frac{v_I}{v_F} = \sqrt{\frac{T_I}{T_F}} \sqrt{\frac{\mu_F}{\mu_I}}$$

Como o fio não foi alterado, não aconteceu mudança nas densidades de massa, logo:

$$\frac{v_I}{v_F} = \sqrt{\frac{T_I}{T_F}} = \sqrt{\frac{T_I}{2T_I}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow v_F = v_I \sqrt{2} = 1,414v_I$$

Capítulo 17 - Halliday, Resnick e Walker - 6ª. edição

- 13 A densidade linear de uma corda vibrante é $1,6 \times 10^{-4} \text{ kg/m}$. Uma onda transversal se propaga na corda e é descrita pela seguinte equação:

$$y(x,t) = (0,021\text{m}) \sin[(2,0\text{m}^{-1})x + (30\text{s}^{-1})t]$$

- a) Qual é a velocidade da onda?

$$v = w/k = 15\text{m/s}$$

$$\mu = 1,6 \times 10^{-4} \text{ kg/m}$$

$$w = 30\text{rad/s}$$

$$k = 2\text{rad/m}$$

- b) Qual é a tensão na corda?

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}} \Rightarrow T = \mu v^2$$

$$T = 0,036\text{N}$$

Capítulo 17 - Halliday, Resnick e Walker - 4ª. edição

- “15” Prove que, se uma onda transversal está se propagando ao longo de uma corda, então a inclinação de qualquer ponto da corda é numericamente igual à razão entre a velocidade escalar da partícula e a velocidade da onda naquele ponto

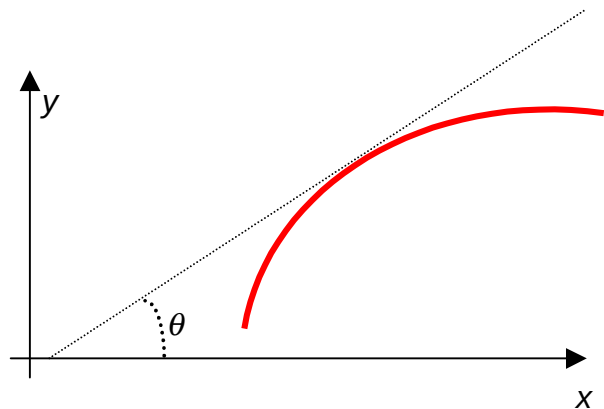
$$y(x,t) = y_M \sin(kx - wt)$$

$$v = \text{velocidade da onda}$$

$$v = w/k$$

$$u(x,t) = \text{velocidade de um elemento de corda}$$

$$u(x,t) = \frac{\partial y(x,t)}{\partial t} = -wy_M \cos(kx - wt)$$



$$\tan \theta = \text{inclinação da corda}$$

$$\tan \theta = \frac{\partial y(x,t)}{\partial x} = k y_M \cos(kx - wt)$$

$$\tan \theta = \frac{k}{w} |u(x,t)| = \frac{|u(x,t)|}{v}$$

Capítulo 17 - Halliday, Resnick e Walker - 6ª. edição

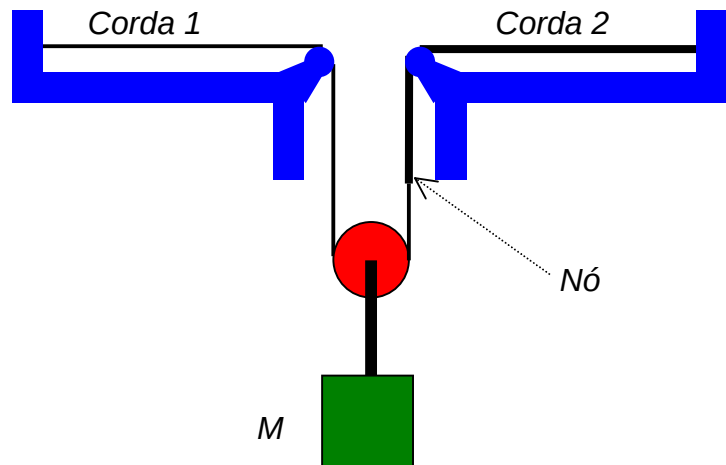
- 20 Na figura à seguir a corda 1 tem uma densidade linear $\mu_1 = 3,0\text{g/m}$ e a corda 2 tem uma densidade linear $\mu_2 = 5,0\text{g/m}$. Elas estão sob tensão devido a um bloco suspenso de massa $M = 500\text{g}$.

- a) Calcule a velocidade da onda em cada corda.

$$\begin{aligned}\mu_1 &= 3,0\text{g/m} \\ \mu_2 &= 5,0\text{g/m} \\ M &= 500\text{g}\end{aligned}$$

As tensões T_1 e T_2 que distendem as cordas são iguais porque as cordas estão conectadas e esticadas pela ação da massa M . Dito de outra forma:

$$T_1 = T_2 = \frac{Mg}{2}$$



Estamos aptos a calcular as velocidades de propagação de uma onda em cada uma das cordas:

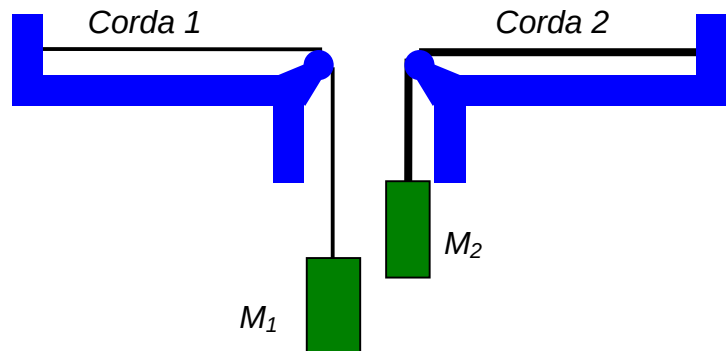
$$v_1 = \sqrt{\frac{T_1}{\mu_1}} = 28,57\text{m/s}$$

$$v_2 = \sqrt{\frac{T_2}{\mu_2}} = 22,13\text{m/s}$$

- b) O bloco agora é dividido em dois (com massas $M_1 + M_2 = M$), de acordo com a configuração a seguir. Determine as massas M_1 e M_2 para que as velocidades de uma onda nas duas cordas sejam iguais.

$$v_1 = \sqrt{\frac{T_1}{\mu_1}} = \sqrt{\frac{M_1 g}{\mu_1}}$$

$$v_2 = \sqrt{\frac{T_2}{\mu_2}} = \sqrt{\frac{M_2 g}{\mu_2}}$$



Como $v_1 = v_2$, temos:

$$\frac{M_1}{\mu_1} = \frac{M_2}{\mu_2} \Rightarrow \frac{M_1}{M_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2} = \frac{3}{5} \therefore M_1 = \frac{3}{5}M_2$$

Mas $M_1 + M_2 = M = 500\text{g}$, logo

$$M_1 = 187,5\text{g} \quad \text{e} \quad M_2 = 312,5\text{g}$$

- a) Mostre que a velocidade de uma onda transversal na corda é função de y , a distância até a extremidade mais baixa, e é dada por $v = \sqrt{g y}$.

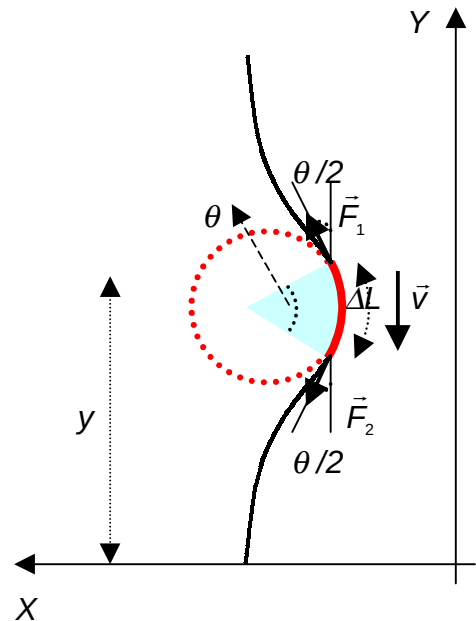
Vamos considerar um elemento de corda de comprimento ΔL .

Existem duas forças atuando nesse elemento: o pedaço acima puxa o elemento com uma força F_1 , que é uma reação à força peso do elemento de corda mais o pedaço abaixo. A segunda força F_2 é o peso de pedaço abaixo do elemento de corda. Seja F a resultante das forças que atuam no elemento de corda:

$$\begin{cases} F_x = F_1 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) + F_2 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ F_y = F_1 \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - F_2 \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{cases}$$

onde

$$\begin{cases} F_1 = \mu(y + \Delta L)g \\ F_2 = \mu y g \end{cases} \quad e \quad \mu = \frac{m}{L}$$



Por outro lado, vamos considerar que a onda tenha uma amplitude pequena comparada com o seu comprimento, de modo que o ângulo possa ser considerado pequeno:

$$\theta = \frac{\Delta L}{R} \quad ; \quad \text{se } \theta \ll 1 \Rightarrow \begin{cases} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cong \frac{\theta}{2} = \frac{\Delta L}{2R} \\ \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cong 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} F_x = (F_1 + F_2) \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = (2\mu g y + \mu g \Delta L) \frac{\Delta L}{2R} = \frac{\mu g y}{R} \Delta L + \frac{\mu g}{2R} (\Delta L)^2 \\ F_y = (F_1 - F_2) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = F_1 - F_2 \end{cases}$$

Considerando que se $\Delta L \ll 1$ teremos que $\Delta L \gg (\Delta L)^2$, então teremos que:

$$\begin{cases} F_x \cong \frac{\mu g y}{R} \Delta L \\ F_y \cong 0 \end{cases} \Rightarrow F_R = F_x = \left(\frac{\mu g \Delta L}{R} \right) y$$

No entanto, em um referencial que esteja se movimentando com a mesma velocidade do pulso, o elemento de corda tem movimento circular com aceleração centrípeta dada por:

$$F_R = (\mu \Delta L) \frac{v^2}{R}$$

e desse modo encontramos que:

$$F_R = (\mu \Delta L) \frac{v^2}{R} = \left(\frac{\mu g \Delta L}{R} \right) y \quad \therefore v = \sqrt{g y}$$

- b) Mostre que o tempo que uma onda transversal leva para percorrer o comprimento da corda é dado por $t = 2\sqrt{L/g}$.

$$v = \frac{dy}{dt} = \sqrt{g y} \Rightarrow dt = \frac{dy}{\sqrt{g y}} \quad \therefore \int_0^t dt' = \int_0^L \frac{dy}{\sqrt{g y}}$$

$$t = g^{-\frac{1}{2}} \int_0^L y^{-\frac{1}{2}} dy = 2g^{-\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{2}} \Rightarrow t = 2\sqrt{\frac{L}{g}}$$

Capítulo 17 - Halliday, Resnick e Walker - 6ª. edição

- 27 Duas ondas idênticas que se propagam, deslocando-se no mesmo sentido, têm uma diferença de fase de $\pi/2 \text{ rad}$. Qual é a amplitude da onda resultante em termos da amplitude comum y_M das duas ondas?

$$y_1(x, t) = y_M \sin(kx - \omega t)$$

$$y_2(x, t) = y_M \sin(kx - \omega t + \pi/2)$$

$$y(x, t) = y_1(x, t) + y_2(x, t)$$

$$y(x, t) = y_1(x, t) = y_M [\sin(kx - \omega t) + \sin(kx - \omega t + \pi/2)]$$

Mas:

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cos \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right)$$

logo:

$$\sin \alpha + \sin \left(\alpha + \frac{\pi}{2} \right) = 2 \sin \left(\frac{2\alpha + \pi/2}{2} \right) \cos \left(\frac{\pi}{4} \right)$$

e portanto

$$y(x,t) = \left[2y_M \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \right] \sin\left(kx - \omega t + \frac{\pi}{4}\right)$$

A amplitude A desta onda resultante é dada por:

$$A = 2y_M \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = y_M \sqrt{2} \Rightarrow \frac{A}{y_M} = \sqrt{2}$$

Capítulo 17 - Halliday, Resnick e Walker - 6ª. edição

32 Uma corda sob tensão T_I , oscila no terceiro harmônico com uma frequência f_3 , e as ondas na corda têm comprimento de onda λ_3 . Se a tensão for aumentada para $T_F = 4T_I$ e a corda for novamente levada a oscilar no terceiro harmônico,

a) qual será a frequência de oscilação em termos de f_3 ?

$$\left\{ \begin{array}{l} v_I = \sqrt{\frac{T_I}{\mu}} \\ v_F = \sqrt{\frac{T_F}{\mu}} = \sqrt{\frac{4T_I}{\mu}} \quad \therefore v_F = 2v_I \end{array} \right.$$

$$L = n \frac{\lambda_N}{2} \Rightarrow \lambda_N = \frac{2L}{n}$$

$$f_N = \frac{v}{\lambda_N} = \frac{n}{2L} v \Rightarrow f_N = \frac{n}{2L} \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} f_3^I = \frac{3}{2L} v_I \\ f_3^F = \frac{3}{2L} v_F \end{array} \right. \Rightarrow \frac{f_3^I}{f_3^F} = \frac{\frac{3v_I}{2L}}{\frac{3v_F}{2L}} = \frac{v_I}{v_F} = \frac{1}{2} \quad \therefore f_3^F = 2f_3^I$$

b) qual será o comprimento de onda em termos de λ_3 ?

$$\lambda_3 = \frac{v}{f_3} \Rightarrow \frac{\lambda_3^I}{\lambda_3^F} = \left(\frac{v_I}{f_3^I} \right) \left(\frac{f_3^F}{v_F} \right) = \frac{v_I}{v_F} \frac{f_3^F}{f_3^I} = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1 \quad \therefore \lambda_3^F = \lambda_3^I$$

Capítulo 17 - Halliday, Resnick e Walker - 6ª. edição

34 Duas ondas senoidais com amplitudes e comprimentos de onda idênticos se propagam em sentidos contrários ao longo de uma corda, com velocidade escalar de 10cm/s . Se o intervalo de tempo entre os instantes em que a corda fica retilínea é $0,50\text{s}$, quais os seus comprimentos de onda?

$$y_1(x,t) = y_M \sin(kx - \omega t)$$

$$y_2(x,t) = y_M \sin(kx + \omega t)$$

$$y(x,t) = y_1(x,t) + y_2(x,t) = y_M [\sin(kx - \omega t) + \sin(kx + \omega t)]$$

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$$

$$y(x,t) = 2 y_M \sin(kx) \cos(\omega t)$$

O intervalo de tempo entre os instantes em que a corda fica retilínea é igual à meio período, logo:

$$\Delta t = T/2 = 0,50s \quad \Rightarrow \quad T = 1s$$

$$v = 10cm/s = 0,1m/s$$

$$\lambda = v T = (0,1) (1) \quad \Rightarrow \quad \lambda = 0,1m$$

Capítulo 17 - Halliday, Resnick e Walker - 6ª. edição

35 Uma corda fixada em ambas as pontas tem $8,40m$ de comprimento, com uma massa de $0,120kg$. Ela está submetida a uma tensão de $96N$ e é colocada em oscilação.

a) Qual a velocidade escalar das ondas na corda?

$$\mu = \frac{M}{L} \quad L = 8,4m$$

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}} = \sqrt{\frac{LT}{M}} \quad M = 0,120kg$$

$$v = 81,97m/s \quad T = 96N$$

b) Qual o mais longo comprimento de onda possível para uma onda estacionária?

$$L = \lambda_{Max}/2 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{Max} = 2L \quad \therefore \quad \lambda_{Max} = 16,8m$$

c) Dê a frequência dessa onda.

$$f = v / \lambda_{Max} \quad \Rightarrow \quad f = 4,87Hz$$

Capítulo 17 - Halliday, Resnick e Walker - 4ª. edição

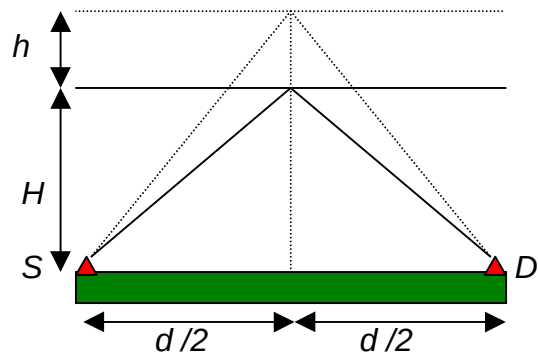
“38” Uma fonte S e um detetor de ondas de rádio D estão localizados ao nível do solo a uma distância d , conforme a figura a seguir. Ondas de rádio de comprimento λ chegam a D , pelo caminho direto ou por reflexão numa certa camada da atmosfera. Quando a camada está numa altura H , as duas ondas chegam em D exatamente em fase. À medida que a camada sobe, a diferença de fase entre as duas ondas muda, gradualmente, até estarem exatamente fora de fase para uma altura de camada $H + h$. Expresse o comprimento de onda λ em termos de d , h e H .

Vamos definir as grandezas:

d_1 = distância entre a fonte e o receptor.

d_2 = distância percorrida pelo som ao ser refletido numa altura H .

d_3 = distância percorrida pelo som ao ser refletido numa altura $H + h$.



Desse modo temos que:

$$\left\{ \begin{array}{l} d_1 = \frac{d}{2} + \frac{d}{2} = d \\ d_2 = 2\sqrt{H^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2} = \sqrt{4H^2 + d^2} \\ d_3 = 2\sqrt{(H+h)^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2} = \sqrt{4(H+h)^2 + d^2} \end{array} \right.$$

$$\Delta d_1 = d_2 - d_1 = n \lambda \quad \Rightarrow \quad \text{Interferência construtiva}$$

$$\Delta d_2 = d_3 - d_1 = (n + 1/2) \lambda \quad \Rightarrow \quad \text{Interferência destrutiva}$$

$$\Delta d_2 - \Delta d_1 = \lambda/2 \quad \Rightarrow \quad \lambda = 2 (\Delta d_2 - \Delta d_1)$$

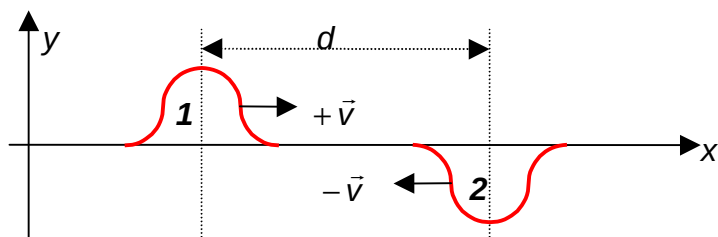
$$\lambda = 2\sqrt{4(H+h)^2 + d^2} - 2\sqrt{4H^2 + d^2}$$

Capítulo 17 - Halliday, Resnick e Walker - 6ª. edição

40 Dois pulsos se propagam ao longo de uma corda em sentidos opostos, como na figura à seguir.

- a) Se a velocidade da onda $v = 2,0\text{m/s}$ e os pulsos estão a uma distância de $6,0\text{cm}$ em $t = 0$, esboce os padrões resultantes para $t = 5$; 10 ; 15 e 20ms .

Vamos chamar de $x_1(t)$ a localização do máximo do pulso 1, $x_2(t)$ a localização do máximo do pulso 2, e $D(t)$ a separação entre os máximos.



Inicialmente os pulsos estão localizados nas posições x_{01} e x_{02} respectivamente, e eles se movem com velocidade v , logo

$$x_1(t) = x_{01} + vt$$

e

$$x_2(t) = x_{02} - vt$$

portanto

$$D(t) = |x_2(t) - x_1(t)|$$

e

$$D(0) = |x_{01} - x_{02}| = d = 6,0\text{cm}$$

Podemos dizer que:

$$D(t) = |(x_{01} - x_{02})| - 2vt = d - 2vt$$

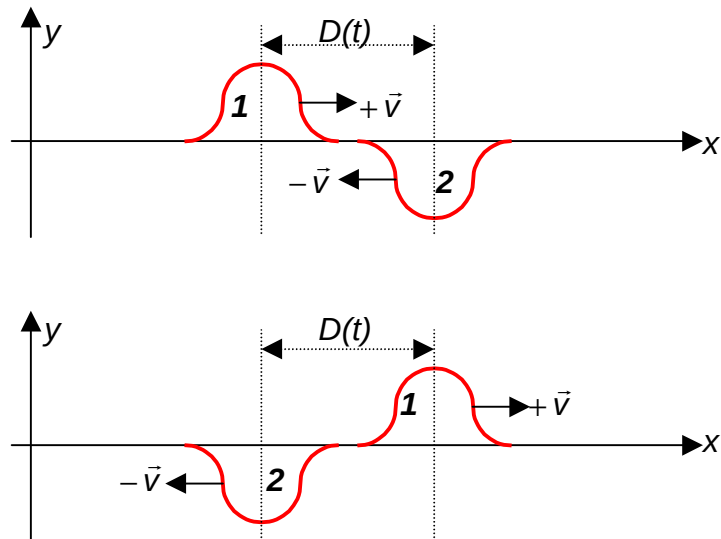
Os pulsos terão seus máximos no mesmo ponto quando $D(t_E) = 0$, ou seja:

$$d - 2vt_E = 0 \Rightarrow t_E = d/2v = 0,015\text{s} = 15\text{ms}$$

Para $t < t_E$ os dois pulsos estão se aproximando um do outro.

Quando $t = t_E$ os máximos dos pulsos estão na mesma posição e tem lugar uma interferência destrutiva. Neste instante a corda tem a forma de uma linha reta.

Quanto $t > t_E$ os dois pulsos estão se afastando um do outro.



b) O que aconteceu com a energia em $t = 15\text{ms}$?

Neste instante a corda tem a forma de uma linha reta e aparentemente não existem pulsos na corda. Mas é como se a energia dos pulsos estivesse armazenada em forma de energia potencial.

Notas de Aula de Física

18. ONDAS II - ONDAS SONORAS	2
A VELOCIDADE DO SOM	2
PROPAGAÇÃO DE ONDAS SONORAS	4
INTENSIDADE E NÍVEL DO SOM	6
FONTES SONORAS MUSICAIS.....	6
BATIMENTOS	7
O EFEITO DOPPLER.....	9
SOLUÇÃO DE ALGUNS PROBLEMAS	12
01.....	12
04.....	13
05.....	13
06.....	14
07.....	14
10.....	15
11.....	15
12.....	16
13.....	18
16.....	19
"19".....	19
"20".....	20
30.....	21
45.....	22
46.....	23
"48".....	24
48.....	25
49.....	25
"50".....	26
51.....	26
54.....	27
55.....	28
"69".....	29
"71".....	29

18. Ondas II - Ondas sonoras

Ondas sonoras são familiares à nossa existência e faz parte de nosso cotidiano a convivência com corpos que produzem sons. Esses sons podem ser ruídos de choque entre dois corpos ou melodias produzidas por instrumentos musicais.

As ondas sonoras necessitam de um meio elástico para se propagarem, e não existe essa propagação no vácuo. Num sólido podemos ter ondas longitudinais ou ondas transversais. Como os fluidos (líquidos e gases) não suportam tensão de cisalhamento, apenas as ondas longitudinais se propagam neste meio.

A velocidade do som

As ondas se caracterizam por ser um transporte de energia, associado a uma oscilação da matéria. A energia se propaga através da interação de elementos de volume adjacentes. Como cada material se caracteriza por um arranjo específico da matéria, a interação entre os elementos de volume adjacentes se dá de um modo peculiar para cada material que consideremos. Por isso a onda sonora se propaga com uma velocidade diferente para cada meio. Em particular, a sua velocidade no ar a 20°C é de $v_s = 343\text{m/s}$.

Uma onda sonora se propaga numa sucessão de compressões e rarefações, e em cada material esses movimentos têm uma característica peculiar. Existe uma grandeza que dá conta dessas variações em um meio: é o *módulo volumétrico da elasticidade* B , que leva em conta a variação de pressão e a variação fracional de volume. Ele é definido como:

$$B = -\frac{\Delta p}{\left(\frac{\Delta V}{V}\right)}$$

e no limite quando $\Delta V \rightarrow 0$, temos que

$$B = -V\left(\frac{dp}{dV}\right)$$

Outro modo de apresentar B é usando-se a densidade volumétrica de massa $\rho = M/V$ ao invés do volume. Temos que

$$\frac{dp}{dV} = \left(\frac{dp}{d\rho}\right)\left(\frac{d\rho}{dV}\right) = \left(\frac{dp}{d\rho}\right)\left[-\frac{M}{V^2}\right] = -\frac{\rho}{V}\left(\frac{dp}{d\rho}\right)$$

logo

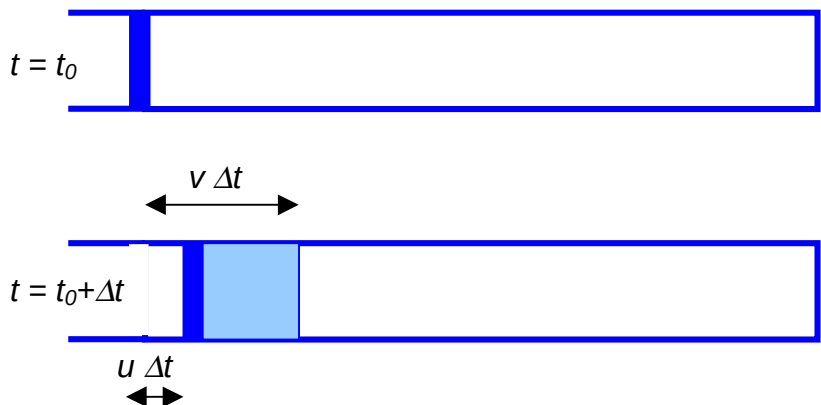
$$B = -V\left\{-\frac{\rho}{V}\left(\frac{dp}{d\rho}\right)\right\} \Rightarrow B = \rho\left(\frac{dp}{d\rho}\right)$$

A velocidade do som em um meio elástico é dada por:

$$v = \sqrt{\frac{B}{\rho}}$$

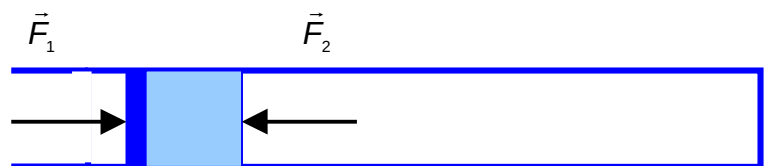
Para deduzir a equação da velocidade do som, vamos considerar a propagação de um pulso em um tubo longo.

Consideremos um fluido de densidade volumétrica ρ e pressão P preenchendo o tubo desenhado ao lado. Num dado instante comprimimos esse fluido movimentando o êmbolo para a direita com velocidade u durante um intervalo de tempo Δt . O movimento do pistão é transmitido às moléculas do fluido pelas colisões que elas efetuam com o pistão e pelas colisões entre elas.



À medida que as moléculas colidem com a superfície do pistão, elas adquirem velocidades maiores que a média, transmitindo através dos choques essa propriedade para as moléculas adjacentes. A região comprimida comporta-se como um pulso propagando-se para a direita.

O impulso dado pelo pistão ao volume representado pela área comprimida será igual à sua variação da quantidade de movimento, ou seja:



$$\text{Impulso} = I = F \Delta t$$

Mas

$$F = F_1 - F_2 = (p + \Delta p)A - pA$$

$$F = \Delta p A$$

ou seja:

$$I = (A \Delta p) \Delta t$$

A variação da quantidade de movimento do volume perturbado é dado por:

$$\text{variação da quantidade de movimento} = \Delta m v$$

onde Δm é a massa do fluido que entra em movimento depois de um intervalo Δt em que aconteceu o movimento do êmbolo, ou seja:

$$\Delta m = \rho \Delta V = \rho (u \Delta t A)$$

Considerando que o impulso é igual à variação da quantidade de movimento, temos que:

$$F \Delta t = \Delta m v \quad \Rightarrow \quad \Delta p = \rho v u$$

Mas o módulo da elasticidade é:

$$B = -V \left(\frac{dp}{dV} \right)$$

onde, usando as nossas convenções:

$$\Delta V = V_F - V_I < 0$$

$$\Delta V = - (u \Delta t) A$$

$$V = (v \Delta t) A$$

logo:

$$\Delta p = -B \frac{\Delta V}{V} = -B \left(\frac{-u \Delta t A}{v \Delta t A} \right) = B \frac{u}{v} \Rightarrow \Delta p = \rho v u = B \frac{u}{v} \quad \therefore v = \sqrt{\frac{B}{\rho}}$$

Quando consideramos a propagação de uma onda como um **processo adiabático**, ou seja: a propagação é um evento tão rápido que não possibilita a troca de calor no meio, devemos considerar a equação de estado:

$$p V^\gamma = \text{constante}$$

onde:

$$\gamma = \frac{c_p}{c_v} = \frac{\left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_p}{\left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_v}$$

Diferenciando ambos os lados da equação de estado, temos que:

$$V^\gamma dp + \gamma V^{\gamma-1} p dV = 0 \Rightarrow V^\gamma \left[dp + \frac{\gamma p}{V} dV \right] = 0 \quad \therefore -V \frac{dp}{dV} = \gamma p$$

logo:

$$B = -V \frac{dp}{dV} = \gamma p \Rightarrow v = \sqrt{\frac{B}{\rho}} = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}}$$

Propagação de ondas sonoras

À medida que uma onda sonora avança num tubo, cada volume elementar do fluido oscila em torno de sua posição de equilíbrio.

Os deslocamentos se realizam para direita e para esquerda sobre a direção x , na qual a onda se propaga.

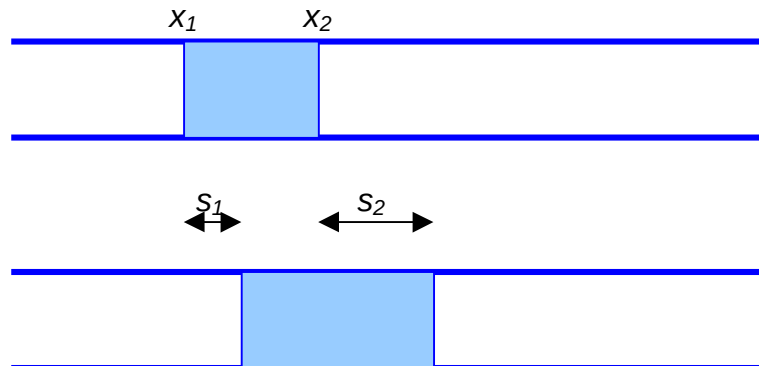
De modo geral, uma onda progressiva $s(x,t)$ que se propaga no sentido positivo do eixo x , tem a forma:

$$s(x,t) = f(x - vt)$$

Considerando uma onda harmônica progressiva, temos que:

$$s(x,t) = s_M \cos(kx - \omega t)$$

Vamos considerar uma situação simplificada, mas sem perda de generalidade. Num instante $t_1 = t_0$ dois elementos de volume estão nas suas respectivas posições de equilíbrio, e num instante posterior $t_2 = t_0 + \Delta t$ eles sofreram os deslocamentos de acordo com a equação anterior.



onde

$$s_1 = s(x_1, t_2)$$

e

$$s_2 = s(x_2, t_2)$$

$$\Delta x = x_2 - x_1$$

$$\Delta V = A (s_2 - s_1) = A[s(x_2, t_2) - s(x_1, t_2)]$$

$$V = A \Delta x$$

$$\Delta V = A \Delta s$$

$$B = -\frac{\Delta p}{\left(\frac{\Delta V}{V}\right)} \Rightarrow \Delta p = -B \frac{\Delta V}{V}$$

Mas

$$v = \sqrt{\frac{B}{\rho}} \Rightarrow B = \rho v^2$$

logo

$$\Delta p = -\rho v^2 \frac{\Delta V}{V} = -\rho v^2 \frac{A \Delta s}{A \Delta x}$$

e no limite quando $\Delta x \rightarrow 0$, teremos:

$$\Delta p = -B \left(\frac{\partial s}{\partial x} \right) = -\rho v^2 \left(\frac{\partial s}{\partial x} \right)$$

que nos fornece uma relação entre a posição $s(x_0, t)$ de um elemento de volume que tem a sua posição de equilíbrio em um ponto genérico x_0 e a variação de pressão $\Delta p(x_0, t)$ que está acontecendo nesse ponto x_0 .

$$\Delta p = + \rho v^2 k s_M \sin(kx - \omega t)$$

onde podemos considerar a variação máxima de pressão $\Delta p_M = \rho v^2 k s_M$, teremos:

$$\Delta p = \Delta p_M \sin(kx - \omega t)$$

Intensidade e nível do som

A intensidade de uma onda é definida como a potência média transmitida por unidade de área. Quando no nosso cotidiano dizemos que o som está alto, estamos na realidade dizendo que é alta a intensidade som emitido pelo aparelho. Os músicos dizem que um som é alto quando a sua frequência é alta.

$$I = \frac{\langle P(x,t) \rangle}{A}$$

Mas a potência instantânea que atua em um elemento de volume pode ser definida com o produto da força por sua velocidade, ou seja:

$$P(x,t) = F(x,t) \frac{\partial s(x,t)}{\partial t} = A \Delta p \frac{\partial s(x,t)}{\partial t} \quad \therefore \quad \frac{P(x,t)}{A} = \Delta p \frac{\partial s(x,t)}{\partial t}$$

$$\frac{P(x,t)}{A} = [\Delta p_M \sin(kx - \omega t)] [\omega s_M \sin(kx - \omega t)] = \rho v^2 k \omega s_M^2 \sin^2(kx - \omega t)$$

$$I = \rho v^2 k \omega s_M^2 \langle \sin^2(kx - \omega t) \rangle$$

Pode-se mostrar que

$$\langle \sin^2(kx - \omega t) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T dt \sin^2(kx - \omega t) = \frac{1}{2}$$

logo

$$I = \frac{1}{2} \rho v^2 k \omega s_M^2$$

Fontes sonoras musicais

Nós percebemos claramente a diferença de som quando ouvimos uma flauta e logo depois um trombone. Mesmo que os dois instrumentos estejam tocando a mesma nota musical. Isso acontece porque eles têm timbres diferentes.

Uma nota musical específica está associada com uma certa frequência, e a essa frequência corresponde um período determinado. A frequência da nota musical é caracterizada pela variação de pressão causada no ar durante um intervalo de tempo periódico. Pode ser um seno, um dente de serra, ou a variação específica de um instrumento.

Para a variação específica de um dado instrumento nós denominamos timbre. Cada instrumento tem uma forma específica de produzir uma mesma nota musical, daí nós percebermos quando está sendo tocado uma flauta ou um trombone.

Batimentos

Um tipo peculiar de interferência entre duas ondas acontece quando elas se propagam no mesmo sentido, têm mesma amplitude, mas as suas frequências w diferem ligeiramente. Como elas estão se propagando no mesmo meio elástico elas têm a mesma velocidade v de propagação e portanto $k = w/v$. Desse modo, se as frequências são próximas, isso também acontece com o número de onda k .

Vamos considerar as duas ondas do tipo:

$$y_1(x,t) = y_M \cos(k_1 x - w_1 t)$$

e

$$y_2(x,t) = y_M \cos(k_2 x - w_2 t)$$

logo:

$$y(x,t) = y_1(x,t) + y_2(x,t)$$

$$y(x,t) = y_M [\cos(k_1 x - w_1 t) + \cos(k_2 x - w_2 t)]$$

Vamos definir algumas grandezas:

$$\begin{cases} \Delta w = w_1 - w_2 \\ \Delta k = k_1 - k_2 \end{cases} \quad e \quad \begin{cases} \bar{w} = \left(\frac{w_1 + w_2}{2} \right) \\ \bar{k} = \left(\frac{k_1 + k_2}{2} \right) \end{cases}$$

onde supomos que $w_1 > w_2$ e $k_1 > k_2$. Por outro, como as frequências diferem ligeiramente, estamos assumindo que $\bar{w} \gg \Delta w$ e $\bar{k} \gg \Delta k$. Podemos colocar as equações anteriores na forma:

$$\begin{cases} w_1 = \bar{w} + \frac{\Delta w}{2} \\ w_2 = \bar{w} - \frac{\Delta w}{2} \end{cases} \quad e \quad \begin{cases} k_1 = \bar{k} + \frac{\Delta k}{2} \\ k_2 = \bar{k} - \frac{\Delta k}{2} \end{cases}$$

ou seja:

$$y(x,t) = y_M \left\{ \cos \left[\left(\bar{k} + \frac{\Delta k}{2} \right) x - \left(\bar{w} + \frac{\Delta w}{2} \right) t \right] + \cos \left[\left(\bar{k} - \frac{\Delta k}{2} \right) x - \left(\bar{w} - \frac{\Delta w}{2} \right) t \right] \right\}$$

Considerando a identidade trigonométrica:

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cos \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right)$$

encontramos que

$$y(x,t) = 2y_M \cos \left(\frac{\Delta k}{2} x - \frac{\Delta w}{2} t \right) \cos(\bar{k}x - \bar{w}t)$$

e se definirmos a amplitude de oscilação como $A(x,t)$, teremos

$$A(x,t) = 2y_m \cos\left(\frac{\Delta k}{2}x - \frac{\Delta \omega}{2}t\right)$$

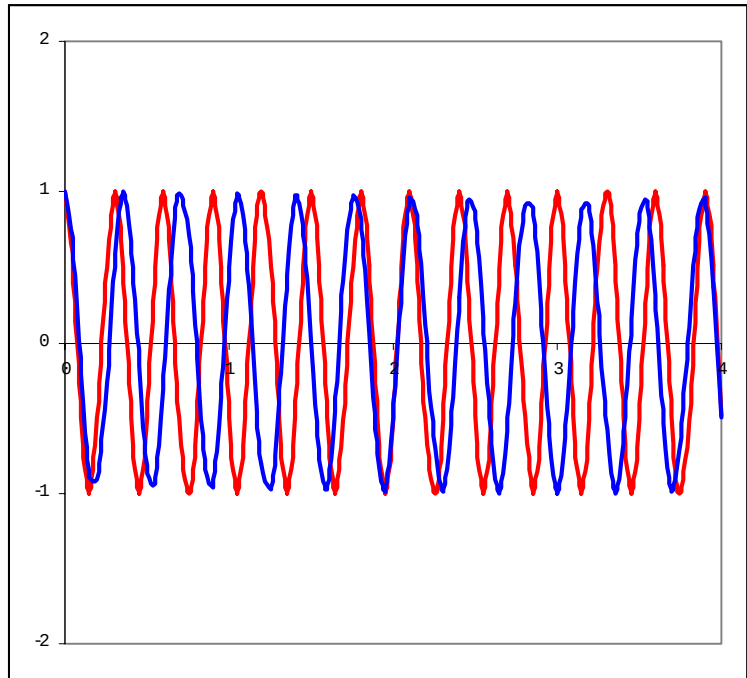
ou seja:

$$y(x,t) = A(x,t) \cos(\bar{k}x - \bar{\omega}t)$$

Como exemplo, estamos mostrando ao lado o gráfico em $x = 0$, resultante da soma de duas ondas com amplitudes unitárias e frequência $\omega_1 = 20,94\text{rad/s}$ e $\omega_2 = 17,80\text{rad/s}$.

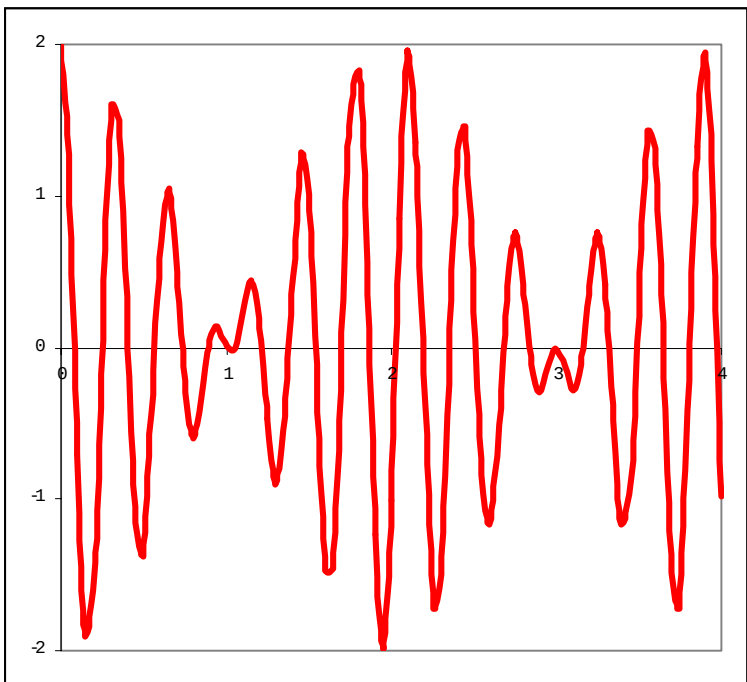
Temos então que a diferença $\Delta\omega = 3,14\text{rad/s}$ e o valor médio $\bar{\omega} = 19,37\text{rad/s}$.

$$\begin{cases} \Delta\omega = 3,14 \Rightarrow \Delta T = \frac{2\pi}{\Delta\omega} = 2 \\ \bar{\omega} = 19,37 \Rightarrow \bar{T} = \frac{2\pi}{\bar{\omega}} = 0,32 \end{cases}$$



Um batimento, ou seja um máximo de amplitude, ocorrerá sempre que a amplitude global apresentar um extremo: máximo ou mínimo.

Neste exemplo, o período de batimento será $\Delta T = 2\text{s}$ como se pode observar na figura, a frequência angular de batimento vale $\Delta\omega = 3,14\text{rad/s}$ e a frequência, $\Delta f = 0,5\text{Hz}$.



O Efeito Doppler

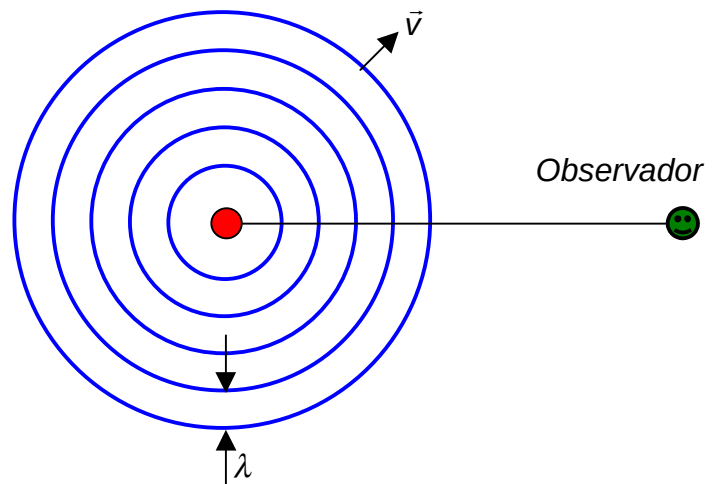
O som é um tipo de onda que necessita de um meio para se propagar. Quando estamos analisando a produção e a captação de uma onda sonora, estamos diante de três participantes: a fonte sonora, o meio onde ela se propaga e o observador que está captando as ondas. Temos então três referenciais bem definidos.

O tipo de onda captada dependerá de como a fonte e o observador se movem em relação ao meio de propagação da onda. Vamos considerar o meio parado em relação ao solo. Neste caso temos ainda três situações diferentes: a fonte se movimenta e o observador está parado; a fonte está parada e o observador está em movimento; a fonte e o observador estão em movimento. Nos três casos podemos ter uma aproximação ou um afastamento entre a fonte e o observador.

Fonte e observador em repouso

A fonte emite uma onda harmônica de frequência f e comprimento de onda λ . Vamos desenhar apenas as frentes de onda. As frentes de onda esféricas concêntricas viajam com velocidade v . Como todos os participantes (fonte, observador e meio) estão em repouso, o observador vai perceber uma onda exatamente do mesmo tipo que foi emitida pela fonte.

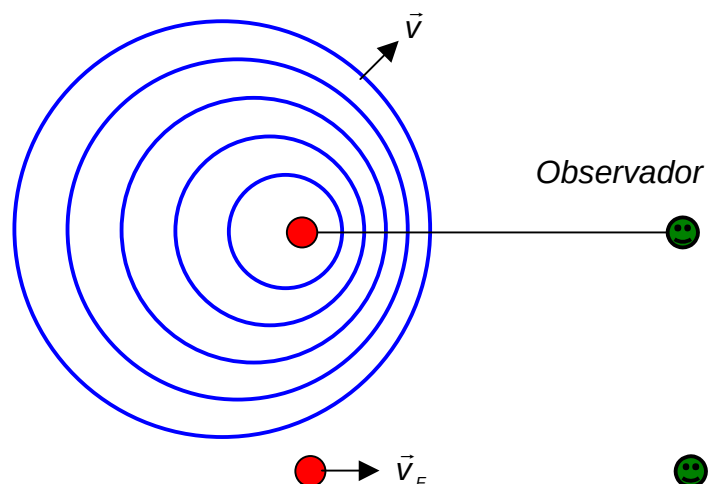
$$v = \lambda f$$



Fonte em movimento - observador em repouso

Como a fonte está em movimento, as frentes de onda não são mais esferas concêntricas. Quando a fonte emitir a segunda frente ela já não estará mais na mesma posição de quando emitiu uma primeira onda.

Seja T é o período da onda que a fonte está emitindo. Como a fonte está se aproximando do observador ele irá perceber uma distância λ' entre as frentes de onda menor que um comprimento de onda λ original, como pode-se



depreender pela figura ao lado. Se em um tempo T (período) uma frente de onda viajou uma distância $\lambda = v T$ (comprimento de onda original), como a fonte se aproximou do observador de $v_F T$, o observador perceberá um comprimento de onda λ' diferente do original:

$$\lambda' = \lambda - v_F T$$

ou seja:

$$\lambda' = v T - v_F T = (v - v_F)/f$$

Mas

$$\lambda' = v / f'$$

onde f' é a frequência que o observador vai perceber nas circunstâncias atuais. Portanto:

$$\frac{v}{f'} = \frac{v - v_F}{f} \Rightarrow f' = \left(\frac{v}{v - v_F} \right) f$$

Quando a fonte estiver se afastando do observador em repouso, teremos uma situação semelhante a essa descrita, e encontraremos que:

$$\lambda' = \lambda + v_F T$$

ou seja:

$$\lambda' = v T + v_F T = (v + v_F)/f$$

logo:

$$f' = \left(\frac{v}{v + v_F} \right) f$$

Fonte em repouso - observador em movimento

Quando a fonte está em repouso em relação ao meio a propagação se dará de modo a formarem-se frentes de ondas esféricas concêntricas.

Como a frequência é uma medida do número de frentes de ondas por unidade de tempo que atingem o observador, neste caso chegam a si $f = v / \lambda$ frentes de onda por unidade de tempo. Se a frequência for $f = 1\text{Hz}$ o período $T = 1\text{s}$, e atingirá o observador uma frente de onda por segundo. Se $f = 0,5\text{Hz}$ teremos $T = 2\text{s}$ e portanto atingirá o observador uma frente de onda a cada 2s , que é metade do número do caso anterior.

Se o observador se aproxima da fonte com velocidade v_o , ele irá de encontro às frentes de onda, encontrando v_o / λ mais frentes de onda por unidade de tempo que se estivesse em repouso. Desse modo, o número de frentes de onda por unidade de tempo f' que ele encontra será:

$$f' = \frac{v}{\lambda} + \frac{v_o}{\lambda} \Rightarrow f' = f + f \frac{v_o}{v} \therefore f' = \left(\frac{v + v_o}{v} \right) f$$

Quando o observador estiver se afastando da fonte em repouso, teremos uma situação semelhante a essa descrita, e encontraremos que:

$$f' = \frac{v}{\lambda} - \frac{v_o}{\lambda} \Rightarrow f' = f - f \frac{v_o}{v} \therefore f' = \left(\frac{v - v_o}{v} \right) f$$

Quando o observador estiver se afastando da fonte em repouso, teremos uma situação semelhante a essa descrita, e encontraremos que:

$$f' = \left(\frac{v + v_o}{v} \right) f$$

Fonte e observador em movimento

Quando fonte e observador estiverem em movimento teremos uma combinação dos resultados anteriores.

$$f' = f \left(\frac{v \pm v_o}{v \mp v_F} \right) \begin{cases} \text{sin al superior : aproximando - se} \\ \text{sin al inferior : afastando - se} \end{cases}$$

Solução de alguns problemas

Capítulo 18 - Halliday, Resnick e Walker - 6ª. edição

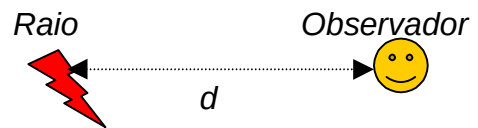
01

- a) Uma regra para encontrar a sua distância de um relâmpago é contar quantos segundos se passam, desde a visão do raio até ouvir o trovão e, então, dividir o número por cinco. O resultado é por suposição, a distância em milhas. Explique o funcionamento dessa regra e determine a porcentagem de erro a 20°C .

$$v_L = 3 \times 10^8 \text{ m/s} = 300.000.000 \text{ m/s}$$

$$v_S = 343 \text{ m/s} = 767,291 \text{ mi/h}$$

Considerando a propagação do som do trovão, temos que:



$$d = v_S t_S$$

e considerando a propagação da luz do relâmpago, temos que:

$$d = v_L t_L$$

O observador percebe os dois fenômenos com uma diferença de tempo Δt dada por:

$$\Delta t = t_S - t_L = \frac{d}{v_S} - \frac{d}{v_L} \Rightarrow \Delta t = d \left(\frac{v_L - v_S}{v_L v_S} \right)$$

Mas como $v_L \gg v_S$, teremos:

$$\Delta t \cong d \left(\frac{v_L}{v_L v_S} \right) \Rightarrow \Delta t \cong \frac{d}{v_S}$$

Considerando a distância em milhas e a velocidade em milhas por hora, temos:

$$d = v_S \Delta t = \left(\frac{767,291}{3600} \right) \Delta t = \frac{\Delta t}{4,69} \Rightarrow d_E = \frac{\Delta t}{5}$$

$$\frac{\Delta d}{d} = \frac{d - d_E}{d} = 1 - \frac{d_E}{d} = 0,062 \quad \therefore \left(\frac{\Delta d}{d} \right) \% = 6,2\%$$

- b) Desenvolva uma regra semelhante para obter a distância em quilômetros.

Considerando a distância em metros e o tempo em segundos, temos

$$d = v_S \Delta t = (343) \Delta t = (343 \times 10^{-3} \text{ km/s}) \Delta t = \frac{\Delta t}{2,91} \Rightarrow d_E = \frac{\Delta t}{3}$$

$$\frac{\Delta d}{d} = \frac{d - d_E}{d} = 1 - \frac{d_E}{d} = 0,03 \quad \therefore \left(\frac{\Delta d}{d} \right) \% = 3\%$$

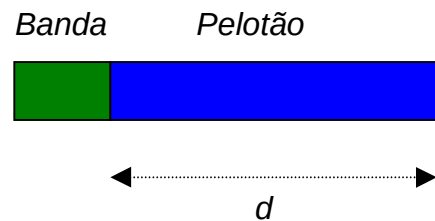
Capítulo 18 - Halliday, Resnick e Walker - 6ª. edição

- 04 Uma coluna de soldados, marchando a 120 passos/min , segue a música da banda à frente do pelotão. Observa-se que os soldados atrás da coluna avançam com o pé esquerdo, enquanto os músicos da banda avançam com o pé direito. Qual o tamanho da coluna, aproximadamente?

$$f = 120 \text{ passos/min} = (120/60) \text{ passos/s}$$

ou seja:

$$f = 2 \text{ Hz} \quad \Rightarrow \quad T = 0,5 \text{ s}$$



Os componentes da banda estão defasados de meio período em relação aos soldados que marcham no fim da coluna. A diferença de tempo Δt é dada por:

$$\Delta t = T/2 = 0,25 \text{ s}$$

O tamanho d do pelotão será, então:

$$d = v_S \Delta t = (343 \text{ m/s}) (0,25 \text{ s})$$

onde $v_S = 343 \text{ m/s}$ é a velocidade do som no ar. Logo

$$d = 85,75 \text{ m}$$

Capítulo 18 - Halliday, Resnick e Walker - 6ª. edição

- 05 Terremotos geram ondas sonoras na Terra. Ao contrário do que ocorre em um gás, podem ser geradas ondas longitudinais (P) e ondas transversais (S) em um sólido. A velocidade das ondas S é aproximadamente $v_S \cong 4,5 \text{ km/s}$ e as ondas P aproximadamente $v_P \cong 8,0 \text{ km/s}$. Um sismógrafo registra as ondas S e as ondas P de um terremoto. As primeiras ondas P aparecem $\Delta t = 3 \text{ min}$ antes das primeiras ondas S. Supondo que as ondas viajam em linha reta, a que distância ocorreu o terremoto?

Vamos chamar de L a distância entre o ponto onde aconteceu o terremoto e a posição do observador; t_S o tempo para uma onda S percorrer esta distância e t_P o tempo para uma onda P percorrer esta distância.

$$\begin{aligned} v_S &= 4,5 \text{ km/s} \\ v_P &= 8 \text{ km/s} \\ \Delta t &= 3 \text{ min} = 180 \text{ s} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} t_s = \frac{L}{v_s} \\ t_p = \frac{L}{v_p} \end{cases} \Rightarrow \Delta t = t_s - t_p = L \left(\frac{1}{v_s} - \frac{1}{v_p} \right) = L \left(\frac{v_p - v_s}{v_p v_s} \right)$$

$$L = \Delta t \left(\frac{v_p v_s}{v_p - v_s} \right) = 1.8514 \text{ km}$$

Capítulo 18 - Halliday, Resnick e Walker - 6ª. edição

06 A velocidade do som em um certo metal é v_M . Em uma extremidade de um longo tubo deste metal de comprimento L , se produz um som. Um ouvinte do outro lado do tubo ouve dois sons, um da onda que se propaga pelo tubo e outro que se propaga pelo ar.

- a) Se v_s é a velocidade do som no ar, que intervalo de tempo Δt ocorre entre os dois sons?

$$L = v_M t_M = v_s t_s$$

$$\Delta t = t_s - t_M = \frac{L}{v_s} - \frac{L}{v_M} = L \left(\frac{v_M - v_s}{v_M v_s} \right)$$

- b) Suponha que $\Delta t = 1\text{s}$ e que o metal é ferro, encontre o comprimento L .

$$\Delta t = 1\text{s}$$

$$v_s = 343\text{m/s}$$

$$v_M = 5.941\text{m/s}$$

$$L = \Delta t \left(\frac{v_M v_s}{v_M - v_s} \right) \therefore L = 364\text{m}$$

Capítulo 18 - Halliday, Resnick e Walker - 6ª. edição

07 Uma pedra é jogada num poço. O som da pedra se chocando com a água é ouvido $\Delta t = 3\text{s}$ depois. Qual a profundidade do poço?

Vamos considerar que h é a profundidade do poço, t_p é o tempo gasto para a pedra chocar com a água no fundo do poço e t_s é o tempo necessário para o som da colisão subir até a boca do poço. Logo temos que $\Delta t = t_p + t_s$. Por outro lado:

$$h = \frac{1}{2} g t_p^2 = v_s t_s$$

logo

$$t_p^2 = \frac{2h}{g} = \frac{2}{g} (v_s t_s) = \frac{2v_s}{g} (\Delta t - t_p) = \left(\frac{2v_s \Delta t}{g} \right) - \left(\frac{2v_s}{g} \right) t_p$$

ou seja:

$$t_p^2 + \left(\frac{2v_s}{g}\right)t_p - \left(\frac{2v_s \Delta t}{g}\right) = 0$$

Resolvendo, temos que:

$$t_p = \frac{-v_s \pm \sqrt{v_s^2 + 2v_s g \Delta t}}{g} = \begin{cases} +2,88s \\ -72,88s \end{cases}$$

Como o tempo é positivo, escolhemos a primeira solução $t_p = 2,88s$. Desse modo, temos que:

$$t_s = \Delta t - t_p = 3,00 - 2,88 = 0,12s =$$

e portanto

$$h = \frac{1}{2}gt_p^2 = 40,64m$$

Capítulo 18 - Halliday, Resnick e Walker - 6ª. edição

10

- a) Uma onda senoidal longitudinal contínua é enviada através de determinada mola, por meio de uma fonte oscilante conectada a ela. A frequência da fonte é de $25Hz$ e a distância entre pontos sucessivos de máxima expansão da mola é de $24cm$. Encontre a velocidade com que a onda se propaga na mola.

$$v = w/k = \lambda/T = \lambda f = (25Hz)(0,24m)$$

$$f = 25Hz$$

$$\lambda = 24cm = 0,24m$$

$$v = 6m/s$$

- b) Se o deslocamento longitudinal máximo de uma partícula na mola é de $0,30cm$ e a onda se move no sentido $-x$, escreva a equação da onda. Considere a fonte em $x = 0$ e o deslocamento nulo em $x = 0$ quando $t = 0$ também é zero.

$$s(x,t) = s_M \cos(kx + wt + \varphi)$$

$$s_M = 0,30cm = 0,0030m$$

$$w = 2\pi f = 50\pi \text{ rad/s}$$

$$s(0,0) = 0 = s_M \cos \varphi$$

$$k = 2\pi/\lambda = 5\pi/6 \text{ rad/m} = 8,33\pi \text{ rad/m}$$

logo

$$\varphi = \pi/2$$

ou seja

$$s(x,t) = s_M \sin(kx + wt)$$

e finalmente:

$$s(x,t) = (0,0030m) \sin(5\pi x/6 + 50\pi t)$$

Capítulo 18 - Halliday, Resnick e Walker - 6ª. edição

11

A pressão em uma onda sonora progressiva é dada pela equação:

$$\Delta p = (1,5Pa) \sin \pi [(1m^{-1})x - (330s^{-1})t]$$

- a) Encontre a amplitude de pressão

$$\Delta p_M = 1,5 \text{ Pa}$$

- b) Encontre a frequência

$$f = \frac{w}{2\pi} = \frac{330\pi}{2\pi} = 165 \text{ Hz}$$

- c) Encontre o comprimento de onda

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{\pi} = 2 \text{ m}$$

- d) Encontre a velocidade da onda

$$v = \frac{w}{k} = \frac{330\pi}{\pi} = 330 \text{ m/s}$$

Capítulo 18 - Halliday, Resnick e Walker - 6ª. edição

12

Duas fontes pontuais de ondas sonoras, de comprimentos de onda λ e amplitudes idênticas, estão separadas por uma distância $D = 2\lambda$. As fontes estão em fase.

- a) Quantos pontos de sinal máximo (interferência construtiva) existem em um grande círculo em torno da fonte?

Vamos considerar um grande círculo, P ou seja: a distância entre as fontes é bem menor que o raio deste círculo.

Seja P um ponto desse círculo, e L_1 e L_2 as distâncias de cada uma das fontes a esse ponto.

Vamos definir a origem das coordenadas coincidindo com o centro do círculo.

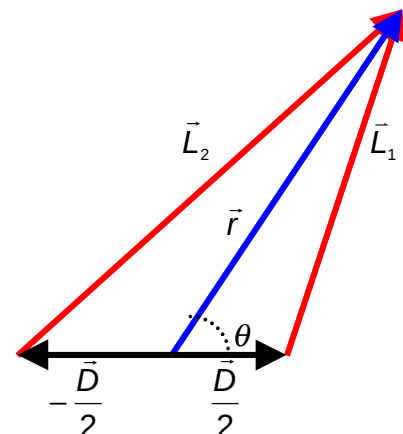
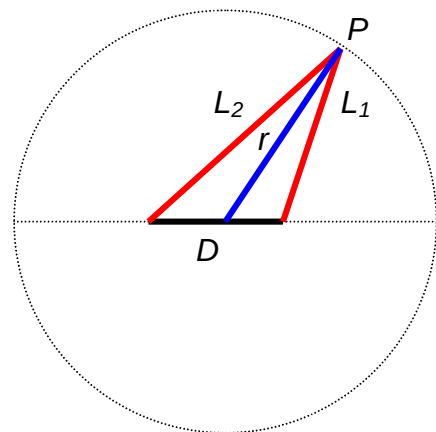
Podemos então definir:

$$\begin{cases} \vec{L}_1 = \vec{r} - \frac{\vec{D}}{2} \\ \vec{L}_2 = \vec{r} + \frac{\vec{D}}{2} \end{cases}$$

Logo:

$$L_1^2 = r^2 + \left(\frac{D}{2}\right)^2 - 2\vec{r} \cdot \frac{\vec{D}}{2}$$

ou seja



$$\begin{cases} L_1^2 = r^2 + \left(\frac{D}{2}\right)^2 - rD \cos \theta \\ L_2^2 = r^2 + \left(\frac{D}{2}\right)^2 + rD \cos \theta \end{cases}$$

portanto

$$L_2^2 - L_1^2 = 2rD \cos \theta$$

Mas por outro lado:

$$\begin{cases} L_2 + L_1 \cong 2r \\ L_2 - L_1 = \Delta L \end{cases} \Rightarrow L_2^2 - L_1^2 = (L_2 - L_1)(L_2 + L_1) \cong 2r\Delta L$$

logo

$$L_2^2 - L_1^2 = 2rD \cos \theta \cong 2r\Delta L \quad \therefore \cos \theta = \frac{\Delta L}{D} = \frac{\Delta L}{2\lambda}$$

Para que tenhamos uma interferência construtiva é necessário que $\Delta L = \pm n \lambda$, ou seja:

$$\cos \theta = \pm \frac{n}{2}$$

$n = 0$	$\Rightarrow \cos \theta = 0$	$\Rightarrow \theta = 90^\circ$	ou	$\theta = 270^\circ$
$n = +1$	$\Rightarrow \cos \theta = +1/2$	$\Rightarrow \theta = 60^\circ$	ou	$\theta = 300^\circ$
$n = -1$	$\Rightarrow \cos \theta = -1/2$	$\Rightarrow \theta = 120^\circ$	ou	$\theta = 240^\circ$
$n = +2$	$\Rightarrow \cos \theta = +1$	$\Rightarrow \theta = 0^\circ$		
$n = -2$	$\Rightarrow \cos \theta = -1$	$\Rightarrow \theta = 180^\circ$		

Existem, portanto oito pontos de máximo.

- b)** Quantos pontos de sinal mínimo (interferência destrutiva) existem em um grande círculo em torno da fonte?

Para o cálculo de pontos com interferência destrutiva, o procedimento é equivalente:

$$L_2^2 - L_1^2 = 2rD \cos \theta \cong 2r\Delta L \quad \therefore \cos \theta = \frac{\Delta L}{D} = \frac{\Delta L}{2\lambda}$$

Para que tenhamos uma interferência destrutiva é necessário que

$$\Delta L = \pm \left(n\lambda + \frac{\lambda}{2} \right) = \pm (2n+1) \frac{\lambda}{2}$$

ou seja:

$$\cos \theta = \pm \left(\frac{2n+1}{4} \right)$$

$$\begin{array}{llllll}
 n = 0 & \Rightarrow & \cos \theta = + 1/4 & \Rightarrow & \theta = 75,52^0 & \text{ou} & \theta = 284,44^0 \\
 n = 0 & \Rightarrow & \cos \theta = - 1/4 & \Rightarrow & \theta = 104,47^0 & \text{ou} & \theta = 255,52^0 \\
 n = +1 & \Rightarrow & \cos \theta = + 3/4 & \Rightarrow & \theta = 41,40^0 & \text{ou} & \theta = 318,59^0 \\
 n = -1 & \Rightarrow & \cos \theta = - 3/4 & \Rightarrow & \theta = 138,59 & \text{ou} & \theta = 221,40^0
 \end{array}$$

Existem, portanto oito pontos de mínimo.

Capítulo 18 - Halliday, Resnick e Walker - 6ª. edição

13 Na figura á seguir, dois alto-falantes, separados por uma distância de $2m$, estão em fase. Supondo que a amplitude dos sons dos dois seja, de modo aproximado, a mesma na posição do ouvinte, que está a $3,75m$ diretamente à frente de um dos alto-falantes,

a) Para quais frequências audíveis ($20Hz - 20kHz$) existe um mínimo?

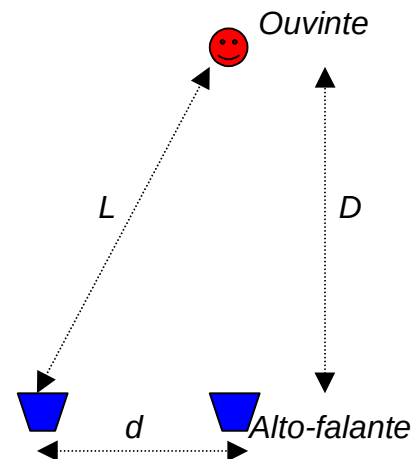
$$D = 3,75m$$

$$d = 2m$$

Por construção, temos que triângulo retângulo, logo:

$$L = \sqrt{d^2 + D^2} = 4,25m$$

Para que tenhamos um mínimo, a interferência entre as ondas deve ser destrutiva, e isso acontece quando a diferença de percurso for igual a meio comprimento de onda.



Ou de modo geral, for igual a um número inteiro de comprimentos de onda mais meio comprimento de onda

$$L - D = n\lambda + \frac{\lambda}{2}$$

ou ainda:

$$L - D = (2n + 1)\frac{\lambda}{2} \Rightarrow \lambda_n = \frac{2(L - D)}{2n + 1}$$

Mas

$$f_n = \frac{v}{\lambda_n} = (2n + 1)\frac{v}{2(L - D)}$$

Como:

$$\frac{v}{2(L - D)} = 343Hz$$

teremos:

$$f_0 = 343Hz$$

$$f_1 = 3 f_0 = 1029Hz$$

$$f_2 = 5 f_0 = 1715Hz$$

b) Para quais frequências o som fica ao máximo?

Para que tenhamos um máximo, a interferência entre as ondas deve ser construtiva, e isso acontece quando não existir diferença de percurso.

Ou de modo geral, for igual a um número inteiro de comprimentos de onda:

$$L - D = n\lambda$$

$$\lambda_n = \frac{(L - D)}{n}$$

Mas

$$f_n = \frac{v}{\lambda_n} = n \frac{v}{(L - D)}$$

Como:

$$\frac{v}{2(L - D)} = 686\text{Hz}$$

$$f_1 = 686\text{Hz}$$

$$f_2 = 2 f_1 = 1372\text{Hz}$$

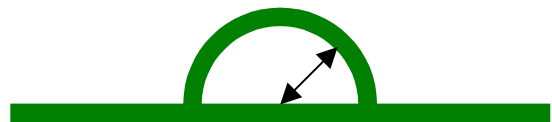
$$f_3 = 2058\text{Hz}$$

Capítulo 18 - Halliday, Resnick e Walker - 6ª. edição

16 Uma onda sonora de comprimento de onda 40cm entra no tubo mostrado na figura à seguir. Qual deve ser o menor raio r , de modo que um mínimo seja registrado no detector?

A diferença entre os percursos é dada por:

$$\Delta L = \pi r - 2r = (\pi - 2) r$$



Para que aconteça uma interferência destrutiva é necessário que a diferença de percurso tenha a forma:

$$\Delta L = (2n + 1) \frac{\lambda}{2} \Rightarrow (\pi - 2)r = (2n + 1) \frac{\lambda}{2}$$

Para se calcular o menor raio possível, basta fazer $n = 0$ na equação anterior, ou seja:

$$r = \frac{\lambda}{2(\pi - 2)} = 17,51\text{cm}$$

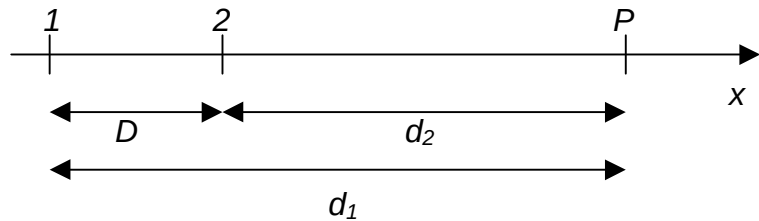
Capítulo 18 - Halliday, Resnick e Walker - 4ª. edição

“19” Duas ondas sonoras, originárias de duas fontes diferentes e com a mesma frequência $f = 540\text{Hz}$, viajam à velocidade de 330m/s . As fontes estão em fase. Qual a diferença das fases das ondas em um ponto que dista $4,4\text{m}$ de uma fonte e 4m de outra?. As ondas se propagam na mesma direção.

Vamos considerar as ondas com as formas:

$$s_1(x,t) = s_M \cos(kx - \omega t)$$

$$s_2(x,t) = s_M \cos(kx - \omega t + \varphi)$$



Vamos considerar que as fontes estão respectivamente nos pontos $x = 0$ e $x = D$. Desse modo, no instante $t = 0$ as fontes estão emitindo ondas tais que, no local de emissão temos:

$$s_1(0,0) = s$$

$$s_2(D,0) = s_M \cos(kD + \varphi)$$

Mas como as fontes estão emitindo em fase, devemos ter que:

$$s_2(D,0) = s_M \Rightarrow \cos(kD + \varphi) = 1 \quad \therefore \quad \varphi = -kD$$

ou seja:

$$s_2(x,t) = s_M \cos[k(x-D) - \omega t]$$

Assim temos o formato das duas ondas para quaisquer valores de x , e t . Para um ponto específico $x = d_1$, temos que:

$$s_1(d_1,t) = s_M \cos(kd_1 - \omega t)$$

e

$$s_2(d_1,t) = s_M \cos[k(d_1-D) - \omega t]$$

com as respectivas fases:

$$\Phi_1(d_1,t) = kd_1 - \omega t$$

$$\Phi_2(d_1,t) = k(d_1-D) - \omega t$$

$$\Delta\Phi = \Phi_1 - \Phi_2 = kD = 2\pi D / \lambda = 2\pi f D / v$$

$$\Delta\Phi = 4,11\text{rad}$$

Capítulo 18 - Halliday, Resnick e Walker - 4ª. edição	
“20”	Em um certo ponto no espaço, duas ondas produzem variações de pressão dadas por: $\Delta p_1 = \Delta p_M \sin(\omega t)$ e $\Delta p_2 = \Delta p_M \sin(\omega t - \varphi)$ Qual é a amplitude de pressão da onda resultante nesse ponto quando $\varphi = 0$; $\varphi = \pi/2$; $\varphi = \pi/3$ e $\varphi = \pi/4$?

$$\Delta p = \Delta p_1 + \Delta p_2 = \Delta p_M [\sin(\omega t) + \sin(\omega t - \varphi)]$$

Mas

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$$

logo

$$\Delta p = \left[2\Delta p_M \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \right] \sin\left(\omega t - \frac{\varphi}{2}\right)$$

onde a amplitude de pressão resultante é dada por:

$$\Delta P_M = 2\Delta p_M \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)$$

Para cada uma das situações mencionadas teremos os valores á seguir:

i. $\varphi = 0$

$$\Delta P_M = 2\Delta p_M$$

ii. $\varphi = \pi/2$

$$\Delta P_M = 2\Delta p_M \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \Delta p_M$$

iii. $\varphi = \pi/3$

$$\Delta P_M = 2\Delta p_M \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3} \Delta p_M$$

iv. $\varphi = \pi/4$

$$\Delta P_M = 2\Delta p_M \cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$$

Capítulo 18 - Halliday, Resnick e Walker - 6ª. edição	
---	--

30	Uma corda de violino de 15cm , presa em ambas as extremidades, oscila em seu modo $n = 1$. A velocidade das ondas na corda é de 250m/s e a velocidade do som no ar é de 348m/s .
----	--

a) Qual é a frequência da onda emitida?

$$L = 15\text{cm} = 0,15\text{m}$$
$$n = 1$$

$$v = 250\text{m/s}$$
$$v_S = 348\text{m/s}$$

Quando a corda de um violino está vibrando, devido à reflexão nas extremidades, forma-se uma onda estacionária. A condição para uma onda estacionária neste caso é:

$$L = n \frac{\lambda}{2} \Rightarrow \lambda_N = \frac{2L}{n}$$

$$f_N = \frac{v}{\lambda_N} = \frac{n}{2L} v = \frac{n}{2L} \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

$$f_1 = \frac{v}{2L} = 833,3 \text{ Hz}$$

b) Qual é o comprimento de onda da onda emitida?

Quando estiver no ar, essa onda vai se propagar com a velocidade do som v_s e desse modo teremos que:

$$\lambda = \frac{v_s}{f_1} = 0,419 \text{ m}$$

Capítulo 18 - Halliday, Resnick e Walker - 6ª. edição

45 Duas cordas de piano idênticas têm uma frequência fundamental de 600 Hz , quando colocadas sob a mesma tensão. Que aumento fracionário na tensão de uma corda irá levar à ocorrência de *6 batimentos*, quando as cordas oscilarem juntas?

Vamos considerar a interação de duas ondas:

$$s_1(x,t) = s_M \cos(k_1 x - w_1 t)$$

e

$$s_2(x,t) = s_M \cos(k_2 x - w_2 t)$$

logo:

$$s(x,t) = s_1(x,t) + s_2(x,t)$$

$$s(x,t) = s_M [\cos(k_1 x - w_1 t) + \cos(k_2 x - w_2 t)]$$

Vamos definir algumas grandezas:

$$\begin{cases} \Delta w = w_1 - w_2 \\ \Delta k = k_1 - k_2 \end{cases} \quad e \quad \begin{cases} \bar{w} = \left(\frac{w_1 + w_2}{2} \right) \\ \bar{k} = \left(\frac{k_1 + k_2}{2} \right) \end{cases}$$

Considerando a identidade trigonométrica:

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cos \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right)$$

encontramos que

$$s(x,t) = 2s_M \cos \left(\frac{\Delta k}{2} x - \frac{\Delta w}{2} t \right) \cos(\bar{k}x - \bar{w}t)$$

Para simplificar, e sem perda de generalidade, vamos analisar a interferência entre as ondas para o ponto $x = 0$. Neste caso:

$$s(0,t) = 2s_M \cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t\right) \cos(\bar{\omega}t)$$

onda a frequência de batimento $\omega_B = \Delta\omega$. Por outro lado:

$$\begin{cases} \Delta f = f_B = 6 \text{ batimentos / s} = 6 \text{ Hz} \\ f_1 = 600 \text{ Hz} \end{cases}$$

$$f_2 = f_1 - \Delta f = 600 - 6$$

$$f_2 = 594 \text{ Hz}$$

Como as duas cordas tem a mesma densidade e o mesmo tamanho, vão vibrar com mesmo comprimento de onda, mas com frequências diferentes.

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}} = \lambda f \Rightarrow f = \frac{1}{\lambda} \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

ou seja:

$$\frac{f_1}{f_2} = \frac{\frac{1}{\lambda} \sqrt{\frac{T_1}{\mu}}}{\frac{1}{\lambda} \sqrt{\frac{T_2}{\mu}}} = \sqrt{\frac{T_1}{T_2}} \Rightarrow \frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{f_1}{f_2}\right)^2$$

logo

$$\frac{\Delta T}{T_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1} = 1 - \frac{T_2}{T_1} = 1 - \left(\frac{f_2}{f_1}\right)^2 = 1 - 0,9801 = 0,0199$$

$$\left(\frac{\Delta T}{T}\right)\% = 1,99\%$$

Capítulo 18 - Halliday, Resnick e Walker - 6ª. edição

- 46 O vigilante rodoviário B está perseguindo o motorista A por uma estrada estreita. Ambos se movem a velocidade de 160 km/h . O vigilante rodoviário, não conseguindo alcançar o infrator faz soar a sua sirene. Considera a velocidade do som no ar como sendo 343 m/s e a frequência da sirene como sendo 500 Hz . Qual a mudança Doppler na frequência ouvida pelo motorista A ?

$$v_F = v_o = 160 \text{ km/h} = 44,45 \text{ m/s}$$

$$v = 343 \text{ m/s}$$

$$f = 500 \text{ Hz}$$

$$f' = f \left(\frac{v}{v \mp v_F} \right) \begin{cases} \text{sinal superior : aproximando - se} \\ \text{sinal inferior : afastando - se} \end{cases}$$

Neste problema: a fonte se aproxima do observador e este observador se afasta da fonte. Com o adendo que as duas velocidades são iguais, logo:

$$f' = f \left(\frac{v - v_o}{v - v_F} \right) \quad \therefore \quad f' = f$$

Capítulo 18 - Halliday, Resnick e Walker - 4ª. edição

"48"	Uma onda sonora de frequência 1000Hz , se propagando através do ar, tem uma amplitude de pressão de 10Pa .
------	--

$$\Delta p_M = 10\text{Pa}$$
$$f = 10^3\text{Hz}$$

a) Qual é o comprimento de onda?

$$v = 343\text{m/s}$$

$$\lambda = \frac{v}{f} = 0,343\text{m}$$

b) Qual é a amplitude de deslocamento da partícula?

$$\omega = 2\pi f = 6,28 \times 10^3 \text{rad/s}$$
$$k = 2\pi/\lambda = 18,31 \text{rad/m}$$

$$\Delta p = \Delta p_M \sin(kx - \omega t)$$

$$s(x, t) = s_M \cos(kx - \omega t)$$

$$\Delta p = -B \left(\frac{\partial s}{\partial x} \right) = -\rho v^2 \left(\frac{\partial s}{\partial x} \right)$$

$$\Delta p = -B [-k y_M \sin(kx - \omega t)]$$

ou seja:

$$\Delta p_M = k B s_M \Rightarrow s_M = \frac{\Delta p_M}{kB} = \frac{\Delta p_M}{k \rho v^2} = \frac{\Delta p_M}{\rho v \omega}$$

$$s_M = 3,83 \times 10^{-7} \text{m}$$

c) Qual é a velocidade máxima da partícula?

$$u(x, t) = \frac{\partial s(x, t)}{\partial t} = \omega s_M \sin(kx - \omega t)$$

$$u_M = \omega s_M = 2,4 \times 10^{-3} \text{m/s} = 0,24 \text{cm/s}$$

d) Um tubo de órgão, aberto nas duas extremidades, tem essa frequência como fundamental. Qual o comprimento do tubo?

Quando temos um tubo aberto em ambas as extremidades:

$$\begin{cases} L = n \frac{\lambda}{2} \Rightarrow \lambda_N = \frac{2L}{n} \\ f = \frac{v}{\lambda} \Rightarrow f_N = n \frac{v}{2L} \end{cases}$$

$$n = 1 \Rightarrow L = \frac{\lambda}{2} \therefore L = 0,171m$$

Capítulo 18 - Halliday, Resnick e Walker - 6ª. edição

48 Uma ambulância, tocando sua sirene a 1600Hz ultrapassa um ciclista, que estava pedalando uma bicicleta a 2,44m/s . Depois da ambulância ultrapassá-lo, o ciclista escuta a sirene a 1590Hz . Qual a velocidade da ambulância?

$$\begin{aligned} f &= 1600\text{Hz} \\ f' &= 1590\text{Hz} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v &= 343\text{m/s} \\ v_o &= 2,44\text{m/s} \end{aligned}$$

$$f' = f \left(\frac{v \pm v_o}{v \mp v_F} \right) \begin{cases} \text{sinal superior : aproximando - se} \\ \text{sinal inferior : afastando - se} \end{cases}$$

Depois que a ambulância ultrapassa o ciclista, ela passa a se afastar dele que caminha na direção dela: a fonte se afasta do observador que se aproxima desta fonte:

$$f' = f \left(\frac{v + v_o}{v + v_F} \right) \Rightarrow v_F = \left(\frac{f - f'}{f'} \right) v + \left(\frac{f}{f'} \right) v_o = 4,61\text{m/s}$$

Capítulo 18 - Halliday, Resnick e Walker - 6ª. edição

49 Um apito de frequência 540Hz move-se em uma trajetória circular de raio 60cm com uma velocidade de 15rad/s .

Quais são as menores e maiores frequências ouvida por um ouvinte a uma grande distância e em repouso em relação ao centro do círculo?

$$v_F = w r = 9\text{m/s}$$

$$\begin{aligned} f &= 540\text{Hz} \\ r &= 60\text{cm} = 0,6\text{m} \\ w &= 15\text{rad/s} \end{aligned}$$

$$f' = f \left(\frac{v \pm v_o}{v \mp v_F} \right) \begin{cases} \text{sinal superior : aproximando - se} \\ \text{sinal inferior : afastando - se} \end{cases}$$

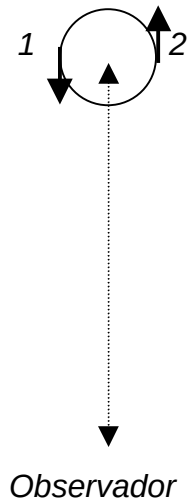
Quando o observador está fixo, temos duas possíveis situações:

$$f_1' = f \left(\frac{v}{v - v_F} \right) \text{ fonte aproximando - se}$$

$$f_2' = f \left(\frac{v}{v + v_F} \right) \text{ fonte afastando - se}$$

$$f_2' = 525,66\text{Hz}$$

$$f_1' = 555,14\text{Hz}$$



Capítulo 18 - Halliday, Resnick e Walker - 4ª. edição

“50” Uma onda sonora em um meio fluido é refletida em uma barreira, de tal modo que uma onda estacionária é formada. A distância entre os nós é de $3,8\text{cm}$ e a velocidade de propagação é de 1500m/s . Encontre a frequência.

A barreira funciona com um nó e a fonte também será considerada como um nó. Desse modo, o maior comprimento de onda dessa onda estacionária será tal que:

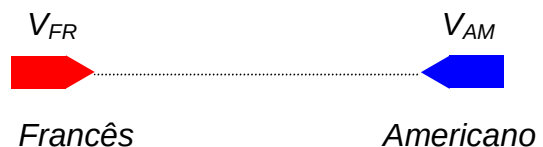
$$d = \frac{\lambda}{2}$$

Desse modo, temos que:

$$f = \frac{v}{\lambda} = \frac{v}{2d} = 19.736,8\text{Hz}$$

Capítulo 18 - Halliday, Resnick e Walker - 6ª. edição

51 Um submarino francês e um submarino norte-americano movem-se um em direção ao outro, durante manobras em águas paradas no Atlântico Norte. O submarino francês move-se a $50,0\text{km/h}$ e o submarino americano a $70,0\text{km/h}$. O submarino francês envia um sinal de sonar (onda sonora na água) a 1.000Hz . As ondas de sonar se propagam a uma velocidade de 5470km/h .



a) Qual a frequência do sinal quando detectado pelo submarino norte-americano?

$$V_{FR} = 50\text{km/h}$$

$$V_{AM} = 70\text{km/h}$$

$$f = 1.000\text{Hz}$$

$$V_S = 5.470\text{km/h}$$

Quando o submarino francês emite uma onda de frequência f e ela é captada pelo submarino americano com uma frequência f' enquanto os dois se aproximam, temos uma situação onde a fonte se aproxima do observador que por sua vez está também se aproximando desta fonte. Considerando que:

$$f' = f \left(\frac{v \pm v_o}{v \mp v_F} \right) \begin{cases} \text{sin al superior : aproximando - se} \\ \text{sin al inferior : afastando - se} \end{cases}$$

temos que:

$$f' = \left(\frac{V_S + V_{AM}}{V_S - V_{FR}} \right) f = 1022,2 \text{ Hz}$$

- b)** Qual a frequência detectada pelo submarino francês do sinal refletido de volta para ele pelo submarino norte-americano?

Quando o submarino americano refletir as ondas emitidas pelo submarino francês, o americano funcionará como uma fonte que se aproxima do observador e o francês como um observador que se aproxima da fonte. Desse modo:

$$f'' = \left(\frac{V_S + V_{FR}}{V_S - V_{AM}} \right) f'$$

ou seja:

$$f'' = \left(\frac{V_S + V_{FR}}{V_S - V_{AM}} \right) \left(\frac{V_S + V_{AM}}{V_S - V_{FR}} \right) f = 1044,4 \text{ Hz}$$

Capítulo 18 - Halliday, Resnick e Walker - 4ª. edição

- | | |
|----|---|
| 54 | Um morcego está voando rapidamente sem ficar em um lugar por muito tempo em uma caverna, navegando por meio de pulsos sonoros ultra-sônicos. Suponha que a frequência de emissão sonora do morcego seja de 39.000Hz. Durante uma rápida arremetida em direção à uma superfície de uma parede plana, o morcego está se movendo a 0,025 a velocidade do som. Que frequência o morcego escuta refletida pela parede? |
|----|---|

$$f = 39.000 \text{ Hz}$$

$$v_M = 0,025 v_S$$

$$f' = f \left(\frac{v \pm v_o}{v \mp v_F} \right) \begin{cases} \text{sin al superior : aproximando - se} \\ \text{sin al inferior : afastando - se} \end{cases}$$

Um observador junto à parede observará uma onda vindo do morcego com frequência

$$f' = \left(\frac{v_S}{v_S - v_M} \right) f$$

Essa será a frequência refletida pela parede. Como o morcego está se aproximando desta “nova fonte”, ele observará vindo da parede uma onda com frequência:

Essa será a frequência refletida pela parede. Como o morcego está se aproximando desta “nova fonte”, ele observará vindo da parede uma onda com frequência:

$$f'' = \left(\frac{v_s + v_m}{v_s} \right) f'$$

Logo

$$f'' = \left(\frac{v_s + v_m}{v_s} \right) \left(\frac{v_s}{v_s - v_m} \right) f = \left(\frac{v_s + v_m}{v_s - v_m} \right) f$$

ou seja:

$$f'' = 1,051 f = 40.989 \text{ Hz}$$

Capítulo 18 - Halliday, Resnick e Walker - 4ª. edição

55

Uma menina está sentada próxima à janela de um trem que está se movendo com uma velocidade de 10 m/s para o Leste. O tio da menina está de pé próximo aos trilhos e vê o trem se afastar. O apito da locomotiva emite um som com a frequência de 500 Hz . O ar está parado.

$$\begin{aligned} v_T &= 10 \text{ m/s} \\ v &= 343 \text{ m/s} \\ f &= 500 \text{ Hz} \end{aligned}$$



$$f' = f \left(\frac{v \pm v_o}{v \mp v_F} \right) \begin{cases} \text{sin al superior : aproximando - se} \\ \text{sin al inferior : afas tan do - se} \end{cases}$$

a) Que frequência o tio ouve?

Como o tio - observador está parado e a fonte – trem está em movimento, temos que:

$$f' = \left(\frac{v}{v + v_T} \right) f = 485,71 \text{ Hz}$$

b) Que frequência a menina ouve?

A menina – observador se move na direção do apito – fonte que move-se afastando-se da menina, e como ambos estão ligados à locomotiva, eles movimentam-se com a mesma velocidade. Desse modo temos que:

$$f' = \left(\frac{v + v_o}{v + v_F} \right) f$$

e como $v_o = v_F$, temos que

$$f = f' = 500 \text{ Hz}$$

c) Um vento começa a soprar vindo do Leste a 10 m/s . Que frequência o tio ouve agora?

O ar é o referencial privilegiado. Em relação à atmosfera, o tio viaja para o leste

com velocidade $v_O = 10\text{m/s}$, e o trem viaja para leste com velocidade $v_F = 10\text{m/s} + 10\text{m/s} = 20\text{m/s}$. Desse modo, teremos que:

$$f' = \left(\frac{v + v_O}{v + v_F} \right) f = \left(\frac{343 + 10}{343 + 20} \right) f$$

$$f' = 486,11\text{Hz}$$

d) Que frequência a menina ouve agora?

Apesar da menina e o apito terem modificado as suas velocidades, elas continuam sendo iguais entre si, logo teremos o mesmo resultado anterior:

$$f' = \left(\frac{v + v_O}{v + v_F} \right) f$$

e como $v_O = v_F$, temos que

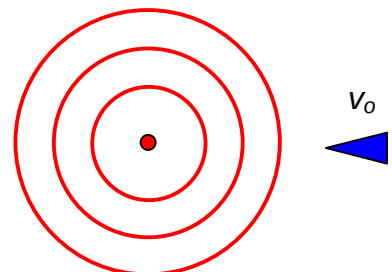
$$f = f' = 500\text{Hz}$$

Capítulo 18 - Halliday, Resnick e Walker - 4ª. edição

“69” Uma fonte F gera ondas na superfície de um lago, como mostradas na figura à seguir. A velocidade das ondas é $5,5\text{m/s}$ e a distância de crista à crista é $2,3\text{m}$. Você está em um pequeno bote, se dirigindo diretamente para F com velocidade constante de $3,3\text{m/s}$ em relação à costa. Qual a frequência das ondas que você observa?

$$\begin{aligned} v &= 5\text{m/s} \\ \lambda &= 2,3\text{m} \\ v_O &= 3,3\text{m/s} \end{aligned}$$

$$f = \frac{v}{\lambda} = 2,17\text{Hz}$$



$$f' = \frac{v + v_O}{\lambda} = \frac{v + v_O}{v/f} \Rightarrow f' = \left(\frac{v + v_O}{v} \right) f = 1,66 \cdot 2,17\text{Hz}$$

$$f' = 3,6\text{Hz}$$

Capítulo 18 - Halliday, Resnick e Walker - 4ª. edição

“71” Um apito usado para chamar cães tem uma frequência de 30kHz . O cão, entretanto o ignora. O dono do cão, que não pode escutar frequências acima de 20kHz , decide usar o efeito Doppler para descobrir se o apito funciona de maneira adequada. Pede a uma migo que sobre o apito no interior de um carro em movimento, enquanto ele permanece parado ouvindo.

a) Qual precisa ser a velocidade do carro para que o dono escute o apito a 20kHz (se ele estiver funcionando) ?

$$\begin{aligned}f &= 30\text{kHz} \\f' &= 20\text{kHz} \\v &= 343\text{m/s}\end{aligned}$$

$$f' = f \left(\frac{v}{v \mp v_F} \right) \begin{cases} \text{sin al sup erior : aproximando – se} \\ \text{sin al inf erior : afastando – se} \end{cases}$$

Como desejamos detectar uma frequência f' menor que aquela emitida, devemos escolher a situação tal que:

$$f' = f \left(\frac{v}{v + v_F} \right)$$

ou seja, o amigo no carro deve adotar uma direção tal que se afaste do dono do cão. Desse modo temos que:

$$v_F = v \left(\frac{f - f'}{f'} \right) = 171,6\text{m/s} = 617\text{km/h}$$

- b)** Refaça para uma frequência do apito igual a 22kHz , em vez de 30kHz .

Se a frequência do apito for mudada para $f = 22\text{kHz}$, teremos:

$$v_F = 34,3\text{m/s} = 123,48\text{km/h}$$

Notas de Aula de Física

19. TEMPERATURA, CALOR E PRIMEIRA LEI DA TERMODINÂMICA.....	2
TEMPERATURA	2
EQUILÍBRIO TÉRMICO.....	2
LEI ZERO DA TERMODINÂMICA	2
MEDINDO A TEMPERATURA.....	2
A escala Celsius.....	3
A escala Fahrenheit	4
Relação entre as escalas Celsius e Fahrenheit	4
A escala Kelvin.....	4
DILATAÇÃO TÉRMICA	5
CALOR.....	6
UM OLHAR MAIS DE PERTO NO CALOR E TRABALHO	7
A ABSORÇÃO DE CALOR.....	8
PRIMEIRA LEI DA TERMODINÂMICA	9
ALGUNS CASOS ESPECÍFICOS DA PRIMEIRA LEI DA TERMODINÂMICA	9
Processos adiabáticos	9
Processos a volume constante	10
Processos cíclicos.....	10
MECANISMOS DE TRANSFERÊNCIA DE CALOR	10
Condução.....	11
Radiação.....	13
SOLUÇÃO DE ALGUNS PROBLEMAS	14
03.....	14
05.....	15
07.....	16
09.....	16
16.....	17
18.....	17
21.....	18
22.....	19
23.....	20
25.....	21
“32”	21
“33”	22
35.....	23
43.....	24
46.....	24
49.....	25
50.....	26
53.....	27
57.....	28
60.....	28
61.....	29
65.....	30

19. Temperatura, Calor e Primeira Lei da Termodinâmica

Temperatura

O tato constitui uma das maneiras mais simples de fazer uma distinção entre corpos quentes e frios. Mas essa maneira de avaliação é bastante imprecisa, e além do mais poderá causar dificuldades se as temperaturas dos corpos estiverem muito próximas. Se construirmos uma experiência com três recipientes contendo água, onde um deles está a temperatura ambiente, o segundo a uma temperatura acima da ambiente e o terceiro a uma temperatura abaixo da ambiente. Vamos mergulhar uma das mãos no recipiente com água a uma temperatura acima da ambiente e a outra mão no recipiente com água a uma temperatura abaixo da ambiente, e permanecer pouco mais de um minuto nessa situação. Ao mergulhar as duas mãos no recipiente a temperatura ambiente iremos ter a sensação estranha onde uma mão manda a informação que a água está numa certa temperatura enquanto a outra mão manda uma informação de uma temperatura diferente. A mão que estava no recipiente com água mais fria sente a água mais quente, e a mão que estava no recipiente com água mais quente sente a água mais fria.

Felizmente existem substâncias que nos dão uma medida da temperatura de outros corpos e a relação entre elas. São chamadas de substâncias termométricas.

A temperatura é uma medida da agitação das partículas que compõem um certo material. Se considerarmos as moléculas um gás, quanto maior a sua temperatura mais energia cinética terão essas moléculas.

Equilíbrio térmico

Dois corpos em contato físico, estão em equilíbrio térmico quando param de trocar energia, quando o fluxo líquido de energia entre eles é nulo. Quando isso acontece, a temperatura dos dois corpos é a mesma.

Lei Zero da Termodinâmica

Se dois corpos A e B estão em equilíbrio térmico com um terceiro corpo C (o termômetro), eles também estarão em equilíbrio térmico entre si.

Medindo a Temperatura

Existem várias grandezas que variam as suas características quando varia a nossa percepção fisiológica de temperatura. Entre essas grandezas estão:

- o volume de um líquido,
- o comprimento de uma barra
- a resistência elétrica de um material
- o volume de um gás mantido a pressão constante

Qualquer dessas pode ser usada para construir um termômetro, isto é: estabelecer uma determinada escala termométrica. Uma tal escala termométrica é estabelecida pela escolha de uma determinada substância termométrica e também uma propriedade termométrica desta substância.

Deve-se entender que a cada escolha de uma substância, da sua respectiva propriedade termométrica, e da relação admitida entre essa propriedade e a temperatura, conduz a uma escala termométrica específica. As medidas obtidas nesta escala não devem coincidir necessariamente com as medidas realizadas em outra escala termométrica definida de forma independente. Justamente por essa liberdade na construção de uma escala termométrica, historicamente apareceram diversas escalas com leituras completamente diferentes de temperaturas.

Esse caos foi removido utilizando como padrão uma dada substância termométrica, e a dependência funcional entre a propriedade termométrica dessa substância e a temperatura T . Como exemplo, consideremos que exista uma relação linear entre uma propriedade termométrica X e a temperatura, de modo que:

$$T(X) = aX + b$$

onde X é o comprimento da uma coluna de mercúrio em um termômetro e a e b são constantes a serem determinadas.

Analisando essa relação para duas temperaturas diferentes T_1 e T_2 , encontramos que:

$$\begin{cases} T(X_1) = aX_1 + b \\ T(X_2) = aX_2 + b \end{cases} \quad \therefore \quad \begin{cases} a = \frac{T(X_2) - T(X_1)}{X_2 - X_1} \\ b = \frac{X_2 T(X_1) - X_1 T(X_2)}{X_2 - X_1} \end{cases}$$

usando os valores das constantes, temos que:

$$T(X) = \left[\frac{T(X_2) - T(X_1)}{X_2 - X_1} \right] X + \left[\frac{X_2 T(X_1) - X_1 T(X_2)}{X_2 - X_1} \right]$$

ou ainda:

$$T(X) = \left[\frac{X - X_1}{X_2 - X_1} \right] T(X_2) + \left[\frac{X_2 - X}{X_2 - X_1} \right] T(X_1)$$

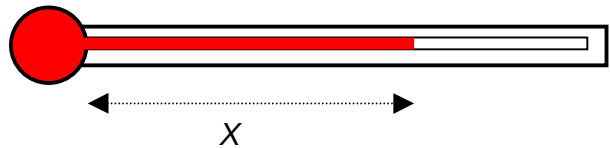
e finalmente

$$T(X) = T(X_1) + \left(\frac{X - X_1}{X_2 - X_1} \right) [T(X_2) - T(X_1)]$$

A escala Celsius

Para calibrar este termômetro na escala Celsius vamos considerar que as temperaturas $T(X_1) = 0^\circ\text{C}$ e $T(X_2) = 100^\circ\text{C}$ são respectivamente o ponto de vapor e o ponto do gelo, e que X_1 e X_2 são os respectivos comprimentos da coluna de mercúrio. Desse modo, encontramos que:

$$T_c(X) = \left[\frac{X - X_0}{X_{100} - X_0} \right] (100^\circ\text{C})$$



Isso equivale a dividir a escala entre X_0 e X_{100} em cem partes iguais, cada subdivisão correspondendo a 1°C , ou seja equivale a dizer que a dilatação da coluna de mercúrio é linear com $T(X)$.

A escala Fahrenheit

A escala Fahrenheit é usada nos Estados Unidos e Inglaterra. Para calibrar este termômetro na escala Celsius vamos considerar que as temperaturas $T(X_1)=32^\circ\text{C}$ e $T(X_2)=212^\circ\text{C}$ são respectivamente o ponto de vapor e o ponto do gelo, e que X_1 e X_2 são os respectivos comprimentos da coluna de mercúrio. Desse modo, encontramos que:

$$T_F(X) = 32^\circ\text{F} + \left[\frac{X - X_{32}}{X_{212} - X_{32}} \right] (180^\circ\text{F})$$

Relação entre as escalas Celsius e Fahrenheit

Se considerarmos dois termômetros de mesmo formato, feitos do mesmo material e calibrados nestas escalas, podemos dizer que quando estiverem medindo a mesma situação, a coluna terá um tamanho X , e portanto:

$$\frac{T_F - 32^\circ\text{F}}{180^\circ\text{F}} = \frac{T_C}{100^\circ\text{C}} = \frac{X - X_{\text{Gelo}}}{X_{\text{Vapor}} - X_{\text{Gelo}}}$$

ou seja:

$$T_F = 32 + \left(\frac{9}{5} \right) T_C$$

ou ainda:

$$T_C = \left(\frac{5}{9} \right) (T_F - 32)$$

A escala Kelvin

Se considerarmos o comportamento de um gás de N moléculas, constata-se experimentalmente que para uma dada temperatura:

$$\frac{pV}{N} = \text{const}$$

onde p é a pressão do gás e V é o volume ocupado por ele. Esta é a equação dos gases ideais e comprova-se que ela é válida sempre que a densidade N/V for pequena. A escala de temperaturas Kelvin é definida de modo que a relação entre a constante e a temperatura seja de proporcionalidade. Em outras palavras, a escala Kelvin é tal que:

$$\frac{pV}{N} = k_B T$$

onde k_B é a constante de Boltzmann. Usando o raciocínio anterior, lembramos que a substância termométrica nesse caso é um gás e a propriedade termométrica é a pressão desse gás a volume constante. Temos então que:

$$T(X) = aX \quad \therefore \quad T(X) = \left[\frac{T(X_0)}{X_0} \right] X$$

Considerando o ponto triplo da água, escolhemos a temperatura de calibração na escala Kelvin.

$$T = \left(\frac{273,16 \text{ K}}{\rho_{Tr}} \right) \rho$$

Uma vez calibrada a escala obtemos o valor de $k_B = 1,38 \times 10^{-23} \text{ J/K}$. A correspondência entre as escalas Celsius e Kelvin é tal que:

$$\begin{aligned} 0^\circ\text{C} &= 273,16\text{K} \\ 100^\circ\text{C} &= 373,15\text{K} \end{aligned}$$

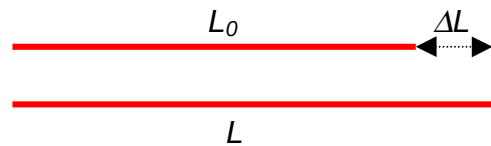
ou seja:

$$T_K = T_C + 273,16$$

Dilatação térmica

Quando aumentamos a temperatura de um sólido ele se dilata. A dilatação térmica desse sólido está associada ao aumento da distância entre os átomos vizinhos que o compõe. Poderíamos dizer que a força de interação elétrica entre esses átomos já não é suficiente para mantê-los tão próximos um dos outros devido a agitação térmica oriunda do aumento da temperatura.

Consideremos que em uma temperatura inicial T_i um sólido tenha um comprimento L_0 . Se aumentarmos a temperatura de ΔT , esse sólido aumentará o seu comprimento de ΔL . Para uma dada variação de temperatura podemos entender que a



a dilatação do sólido ΔL será proporcional ao seu comprimento inicial L_0 . Para uma variação de temperatura suficientemente pequena, podemos ainda inferir que a dilatação do sólido ΔL também será proporcional ao aumento da temperatura ΔT . Desse modo, podemos resumir, como:

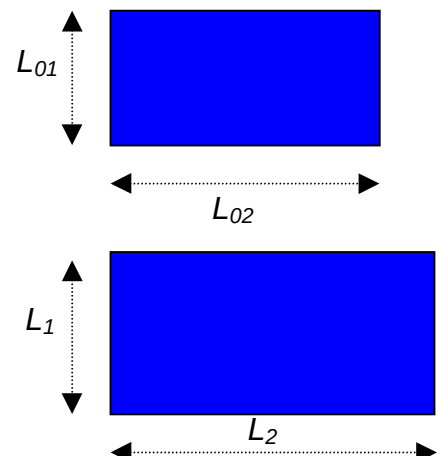
$$\Delta L = \alpha L_0 \Delta T$$

onde a constante de proporcionalidade α é chamada de coeficiente de dilatação linear do material considerado. Como

$$\begin{aligned} \Delta L &= L - L_0 \\ L &= L_0 (1 + \alpha \Delta T) \end{aligned}$$

Para muitos sólidos os coeficientes de dilatação é o mesmo nas suas diversas dimensões. Dizemos que eles têm uma dilatação isotrópica. Vamos considerar que uma chapa plana tenha dimensões L_{01} e L_{02} para uma dada temperatura inicial. Quando variarmos a temperatura de ΔT as dimensões se alteram para L_1 e L_2 conforme a figura ao lado. Considerando que os coeficiente de dilatação são os mesmos nas duas dimensões, teremos que:

$$\begin{aligned} L_1 &= L_{01} (1 + \alpha \Delta T) \\ L_2 &= L_{02} (1 + \alpha \Delta T) \end{aligned}$$



As áreas inicial e final podem ser definidas como:

$$A_0 = L_{01} L_{02}$$

e

$$A = L_1 L_2$$

$$A = [L_{01} (1 + \alpha \Delta T)] [L_{02} (1 + \alpha \Delta T)]$$

ou seja:

$$A = A_0 [1 + 2 \alpha \Delta T + (\alpha \Delta T)^2]$$

A aproximação da dilatação térmica $\Delta L = \alpha L_0 \Delta T$ é válida apenas igualmente para todos os materiais apenas em circunstâncias restritas, ou seja quando $\alpha \Delta T \ll 1$, e desse modo podemos afirmar que:

$$\alpha \Delta T \gg (\alpha \Delta T)^2$$

ou seja:

$$A = A_0 [1 + 2 \alpha \Delta T]$$

Quando lidamos com dilatação volumétrica de sólidos, podemos usar um raciocínio similar e encontrar que:

$$V = V_0 [1 + 3 \alpha \Delta T]$$

Em sólidos isotrópicos o coeficiente de dilatação superficial é definido como $\gamma = 2\alpha$ e o coeficiente de dilatação volumétrica é definido como $\beta = 3\alpha$.

Calor

No final do século XVIII, existiam duas hipóteses alternativas sobre o calor. A hipótese mais aceita considerava o calor como uma substância fluida indestrutível que “preencheria os poros” dos corpos e escoaria de um corpo mais quente a um mais frio. Lavoisier chamou esta substância hipotética de “calórico”. A implicação era que o calor pode ser transferido de um corpo a outro, mas a quantidade total de “calórico” se conservaria, ou seja, existiria uma lei de conservação de calor.

A hipótese rival, endossada entre outros por Francis Bacon e Robert Hooke, foi assim expressa por Newton em 1704: “O calor consiste num minúsculo movimento de vibração das partículas dos corpos”.

A principal dificuldade estava na “lei de conservação do calórico”, pois a quantidade de calórico que podia ser “espremida para fora” de um corpo por atrito era ilimitada. Com efeito, em 1798, Rumford escreveu: “Foi por acaso que me vi levado a realizar as experiências que vou relatar agora...Estando ocupado ultimamente em supervisionar a perfuração de canhões nas oficinas do arsenal militar de Munique, chamou-me a atenção o elevado grau de aquecimento de um canhão de bronze, atingido em tempos muito curtos, durante o processo de perfuração...A fonte de calor gerado por atrito nestas experiências parece ser inesgotável ... e me parece extremamente difícil de conceber qualquer coisa capaz de ser produzida ou transmitida da forma como o calor o era nestas experiências, exceto o MOVIMENTO.

Rumford foi levado a endossar a teoria alternativa de que “...o calor não passa de um movimento vibratório que tem lugar entre as partículas do corpo”.

H. Moysés Nussenzveig

Curso de Física Básica – Vol2 – 4ª. edição

Editora Edgard Blücher Ltda.

São Paulo - 2002

Um olhar mais de perto no Calor e Trabalho

Calor Q é energia em trânsito de um corpo para outro devido à diferença de temperatura entre eles.

Trabalho W é a energia que é transferida de um sistema para outro de tal modo que a diferença de temperaturas não esteja envolvida.

As grandezas Q e W não são características do estado de equilíbrio do sistema, mas sim dos processos termodinâmicos pelos quais o sistema passa quando vai de um estado de equilíbrio para outro. Desse modo, se um sistema vai de um estado de equilíbrio inicial para um outro estado de equilíbrio final, por dois caminhos diversos, para cada caminho ele terá um valor de Q e W específico.

Q e W são definidos como:

Q = calor transferido para o sistema

W = trabalho realizado pelo sistema

De modo geral, nós separamos uma certa quantidade de material que desejamos analisar. A esse material chamamos de sistema, que pode estar isolado (ou não) da sua vizinhança. A interação com a vizinhança pode ser de vários tipos: trocando calor, trocando trabalho, ou ambos os casos simultaneamente.

Um sistema sofre transformações que o levarão de um estado de equilíbrio inicial a um estado final, através de diversos estados intermediários. O caminho entre os estados inicial e final, através dos estados intermediários se dá por causa da interação do sistema com a sua vizinhança.

Para exemplificar, calculemos o trabalho feito por um sistema formado por um gás isolado no interior de um pistão, cujo êmbolo pode movimentar-se livremente sem atrito. Considere que inicialmente o êmbolo estava preso e continha um volume V_i , após ser solto ele moveu-se e o volume passou a ser V_f , quando então ele tornou a ser preso. O êmbolo subiu como consequência da pressão p exercida pelo gás. O trabalho elementar feito por esse sistema é definido como:

$$dW = F dx = p A dx$$

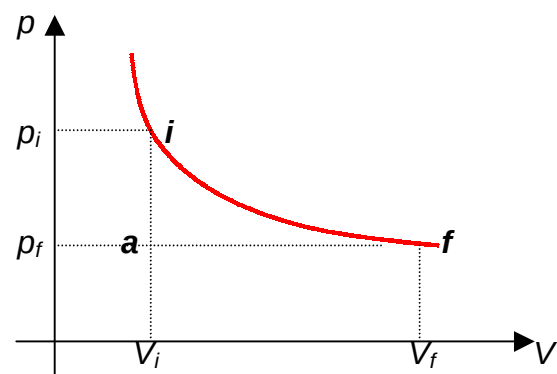
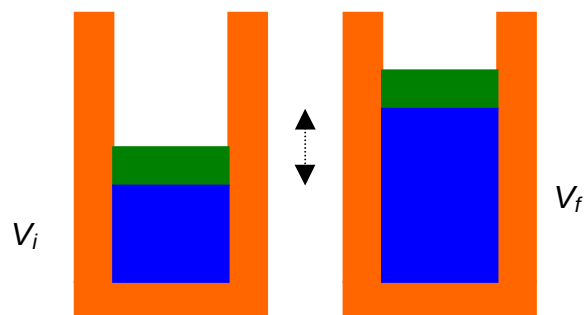
ou seja: quando o êmbolo moveu-se de dx , sob a ação de uma pressão interna p , o sistema executou um trabalho dW . A área do êmbolo é A , daí a variação de volume associada a dx é igual a $dV = A dx$, e portanto:

$$dW = p dV$$

O trabalho total executado pelo sistema entre os estados inicial e final, é definido como:

$$W_{if} = \int_i^f p dV$$

e considerando a definição de integral, temos que esse trabalho será a área abaixo da curva que vai do estado inicial até o estado final.



Como já tínhamos antecipado o valor do trabalho associado à mudança de estado do sistema não é único. Quando o sistema for do estado inicial até o final através do estado dos percursos *ia* e *af* o trabalho associado a esse percurso será diferente daquele considerado inicialmente.

A absorção de Calor

Quando uma certa quantidade de calor é transmitida para um corpo, na maioria dos casos a sua temperatura cresce. A quantidade de calor necessária para aumentar de um certo valor a temperatura de uma substância, depende da quantidade dessa substância, e varia de acordo com a substância. Se foi necessário *3min* para ferver *1litro* de água numa certa chama, serão necessários *6min* para ferver *2litros* de água na mesma chama. Se no entanto formos aquecer *1litro* azeite na mesma chama, será necessário um tempo maior que *3min*.

A propriedade física que define a quantidade de calor Q necessária para aquecer determinado material de ΔT é chamada capacidade térmica, e é definida como:

$$Q = C \cdot \Delta T$$

Desse modo poderemos calcular a capacidade térmica de *1litro* de água, de *2litros* de água, de *1litro* azeite e etc. A capacidade térmica é uma característica de uma amostra de determinada substância. Outra amostra diferente dessa mesma substância terá uma capacidade térmica diferente.

Fica claro que são limitadas as vantagens dessa propriedade física, a capacidade térmica. Mas à partir dela, definiu-se uma outra propriedade chamada calor específico c , que é uma característica de cada substância.

A propriedade física que define a quantidade de calor Q necessária para aquecer de ΔT uma massa m de determinado material é chamada calor específico, e é definida como:

$$Q = m \cdot c \cdot \Delta T$$

Como foi mencionado, calor é uma forma de energia e portanto a unidade de calor é a mesma de energia. Mas por razões históricas, ainda se usa como unidade de calor a *caloria* ou *cal*, que se define como a quantidade de calor necessária para aquecer *1g* de água de $14,5^{\circ}\text{C}$ até $15,5^{\circ}\text{C}$. Desse modo, a unidade do calor específico será $\text{cal/g}^{\circ}\text{C}$.

Como foi mencionado, uma substância altera a sua temperatura quando ela troca calor com a sua vizinhança. No entanto, existem algumas situações onde não acontece exatamente desse modo; um corpo pode absorver certa quantidade de calor e no entanto manter-se com a sua temperatura constante. Quando isso acontece, diz-se que o corpo passou por uma mudança de fase. Existe um exemplo corriqueiro: uma pedra de gelo numa temperatura de 0°C é retirada do congelado e colocada dentro de um copo na temperatura ambiente de 30°C . Esse material irá absorver calor da sua vizinhança e paulatinamente transformar-se-á em água a uma temperatura de 0°C .

A propriedade física que define a quantidade de calor Q necessária para uma mudança de fase de uma massa m de determinada substância é chamada calor latente, e é definida como:

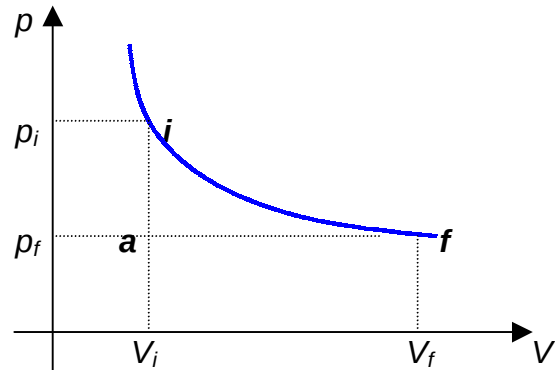
$$Q = m L$$

Quando estamos considerando a mudança do estado sólido para o estado líquido, chamamos de calor latente de fusão L_F , e quando estamos considerando a mudança do

estado líquido para o estado gasoso, chamamos de calor latente de vaporização L_V . A unidade do calor latente é cal/g .

Primeira Lei da Termodinâmica

Quando um sistema termodinâmico vai de um estado inicial i para um estado final f , ele pode fazer este “caminho” através de vários “percursos”. Na figura ao lado estão ilustrados dois “percursos”; diretamente ao longo da curva - **(1)** ou ao passando pelo estado a - **(2)**. em cada percurso o trabalho executado pelo sistema tem um resultado diferente. Por outro lado, a troca do o sistema com a sua vizinhança também é diferente em cada um dos dois percursos.



Define-se uma grandeza, chamada energia interna E , caracterizada pelos diversos tipos de energia possíveis de existir em uma substância quando ela está em determinado estado.

Se tivéssemos um gás diatômico, a energia interna desse gás em determinado estado teria uma parte associada ao seu movimento (energia cinética de translação), outra parte associada a rotação de um átomo em torno do outro (energia cinética de rotação), outra parte associada à oscilação de um átomo em relação ao outro (energia potencial elástica), e outros tipos de energia, de acordo com o modelo usado para descrever a molécula e o gás a que ela pertence.

No caso, mais simples, de um gás ideal monoatômico, a energia interna depende apenas do movimento dos átomos.

A diferença de energia interna entre os estados inicial e final $\Delta E_{Int} = E_F - E_I$ é uma grandeza de grande importância na termodinâmica, porque independente do percurso usado para ir de um estado para o outro, teremos sempre que:

$$\Delta E_{Int} = Q_{IF} - W_{IF} = Q_{IAF} - W_{IAF}$$

onde podemos definir a **Primeira Lei da Termodinâmica** como:

$$\Delta E_{Int} = Q - W$$

A diferença entre a quantidade de calor Q e o trabalho envolvidos em um percurso entre os estados inicial e final, depende apenas dos estados, e fornece o mesmo valor independente do percurso escolhido.

Alguns casos específicos da Primeira Lei da Termodinâmica

Processos adiabáticos

É um processo em que não existe troca de calor entre o sistema e a sua vizinhança, ou seja: o sistema está muito bem isolado termicamente. Na Natureza existem processos que podemos aproximar como adiabáticos. São aqueles que ocorrem tão

rapidamente que o sistema chega ao seu estado final antes que possa trocar calos com a vizinhança. Num processo adiabático, $Q = 0$ e de acordo com a Primeira Lei da Termodinâmica:

$$\Delta E_{Int} = -W$$

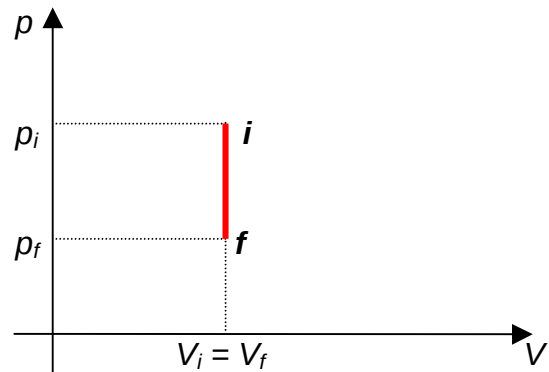
Processos a volume constante

São os chamados processos isométricos. Usando a definição de trabalho executado pelo sistema entre os estados inicial e final, encontramos que:

$$W_{if} = \int_i^f p dV = 0$$

porque não aconteceu variação de volume. Através da Primeira Lei da Termodinâmica encontramos que:

$$\Delta E_{Int} = Q$$



Processos cíclicos

Num processo cíclico o sistema passa por várias transformações, mas ao final do processo ele retorna ao estado inicial. Desse modo, temos que $E_I = E_F$ e portanto não existe variação de energia interna, logo:

$$Q = W$$

Mecanismos de transferência de Calor

A transferência de calor de um ponto a outro de um meio se dá através de três processos diferentes: convecção, radiação e condução.

A convecção ocorre tipicamente num fluido, e se caracteriza pelo fato de que o calor é transferido pelo movimento do próprio fluido, que constitui uma corrente de convecção. Um fluido aquecido localmente em geral diminui de densidade e por conseguinte tende a subir sob o efeito gravitacional, sendo substituído por um fluido mais frio, o que gera naturalmente correntes de convecção. O borbulhar da água fervente em uma panela é o resultado de correntes de convecção.

A radiação transfere calor de um ponto a outro através da radiação eletromagnética. A radiação térmica é emitida de um corpo aquecido e ao ser absorvida por outro corpo pode aquecê-lo, convertendo-se em calor. O aquecimento solar é uma forma de aproveitamento da radiação solar para a produção de calor. Um ferro em brasa emite radiação térmica e aquece a região que o rodeia.

A condução de calor só pode acontecer através de um meio material, sem que haja movimento do próprio meio. Ocorre tanto em fluidos quanto em meios sólidos sob o efeito de diferenças de temperatura.

H. Moysés Nussenzveig

Curso de Física Básica – Vol2 – 4ª. edição

Editora Edgard Blücher Ltda.

São Paulo – 2002

Quando colocamos uma panela com água no fogo, ele começa a aquecer a água. Esse processo inicial de aquecimento se dá por condução de calor, e a parte na superfície da água vai sendo aquecida paulatinamente. No entanto a taxa de aquecimento da água no fundo da panela é maior do que a taxa de aquecimento da água na superfície. A água entre o fundo e a superfície não dá conta da condução do calor que é comunicado através do fogo. Começam a se formar no fundo bolsões de água mais quentes que a vizinhança, e esses bolsões começam a subir para a superfície. Nesse instante a convecção passa a ser o processo principal de condução de calor na panela. E isso acontece por causa da incapacidade da água conduzir calor de maneira adequada nesta panela sobre o fogo.

Condução

Consideremos dois reservatórios térmicos que estão a temperaturas diferentes T_Q e T_F , tais que $T_Q > T_F$. Estes dois reservatórios serão conectados por uma placa de área transversal A e comprimento L , conforme mostra a figura ao lado. Vamos supor que a placa está isolada das vizinhanças, de modo que através dela passa apenas o fluxo de calor entre os reservatórios. Intuitivamente pode-se perceber que a taxa de transferência de calor dQ/dt que flui através da placa é proporcional à sua área e a diferença de temperatura entre os reservatórios de calor, e inversamente proporcional ao seu comprimento. Ou seja:

$$\frac{dQ}{dt} = kA \frac{T_Q - T_F}{L}$$

onde a constante de proporcionalidade k é conhecida como condutividade térmica da barra. Se considerarmos uma placa de comprimento Δx , que une dois reservatórios que têm uma diferença de temperatura ΔT , encontraremos que:

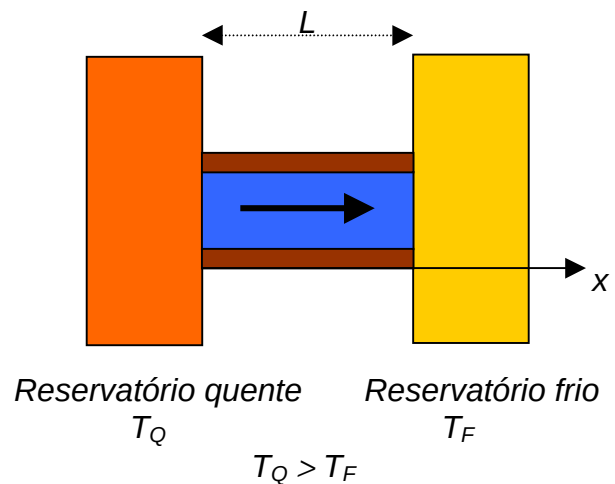
$$\frac{dQ}{dt} = -kA \frac{\Delta T}{\Delta x}$$

onde o sinal negativo exprime o fato que o calor flui de temperaturas mais quentes para temperaturas mais frias. Quando tivermos $\Delta x \rightarrow 0$, encontraremos que:

$$\frac{dQ}{dt} = -kA \frac{dT}{dx}$$

No estado estacionário, a temperatura na barra não depende mais do tempo t , e o fluxo de calor é o mesmo em qualquer parte da barra. Desse modo dQ/dt é uma constante, e a equação anterior toma a forma:

$$P = -kA \frac{dT}{dx} \Rightarrow dT = -\frac{P}{kA} dx \quad \therefore T_F - T_Q = -\frac{P}{kA} (x_F - x_Q)$$



ou seja:

$$\Delta T = \frac{P}{kA} L$$

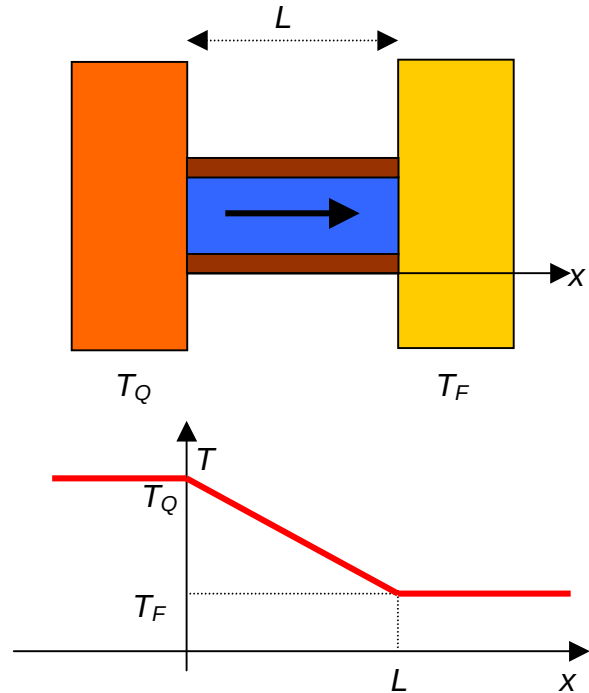
logo:

$$P = \frac{dQ}{dt} = kA \frac{\Delta T}{L} = kA \frac{T_Q - T_F}{L}$$

e desse modo poderemos calcular o fluxo de calor através da placa. Se quisermos saber como varia a temperatura ao longo da barra, podemos usar que:

$$dT = -\frac{P}{kA} dx \Rightarrow T(x) = -\frac{P}{kA} x + T_Q$$

$$T(x) = \left(\frac{T_F - T_Q}{L} \right) x + T_Q$$



Condução através de uma parede composta

Consideremos dois reservatórios térmicos que estão a temperaturas diferentes T_Q e T_F , tais que $T_Q > T_F$. Estes dois reservatórios serão conectados por duas placas de mesma área transversal A ; comprimentos L_1 e L_2 e condutividades térmicas k_1 e k_2 respectivamente, conforme mostra a figura ao lado.

Encontre a temperatura na junção das placas o fluxo de calor através delas.

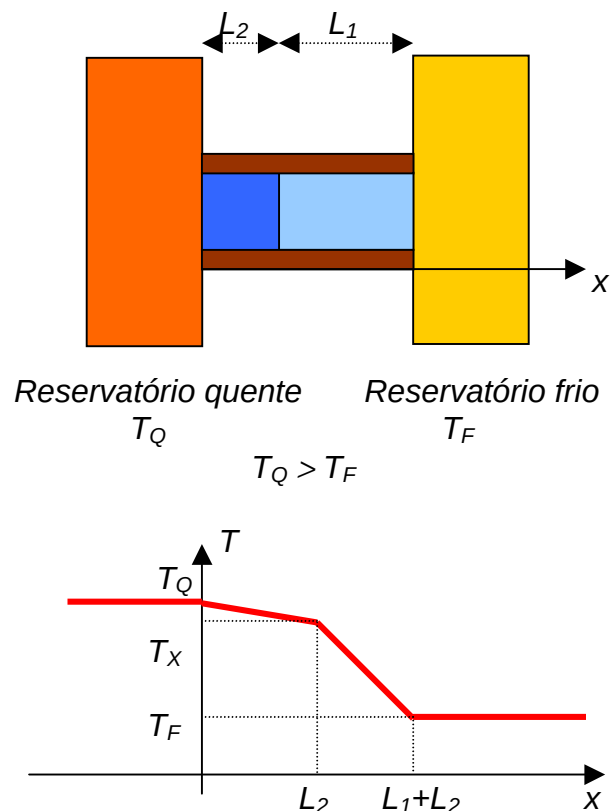
O fluxo de calor que sair da fonte quente e atravessar a primeira placa, será o mesmo que irá atravessar a segunda placa e chegar até a fonte fria. Portanto o fluxo P_1 que atravessa a primeira placa é igual ao fluxo P_2 que atravessa a segunda placa

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{dQ_1}{dt} = \frac{dQ_2}{dt}$$

Mas

$$P = \frac{dQ}{dt} = -kA \frac{dT}{dx}$$

$$\begin{cases} P_1 = -k_1 A \frac{dT}{dx} & \therefore P_1 = k_1 A \frac{T_Q - T_x}{L_2} \\ P_2 = -k_2 A \frac{dT}{dx} & \therefore P_2 = k_2 A \frac{T_x - T_F}{L_1} \end{cases}$$



No entanto

$$P_1 = P_2 \Rightarrow k_2 A \frac{T_Q - T_X}{L_2} = k_1 A \frac{T_X - T_F}{L_1}$$

ou seja:

$$T_X (L_2 k_1 + L_1 k_2) = T_Q L_1 k_2 + T_F L_2 k_1$$

$$T_X = \frac{T_Q L_1 k_2 + T_F L_2 k_1}{L_2 k_1 + L_1 k_2} = \frac{L_1 L_2 \left(T_Q \frac{k_2}{L_2} + T_F \frac{k_1}{L_1} \right)}{L_1 L_2 \left(\frac{k_2}{L_2} + \frac{k_1}{L_1} \right)}$$

$$T_X = \frac{T_Q \frac{k_2}{L_2} + T_F \frac{k_1}{L_1}}{\frac{k_2}{L_2} + \frac{k_1}{L_1}}$$

Por outro lado:

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{dQ_1}{dt} = \frac{dQ_2}{dt}$$

ou seja:

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{k_1 A}{L_1} (T_X - T_F) = \frac{k_1 A}{L_1} \left[\left(\frac{T_Q \frac{k_2}{L_2} + T_F \frac{k_1}{L_1}}{\frac{k_2}{L_2} + \frac{k_1}{L_1}} \right) - T_F \right]$$

e finalmente:

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{A(T_Q - T_F)}{\frac{L_2}{k_2} + \frac{L_1}{k_1}}$$

Radiação

A taxa P com que um objeto emite radiação depende da área A da superfície deste objeto e da temperatura T dessa área em Kelvins, e é dada por:

$$P = \sigma \varepsilon A T^4$$

Nesta equação $\sigma = 5,67 \times 10^{-8} \text{ W/m}^2 \text{ K}^4$ é chamada a constante de Stefan-Boltzmann. E a grandeza ε é a emissividade da superfície do objeto que vale entre 0 e 1 dependendo da composição da superfície.

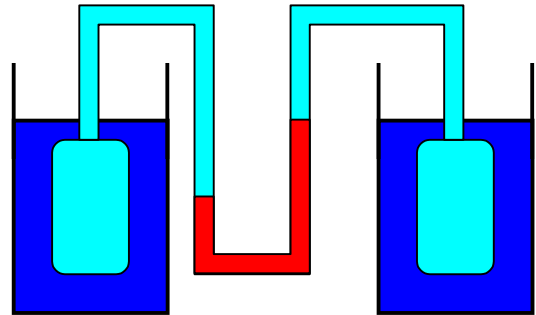
Solução de alguns problemas

Capítulo 19 - Halliday, Resnick e Walker

03 Um certo termômetro a gás é construído com dois bulbos contendo gás, cada um dos quais é colocado em banho-maria, como mostrado na figura à seguir. A diferença de pressão entre os dois bulbos é medida por um manômetro de mercúrio como mostrado. Reservatórios apropriados, não mostrados no diagrama, mantêm o volume de gás constante nos dois bulbos.

- Não há nenhuma diferença de pressão quando as duas cubas estão no ponto tríplice da água.
- A diferença de pressão é de 120Torr quando uma das cubas está no ponto tríplice e a outra está no ponto de ebulição da água.
- Ela vale 90Torr quando uma das cubas está no ponto tríplice da água e a outra está a uma temperatura desconhecida a ser medida.

Qual a temperatura a ser medida?



$$1\text{Torr} = 1\text{mmHg}$$

- Esse termômetro será construído considerando-se que um dos bulbos estará na temperatura do ponto triplo e o outro numa temperatura desconhecida, a ser medida. A diferença de pressão Δp é a propriedade termométrica a ser usada neste termômetro, logo:

$$T = a \Delta p + b$$

Quando o segundo bulbo também estiver na temperatura do ponto triplo, teremos que:

$$T_{Tr} = a \cdot 0 + b \quad \therefore \quad b = T_{Tr}$$

- Quando o segundo bulbo estiver no ponto de ebulição, teremos que:

$$T_{Eb} = a \cdot p_1 + b \quad ; \quad p_1 = 120\text{Torr}$$

$$a = \frac{T_{Eb} - b}{p_1} \quad \therefore \quad a = \frac{T_{Eb} - T_{Tr}}{p_1}$$

ou seja:

$$T = \left(\frac{T_{Eb} - T_{Tr}}{p_1} \right) \Delta p + T_{Tr}$$

- Para a temperatura desconhecida teremos que:

$$T = a \cdot p_2 + b \quad ; \quad p_2 = 90\text{Torr}$$

ou seja:

$$T = \left(\frac{T_{Eb} - T_{Tr}}{\rho_1} \right) \rho_2 + T_{Tr}$$

$$T = (373,16K - 273,16K) \frac{90Torr}{120Torr} + 273,16$$

$$T = 348,16K$$

Capítulo 19 - Halliday, Resnick e Walker	
--	--

05	
----	--

A que temperatura os seguintes pares de escala possuem a mesma leitura, se isto acontecer:

a) Fahrenheit e Celsius.

A relação entre estas escalas é:

$$T_C = \left(\frac{5}{9} \right) (T_F - 32)$$

e portanto teremos mesma leitura T_0 quando:

$$T_0 = \left(\frac{5}{9} \right) (T_0 - 32)$$

ou seja:

$$T_0 = -40^{\circ}C = -40^{\circ}F$$

b) Fahrenheit e Kelvin.

Temos que

$$T_C = \left(\frac{5}{9} \right) (T_F - 32)$$

e

$$T_K = T_C + 273,16$$

ou seja:

$$T_K = 273,16 + \left(\frac{5}{9} \right) (T_F - 32)$$

e portanto teremos mesma leitura T_0 quando:

$$T_0 = 273,16 + \left(\frac{5}{9} \right) (T_0 - 32)$$

ou seja:

$$T_0 = 574,61^{\circ}F = 574,61K$$

c) Celsius e Kelvin

A relação entre estas escalas é:

$$T_K = T_C + 273,16$$

e como é uma relação aditiva, não existe a possibilidade de termos as mesmas leituras nas duas escalas.

Capítulo 19 - Halliday, Resnick e Walker

07 Observa-se no dia-a-dia que objetos quentes e frios se esfriam o aquecem até a temperatura do ambiente ao seu redor. Se a diferença de temperatura ΔT entre um objeto e o seu ambiente ($\Delta T = T_{Obj} - T_{Amb}$) não for muito grande, a taxa de resfriamento ou de aquecimento de um objeto é proporcional, aproximadamente, a essa diferença de temperatura; ou seja:

$$\frac{d(\Delta T)}{dt} = -A(\Delta T)$$

onde A é constante. O sinal negativo aparece porque ΔT diminui com o tempo se ΔT for positivo e aumenta com o tempo se ΔT for negativo. Essa equação é conhecida como a *Lei de resfriamento de Newton*.

a) De que fatores depende A ? Qual é a sua unidade?

A depende principalmente da condutividade térmica do objeto. O lado esquerdo da equação tem unidades de temperatura sobre tempo, e desse modo, a unidade de A é o inverso de tempo: s^{-1} .

b) Se em algum instante $t = 0$ a diferença de temperatura for ΔT_0 , mostre que em um instante posterior ela será

$$\Delta T = \Delta T_0 e^{-At}$$

Da equação diferencial, encontramos que:

$$\frac{d(\Delta T)}{\Delta T} = -A dt$$

e quando integramos:

$$\ln(\Delta T) = -At + c_1$$

ou seja

$$\Delta T(t) = e^{c_1} e^{-At} = c_2 e^{-At}$$

Considerando as condições iniciais:

$$\Delta T(0) = c_2 = \Delta T_0$$

chegamos a:

$$\Delta T = \Delta T_0 e^{-At}$$

Capítulo 19 - Halliday, Resnick e Walker

09 Suponha que em uma escala linear de temperatura X , a água ferva a $-53,5^\circ X$ e se congele a $-170^\circ X$. Qual a temperatura de $340K$ na escala X ?

Vamos supor que a relação entre a escala X e a escala Kelvin seja linear, ou seja:

$$X(K) = a \cdot K + b$$

e ainda temos que:

	X	K
T_1	$-53,5^{\circ}X$	$373,16K$
T_2	$-170,0^{\circ}X$	$273,16K$

Desse modo:

$$X_1 = a K_1 + b$$

$$X_2 = a K_2 + b$$

logo:

$$X_1 - X_2 = a(K_1 - K_2) \quad \therefore \quad a = \frac{X_1 - X_2}{K_1 - K_2} = \frac{-53,5 - 170,0}{373,16 - 273,16}$$

ou seja:

$$a = 1,165^{\circ}X/K$$

E ainda:

$$b = X_1 - a K_1 = -488,045^{\circ}X$$

Portanto:

$$X(K) = 1,165 \cdot K - 488,045$$

Quando a temperatura $T_0 = 340K$, usando essa relação anterior, encontramos

$$T_0 = -91,945^{\circ}X$$

Capítulo 19 - Halliday, Resnick e Walker

- 16 A área S de uma placa retangular é ab . O seu coeficiente de expansão linear é α . Após um aumento de temperatura ΔT , o lado a aumenta de Δa e o lado b aumenta de Δb . Mostre que se a pequena quantidade $(\Delta a \Delta b)/ab$ for desprezada, então $\Delta S = 2 \alpha S \Delta T$.

$$\Delta a = \alpha a \Delta T$$

e

$$\Delta b = \alpha b \Delta T$$

$$S = a b$$

$$S + \Delta S = (a + \Delta a)(b + \Delta b)$$

$$S + \Delta S = a b + a \Delta b + b \Delta a + \Delta a \Delta b$$

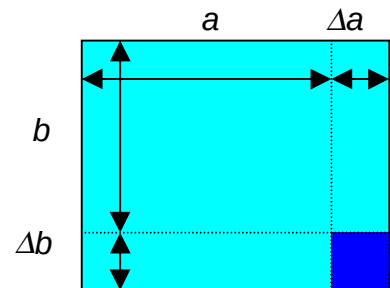
$$S + \Delta S = a b + 2 a b \alpha \Delta T + a b (\alpha \Delta T)^2$$

Considerando que:

$$2 \alpha \Delta T \gg (\alpha \Delta T)^2$$

teremos

$$\Delta S = 2 \alpha S \Delta T$$



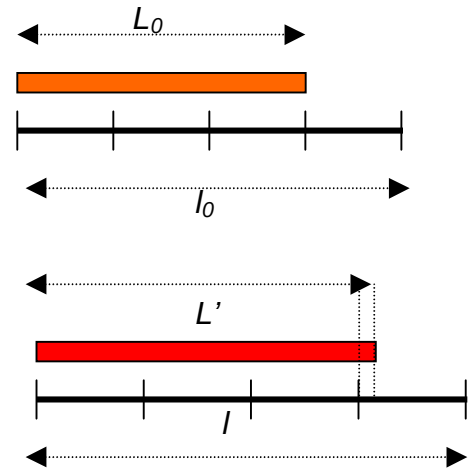
Capítulo 19 - Halliday, Resnick e Walker

- 18 A $20^{\circ}C$, uma haste mede exatamente $20,05cm$ de comprimento em uma régua de aço. Tanto a haste quanto a régua são colocadas em um forno a $270^{\circ}C$, onde a haste passa a medir $20,11cm$ na mesma régua. Qual o coeficiente de expansão térmica para o material do qual é feita a haste?

$$\begin{aligned} T_i &= 20^\circ\text{C} & L_0 &= 20,05\text{cm} \\ T_f &= 270^\circ\text{C} & L' &= 20,11\text{cm} \\ \Delta T &= 250^\circ\text{C} & \alpha_A &= 11 \times 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1} \end{aligned}$$

Se tivéssemos duas réguas idênticas de aço, uma a uma temperatura de 20°C e a outra a uma temperatura de 270°C , graduadas em cm, teríamos que l_0 a 20°C e l a 270°C se relacionam da seguinte maneira:

$$l = l_0(1 + \alpha_A \Delta T) \Rightarrow \frac{l}{l_0} = 1 + \alpha_A \Delta T = 1,00275$$



ou seja: a gradação dilatou-se de 0,275% e conseqüentemente as medidas efetuadas deverão ser alteradas desta fração. A gradação da régua sofreu uma variação percentual igual a variação percentual da régua como um todo. Desse modo, deveríamos fazer uma correção na medida L' realizada pela régua dilatada:

$$L = \left(\frac{l}{l_0} \right) L' = (1,00275) \cdot (20,11) \Rightarrow L = 20,165\text{cm}$$

O comprimento da haste dilatada L , medido pela régua não dilatada (a 20°C) forneceria o resultado L_0 :

Como queremos saber o quanto a haste se dilatou, devemos fazer as medidas antes e depois da dilatação com um instrumento que não se dilatou. Devemos usar L como sendo o comprimento da haste medido por uma régua que não sofreu dilatação, logo:

$$L = L_0(1 + \alpha_H \Delta T) \quad \therefore \quad \alpha_H = \frac{L - L_0}{L_0 \Delta T}$$

ou seja:

$$\alpha_H = 23 \times 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$$

Capítulo 19 - Halliday, Resnick e Walker

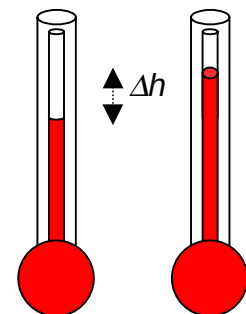
- 21 Mostre que quando a temperatura de um líquido em um barômetro varia de ΔT e a pressão é constante, a altura h do líquido varia de $\Delta h = \beta h \Delta T$ onde β é o coeficiente de expansão volumétrica deste líquido. Despreze a expansão do tubo de vidro.

Vamos considerar que o líquido se expande de acordo com a equação:

$$V = V_0 (1 + \beta \Delta T)$$

Mas como o tubo de vidro do barômetro tem uma dilatação desprezível, o líquido só poderá expandir-se ao longo do comprimento do tubo, que está vazio. Desse modo, temos que:

$$V_0 = A_0 h_0 \quad \text{e} \quad V = A_0 h$$



ou seja:

$$V - V_0 = (h - h_0) A_0 = \Delta h A_0$$

Mas por outro lado:

$$V - V_0 = V_0 \beta \Delta T = \beta h_0 A_0 \Delta T$$

Portanto:

$$\Delta h = h_0 \beta \Delta T$$

Capítulo 19 - Halliday, Resnick e Walker
--

22	Quando a temperatura de uma moeda de cobre é elevada de 100°C o seu diâmetro aumenta de $0,18\%$. Calcule com dois algarismos significativos:
----	--

$$\Delta T = 100^\circ\text{C}$$

$$\left(\frac{\Delta d}{d_0}\right)\% = 0,18\% \quad \therefore \quad \left(\frac{\Delta d}{d_0}\right) = 0,0018$$

logo

$$d = d_0(1 + \alpha\Delta T) \quad \therefore \quad \frac{d - d_0}{d_0} = \frac{\Delta d}{d_0} = \alpha\Delta T = 0,0018$$

a) O aumento percentual da área de uma face.

$$A = A_0(1 + \gamma\Delta T) \quad \therefore \quad \frac{A - A_0}{A_0} = \frac{\Delta A}{A_0} = \gamma\Delta T = 2\alpha\Delta T = 0,0036$$

logo:

$$\left(\frac{\Delta A}{A_0}\right)\% = 0,36\%$$

b) O aumento percentual da espessura.

$$\frac{\Delta L}{L_0} = \alpha\Delta T = 0,0018$$

logo:

$$\left(\frac{\Delta L}{L_0}\right)\% = 0,18\%$$

c) O aumento percentual do volume.

$$\frac{\Delta V}{V_0} = \beta\Delta T = 3\alpha\Delta T = 0,0054$$

logo:

$$\left(\frac{\Delta V}{V_0}\right)\% = 0,54\%$$

d) O aumento percentual da massa da moeda.

A massa obviamente não se modifica quando aumenta a temperatura.

e) O coeficiente de expansão linear da moeda.

$$d = d_0(1 + \alpha \Delta T) \quad \therefore \quad \frac{d - d_0}{d_0} = \frac{\Delta d}{d_0} = \alpha \Delta T = 0,0018$$

logo:

$$\alpha = \frac{\Delta d}{d_0 \Delta T} = 18 \times 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$$

Capítulo 19 - Halliday, Resnick e Walker
--

23	Um relógio de pêndulo com um pêndulo feito de latão é projetado para medir com precisão o tempo a 20°C . Se o relógio operar a 0°C , qual a intensidade de seu erro, em segundos por hora? O relógio adianta ou atrasa?
----	---

$$\begin{aligned} T_i &= 20^\circ\text{C} \\ T_f &= 0^\circ\text{C} \\ \Delta T &= -20^\circ\text{C} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha_L &= 0,7 \times 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1} \\ T &= 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}} \end{aligned}$$

O período do pêndulo T vai se alterar da seguinte maneira:

$$\frac{T'}{T} = \frac{2\pi \sqrt{\frac{L'}{g}}}{2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}} = \sqrt{\frac{L'}{L}} = \sqrt{\frac{L(1 + \alpha_L \Delta T)}{L}} = \sqrt{1 + \alpha_L \Delta T} = 0,999997$$

ou seja:

$$T' = T \sqrt{1 + \alpha_L \Delta T}$$

Como o tempo esfria, a haste do pêndulo se contrai diminuindo o seu tamanho, e portanto *diminuindo o seu tempo correspondente ao seu período*, ou seja: $T' < T$. Desse modo, o mesmo intervalo de tempo passa a ter mais períodos que antes. Como o tempo é medido nesse tipo de relógio em relação ao número de períodos **o relógio irá adiantar**. Se inicialmente em 10s temos 10 períodos, depois do esfriamento teremos mais períodos neste intervalo de tempo, e o relógio irá indicar um intervalo de tempo maior que os 10s iniciais.

Imaginemos a medição de um certo intervalo de tempo t que corresponde a um certo número n de períodos T . Temos então que:

$$n = \frac{t}{T}$$

Para calcular qual intervalo de tempo t' será medido quando a temperatura variar, devemos multiplicar o número de períodos n pelo valor do novo período T' . Ou seja:

$$t' = n T' = t \left(\frac{T'}{T} \right) \quad \therefore \quad \Delta t = t - t' = t \left(1 - \frac{T'}{T} \right) = t \left(\frac{\Delta T}{T} \right)$$

$$\Delta t = t \sqrt{1 + \alpha_L \Delta T} = 7 \times 10^{-6} t$$

<i>t</i> - intervalo	<i>Δt</i> - atraso
1 hora	0,0252s
1 dia	0,6048s
1 mês	18,144s

Capítulo 19 - Halliday, Resnick e Walker

- 25 Como resultado de uma elevação de temperatura de 32°C , uma barra com uma fissura no seu centro empena para cima. Se a distância fixa L_0 for $3,77\text{m}$ e o coeficiente de expansão linear da barra for $25 \times 10^{-6} / ^{\circ}\text{C}$, determine a elevação x do centro da barra.

$$\begin{aligned} \Delta T &= 32^{\circ}\text{C} \\ L_0 &= 3,77\text{m} \\ \alpha &= 25 \times 10^{-6} / ^{\circ}\text{C} \end{aligned}$$

$$L = L_0 (1 + \alpha \Delta T)$$

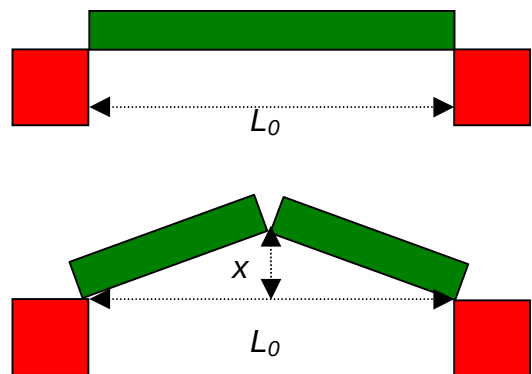
e

$$\left(\frac{L}{2} \right)^2 = \left(\frac{L_0}{2} \right)^2 + x^2$$

ou seja:

$$x^2 = \left(\frac{L_0}{2} \right)^2 \left[1 - \left(\frac{L}{L_0} \right)^2 \right]$$

$$x = \frac{L_0}{2} \sqrt{(1 + \alpha \Delta T)^2 - 1} = 0,02 L_0 = 0,0754\text{m}$$



Capítulo 19 - Halliday, Resnick e Walker – **Edição antiga**

- “32” Consideremos um termômetro de mercúrio em vidro. Suponhamos que a seção transversal do capilar seja constante, A_0 , e que V_0 seja o volume do tubo do termômetro a 0°C . Se o mercúrio for exatamente o suficiente para encher o tubo a 0°C , mostre que o comprimento L da coluna de mercúrio no capilar, depois de uma variação de temperatura ΔT , será:

$$L = \frac{V_0}{A_0} (\beta - 3\alpha) \Delta T$$

ou seja: é proporcional à temperatura; β é o coeficiente de dilatação volumétrica do mercúrio e α é o coeficiente de dilatação linear do vidro.

Quando a temperatura varia, o volume do tubo esférico de vidro varia para V_V e o mercúrio que o preenchia inicialmente, varia para V_M . desse modo, temos que:

$$V_M = V_0 (1 + \beta_M \Delta T)$$

e

$$V_V = V_0 (1 + \beta_V \Delta T)$$

Se existir um aumento de temperatura, o mercúrio transbordará do tubo esférico.

Seja ΔV o volume de mercúrio que transbordará:

$$\Delta V = V_M - V_V = V_0 (1 + \beta_M \Delta T) - V_0 (1 + \beta_V \Delta T) = V_0 (\beta_M - \beta_V) \Delta T$$

Mas

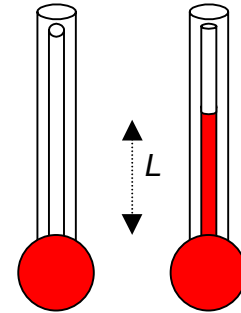
$$\Delta V = A_0 L$$

logo

$$\Delta V = V_0 (\beta_M - \beta_V) \Delta T = A_0 L$$

Como temos que $\beta_M = \beta$ e $\beta_V = 3\alpha$, teremos:

$$L = \frac{V_0}{A_0} (\beta - 3\alpha) \Delta T$$



Capítulo 19 - Halliday, Resnick e Walker – **Edição antiga**

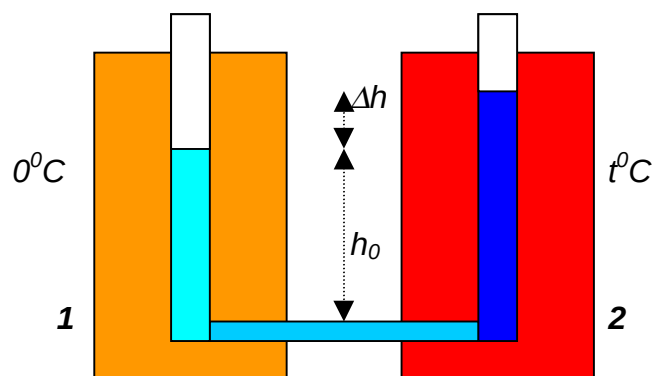
“33”

Dois tubos verticais contêm um líquido e estão ligados, pelas extremidades inferiores, por um tubo capilar horizontal. Um dos tubos verticais encontra-se em um banho que contém gelo e água em equilíbrio (0°C) e o outro está em um banho de água quente ($t^\circ\text{C}$). A diferença entre as alturas nas colunas líquidas nos dois tubos é Δh ; h_0 é a altura da coluna a 0°C .

- a) Mostrar que esse aparelho, usado originalmente por Dulong e Petit em 1816, pode ser utilizado para medir o verdadeiro coeficiente de dilatação β de um líquido (e não a dilatação diferencial entre ele e o vidro.

Como os tubos verticais se comunicam e estão conectados por um tubo capilar horizontal,

as suas pressões nos pontos mais baixos são iguais, ou seja:



$$p_1 = p_2 \quad \therefore \quad p_0 + \rho_1 g h_0 = p_0 + \rho_2 g (h_0 + \Delta h) \quad \Rightarrow \quad h_0 (\rho_1 - \rho_2) = \rho_2 \Delta h$$

É o mesmo líquido que preenche os dois tubos e o capilar, e portanto o peso desse líquido na coluna direita é igual ao peso na coluna esquerda. As colunas

têm alturas diferentes devido a diferença de densidade dos líquidos, e as densidades são diferentes por as temperaturas nas colunas são diferentes. Como os pesos das colunas são iguais, temos que as massas de líquido nas colunas são iguais. A densidade é definida como:

$$\rho = \frac{M}{V}$$

ou seja:

$$h_0 \left(\frac{M}{V_1} - \frac{M}{V_2} \right) = \frac{M}{V_2} \Delta h \Rightarrow h_0 M \left(\frac{V_2 - V_1}{V_1 V_2} \right) = M \frac{\Delta h}{V_2}$$

logo:

$$h_0 (V_2 - V_1) = V_1 \Delta h$$

As massas das colunas são iguais, e os volumes são diferentes devido a diferença de temperatura, logo eles estão relacionados como:

$$V_2 = V_1 (1 + \beta \Delta T)$$

onde

$$\Delta T = t - 0^\circ\text{C} = t$$

ou seja:

$$V_2 - V_1 = V_1 \beta t$$

e portanto:

$$V_2 - V_1 = \frac{V_1 \Delta h}{h_0} = V_1 \beta t \quad \therefore \quad \beta = \frac{\Delta h}{h_0 t}$$

- b)** Determine β sabendo-se que quando $t = 16^\circ\text{C}$, tem-se $h_0 = 126\text{cm}$ e $\Delta h = 1,5\text{cm}$.

$$\beta = 7,4 \times 10^{-4} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$$

Capítulo 19 - Halliday, Resnick e Walker
--

- | | |
|----|---|
| 35 | Um pequeno aquecedor elétrico de imersão é usado para aquecer 100g de água para uma xícara de café instantâneo. O aquecedor está rotulado com “ 200Watts ”, o que significa que ele converte energia elétrica em energia térmica com essa taxa. Calcule o tempo necessário para levar toda essa água de 23°C para 100°C , ignorando quaisquer perdas. |
|----|---|

$$m = 100\text{g}$$
$$P = 200\text{W}$$

$$c = 1\text{cal/g.}^\circ\text{C}$$
$$T_i = 23^\circ\text{C}$$
$$T_f = 100^\circ\text{C}$$

$$Q = m \cdot c \cdot \Delta T = 100 \cdot 1 \cdot (100 - 23) = 7.700\text{cal}$$

ou seja:

$$Q = 32.232,2 \text{ Joules}$$

Mas

$$P = \frac{Q}{t} \Rightarrow t = \frac{Q}{P} = \frac{32.232,2\text{Joules}}{200\text{Watts}} = 161,1\text{s}$$

Capítulo 19 - Halliday, Resnick e Walker - 4ª. edição

- 43 Que massa de vapor d'água a 100°C deve ser misturada com 150g de gelo no seu ponto de fusão, em um recipiente isolado termicamente, para produzir água líquida a 50°C ?

$$\begin{aligned} m_G &= 150\text{g} \\ c &= 1\text{cal/g}^{\circ}\text{C} \\ L_F &= 79,5\text{cal/g} \\ L_V &= 539\text{cal/g} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_1 &= 0^{\circ}\text{C} \\ T_2 &= 50^{\circ}\text{C} \\ T_3 &= 100^{\circ}\text{C} \end{aligned}$$

Como todo esse material está isolado, a quantidade de calor que esse sistema troca com a vizinhança é nulo. Se um material que tem calor específico c , com massa M , varia a sua temperatura de T_i até T_f ele absorveu de sua vizinhança uma quantidade de calor Q , dada por

$$Q = M \cdot c \cdot (T_f - T_i)$$

Se $Q < 0$ dizemos que ele cedeu calor para a vizinhança. Por outro lado se uma massa M de gelo se transforma em água ela absorveu calor $M L_F$ da vizinhança, e se vapor d'água se transforma em líquido ele cedeu calor $M L_V$ para a vizinhança. Desse modo, temos que:

$$\Delta Q = 0$$

$$+ m_G L_F + m_G \cdot c \cdot (T_2 - T_1) - m L_V + m \cdot c \cdot (T_2 - T_3) = 0$$

Logo

$$m = \frac{m_G L_F + m_G c (T_2 - T_1)}{L_V + c (T_3 - T_2)}$$

ou seja:

$$m = 32,97\text{g}$$

Capítulo 19 - Halliday, Resnick e Walker - 4ª. edição

- 46 Uma garrafa térmica isolada contém 130cm^3 de café quente, a uma temperatura de 80°C . Você insere um cubo de gelo de 12g no seu ponto de fusão para esfriar o café. De quantos graus o seu café esfriou quando o gelo se derreteu? Trate o café como se ele fosse água pura e despreze as transferências de energia para o ambiente.

$$\rho_A = 1\text{g/cm}^3,$$

Mas

$$m_A = \rho_A \cdot V_A$$

logo:

$$V_A = 130\text{cm}^3 \Rightarrow m_A = 130\text{g}$$

$$L_F = 79,5\text{cal/g}$$

$$\begin{aligned} m_A &= 130\text{g} \\ T_A &= 80^{\circ}\text{C} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m_G &= 12\text{g} \\ T_G &= 0^{\circ}\text{C} \end{aligned}$$

Como o sistema está isolado, temos que

$$\Delta Q = 0$$

ou seja:

$$m_A \cdot c \cdot (T_F - T_A) + m_G L_F + m_G \cdot c \cdot (T_F - T_G) = 0$$

$$T_F = \frac{m_A c T_A + m_G c T_G - m_G L_F}{m_A c + m_G c} = 66,52^\circ\text{C}$$

Mas

$$\Delta T = T_A - T_F = 80^\circ\text{C} - 66,52^\circ\text{C}$$

ou seja:

$$\Delta T = 13,48^\circ\text{C}$$

Capítulo 19 - Halliday, Resnick e Walker - 4ª. edição

- 49 Uma amostra de gás se expande de 1m^3 para 4m^3 enquanto a sua pressão diminui de 40Pa para 10Pa . Quanto trabalho é realizado pelo gás se a sua pressão varia com o volume passando por cada uma das três trajetórias mostradas no diagrama p - V da figura ao lado?

$$W_B = W_{12} = \int_1^2 p dV$$

Para calcular esta integral devemos saber com a pressão p varia com o volume V ao longo da trajetória **B**. Através do gráfico constatamos que a curva é uma reta, do tipo:

$$p = a V + b$$

onde

$$a = \frac{p_2 - p_1}{V_2 - V_1} = \frac{10 - 40}{4 - 1} = -10 \text{ Pa/m}^3$$

e

$$b = p_1 - a V_1 \Rightarrow b = 50\text{Pa}$$

ou seja:

$$p = -10 V + 50$$

e desse modo:

$$W_B = \int_{V_1}^{V_2} (-10V + 50) dV = -10 \left. \frac{V^2}{2} \right|_1^4 + 50V \Big|_1^4$$

logo:

$$W_B = 75\text{Joules}$$

Por outro lado:

$$W_C = W_{14} + W_{42} = W_{42} = (10\text{Pa}) \cdot (4-1)\text{m}^3$$

ou seja:

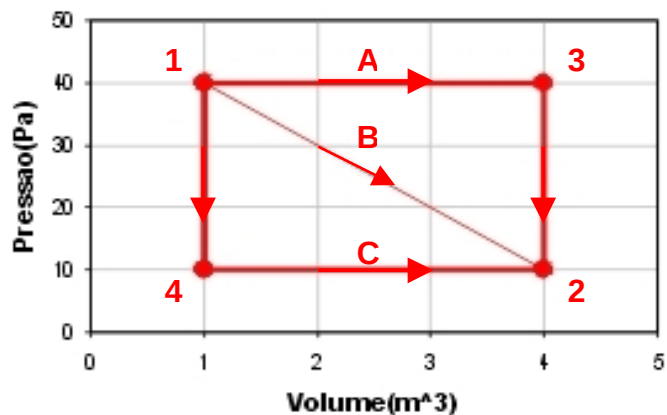
$$W_C = +30\text{Joules}$$

e também:

$$W_A = W_{13} + W_{32} = W_{32} = (40\text{Pa}) \cdot (4-1)\text{m}^3$$

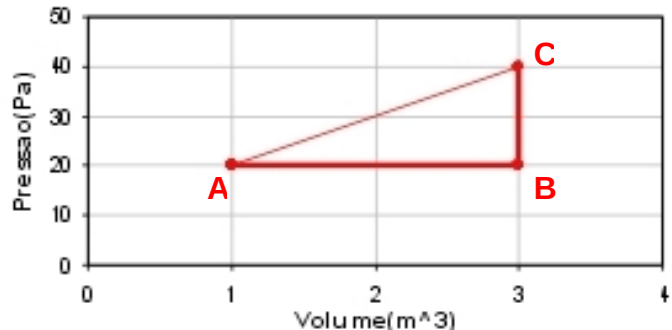
ou seja:

$$W_A = +120\text{Joules}$$



50. Um sistema termodinâmico é levado de um estado inicial A para um outro estado B e de volta ao estado A , passando pelo estado C , como é mostrado pela trajetória $ABCA$ no diagrama p - V da figura à seguir.

	Q	W	ΔE_{INT}
$A \rightarrow B$	+	+	+
$B \rightarrow C$	+	0	+
$C \rightarrow A$	-	-	-



- a) Complete a tabela acima preenchendo-a com $+$ ou $-$ para o sinal de cada grandeza termodinâmica associada com cada etapa do ciclo.

A primeira lei da termodinâmica diz que:

$$\Delta E = Q - W$$

$A \rightarrow B$

$$W_{AB} = p_A (V_B - V_A) > 0$$

mas como $\Delta E_{AB} > 0$,

$$Q_{AB} > W_{AB} > 0$$

$B \rightarrow C$

$$W_{BC} = 0$$

mas como $Q_{BC} > 0$,

$$\Delta E_{BC} > 0$$

$C \rightarrow A$

$$W_{CA} = \int_C^A p dV < 0$$

pois envolve uma compressão: $V_C > V_A$. Por outro lado:

$$\Delta E_{AB} = E_B - E_A > 0$$

e

$$\Delta E_{BC} = E_C - E_B > 0$$

ou seja:

$$E_C - E_A > 0$$

e portanto

$$\Delta E_{CA} = E_A - E_C < 0$$

Como $\Delta E_{CA} < 0$ e $W_{CA} < 0$, podemos usar a primeira lei da termodinâmica e concluir que $Q_{CA} < 0$.

- b) Calcule o valor numérico do trabalho realizado pelo sistema para o ciclo $ABCA$ completo.

O trabalho é a área abaixo da curva no gráfico p versus V . Em um ciclo, o

trabalho W será a área no interior da curva. Como já foi explicado $W_{CA} < 0$, e portanto o trabalho no ciclo será negativo.

$$W = \frac{1}{2}(\text{base}).(\text{altura}) = \frac{1}{2}(3 - 1)(40 - 20)m^3Pa$$

$$W = 20\text{Joules}$$

Capítulo 19 - Halliday, Resnick e Walker - 4ª. edição

53 Quando um sistema é levado do estado i para o estado f ao longo da trajetória iaf na figura à seguir, $Q = 50\text{cal}$ e $W = 20\text{cal}$. Ao longo da trajetória ibf , $Q = 36\text{cal}$.

a) Qual o valor de W ao longo da trajetória ibf ?

$$iaf : \begin{cases} Q = 50\text{cal} \\ W = 20\text{cal} \end{cases}$$

e

$$ibf : \begin{cases} Q = 36\text{cal} \end{cases}$$

Usando a primeira lei da termodinâmica, encontramos que:

$$\Delta E_{if} = Q_{iaf} - W_{iaf} = 30\text{cal}$$

Mas, por outro lado

$$\Delta E_{if} = Q_{ibf} - W_{ibf}$$

ou seja:

$$W_{ibf} = Q_{ibf} - \Delta E_{if} = 6\text{cal}$$

b) Se $W = -13\text{cal}$ para a trajetória de volta fi , qual será Q para essa trajetória?

$$\Delta E_{if} = E_f - E_i \quad \therefore \quad \Delta E_{fi} = E_i - E_f = -\Delta E_{if} = -30\text{cal}$$

logo:

$$Q_{fi} = \Delta E_{fi} + W_{fi} = -43\text{cal}$$

c) Considere $E_i = 10\text{cal}$, qual é o valor de E_f ?

$$\Delta E_{if} = E_f - E_i \quad \therefore \quad E_f = \Delta E_{if} + E_i = 30\text{cal} + 10\text{cal} = 40\text{cal}$$

d) Considere $E_b = 22\text{cal}$, qual o valor de Q para as trajetórias ib e bf ?

$$\Delta E_{ib} = E_b - E_i = 22 - 10 = 12\text{cal}$$

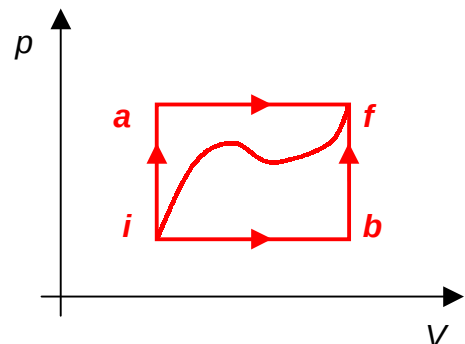
$$\Delta E_{bf} = E_f - E_b = 40 - 22 = 18\text{cal}$$

e

$$W_{ibf} = W_{ib} + W_{bf}$$

Mas $W_{bf} = 0$, logo

$$W_{ib} = W_{ibf} = 6\text{cal}$$



Portanto:

$$Q_{ib} = \Delta E_{ib} + W_{ib} = 12 + 6 = 18 \text{ cal}$$

$$Q_{bf} = \Delta E_{bf} + W_{bf} = 18 + 0 = 18 \text{ cal}$$

Capítulo 19 - Halliday, Resnick e Walker - 4ª. edição

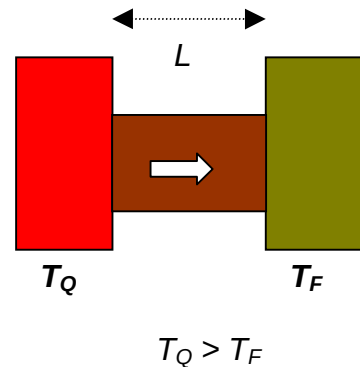
- 57 Considere a placa mostrada na figura à seguir. Suponha que $L = 25 \text{ cm}$, $A = 90 \text{ cm}^2$ e que o material seja cobre. Se $T_Q = 125^\circ \text{C}$, $T_F = 10^\circ \text{C}$ e for alcançado o regime permanente, encontre a taxa de condução através da placa.

$$k_{Cu} = 401 \text{ W/m.K}$$

$$P = \frac{dQ}{dt} = kA \frac{T_Q - T_F}{L}$$

$$P = 401 \cdot (90 \times 10^{-4} \text{ m}^2) \frac{125 - 10}{25 \times 10^{-2}}$$

$$P = 1.660,14 \text{ Watts}$$

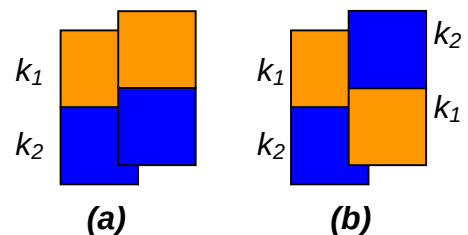


Capítulo 19 - Halliday, Resnick e Walker - 4ª. edição

- 60 Quatro pedaços de isolantes feitos de dois materiais diferentes, todos com a mesma espessura L e área A , estão disponíveis para cobrir uma abertura de área $2A$. Isto pode ser feito de duas maneiras mostradas na figura ao lado. Que arranjo (a) ou (b), fornece o menor fluxo de energia se $k_1 \neq k_2$.

Se tivermos apenas uma placa de condutividade térmica k ; área A ; e comprimento L entre duas fontes de calor, o fluxo de calor P será dado por

$$P = \frac{dQ}{dt} = kA \frac{T_Q - T_F}{L}$$



Se tivermos duas placas entre duas fontes de calor, o fluxo de calor P será dado por

$$P = \frac{dQ}{dt} = \frac{A(T_Q - T_F)}{\frac{L_2}{k_2} + \frac{L_1}{k_1}}$$

Vamos considerar que nos casos **a** e **b**, os arranjos estão entre duas fontes de calor com temperaturas T_Q e T_F .

No arranjo **a**, dois pares de placas iguais formam o conjunto: duas placas com k_1 e duas placas com k_2 . O fluxo de calor através das placas k_1 tem a forma:

$$\begin{cases} P_1 = k_1 A \frac{T_Q - T_F}{2L} \\ P_2 = k_2 A \frac{T_Q - T_F}{2L} \end{cases} \Rightarrow P_A = P_1 + P_2 = \left(\frac{k_1 + k_2}{2} \right) A \left(\frac{T_Q - T_F}{L} \right)$$

No arranjo **b** duas placas diferentes formam um conjunto, e dois desses conjuntos formam o arranjo. O fluxo através de cada arranjo será dados por:

$$P_1 = A \frac{T_Q - T_F}{\frac{L}{k_1} + \frac{L}{k_2}} = A \left(\frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} \right) \left(\frac{T_Q - T_F}{L} \right)$$

Como os fluxos nos dois conjuntos são iguais:

$$P_B = 2P_1 = A \left(2 \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} \right) \left(\frac{T_Q - T_F}{L} \right)$$

Para encontrar em qual arranjo teremos o maior fluxo, vamos calcular a razão:

$$\frac{P_A}{P_B} = \frac{\left(\frac{k_1 + k_2}{2} \right)}{\left(2 \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} \right)} = \frac{(k_1 + k_2)^2}{4k_1 k_2}$$

$$\frac{(k_1 + k_2)^2}{4k_1 k_2} > 1 \Rightarrow k_1^2 + k_2^2 + 2k_1 k_2 > 4k_1 k_2 \Rightarrow k_1^2 + k_2^2 - 2k_1 k_2 > 0$$

ou seja:

$$(k_1 - k_2)^2 > 0$$

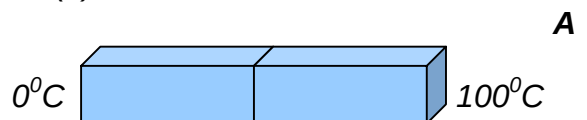
E como a equação anterior é sempre verdadeira, concluímos que:

$$P_A > P_B$$

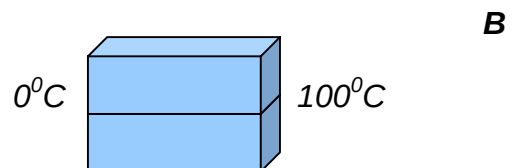
Capítulo 19 - Halliday, Resnick e Walker - 4ª. edição

- 61 Duas hastes metálicas retangulares idênticas são soldadas extremidade com extremidade, como mostrado na *figura (a)*, e $10J$ são conduzidos (em um processo em regime estacionário) através das hastes sob a forma de calor em $2min$. Quanto tempo levaria para que $10J$ fossem conduzidos através das hastes se elas fossem soldadas uma na outra como mostrado na *figura (b)*?

$$P = \frac{dQ}{dt} = \frac{A(T_Q - T_F)}{\frac{L_2}{k_2} + \frac{L_1}{k_1}}$$



$$P_A = \frac{A(T_Q - T_F)}{\frac{L}{k_2} + \frac{L}{k_1}} = A \left(\frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} \right) \left(\frac{T_Q - T_F}{L} \right)$$



$$P = kA \frac{T_Q - T_F}{L}$$

logo:

$$P_B = A(k_1 + k_2) \frac{T_Q - T_F}{L}$$

A razão entre os fluxos:

$$\frac{P_A}{P_B} = \frac{k_1 k_2}{(k_1 + k_2)^2}$$

e como as placas são iguais:

$$\frac{P_A}{P_B} = \frac{1}{4} \Rightarrow P_B = 4P_A$$

$$\begin{cases} P_A = \frac{Q_A}{t_A} \\ P_B = \frac{Q_B}{t_B} \end{cases} \Rightarrow \frac{P_A}{P_B} = \frac{Q_A t_B}{Q_B t_A}$$

Como $Q_A = Q_B$

$$t_B = t_A \frac{P_A}{P_B} = \frac{t_A}{4}$$

ou seja:

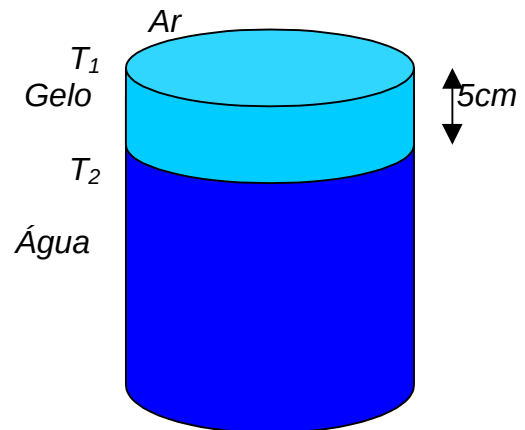
$$t_B = 0,5min$$

Capítulo 19 - Halliday, Resnick e Walker - 4ª. edição

- 65 Um tanque de água ficou destampado em tempo frio, e uma placa de gelo de 5cm de espessura se formou na sua superfície. O ar acima do gelo está a $-10^{\circ}C$. Calcule a taxa de formação de gelo (em centímetros por hora) na placa de gelo. Adote a condutividade térmica e massa específica do gelo como $0,0040cal/s.cm.^{\circ}C$ e $0,92g/cm^3$. Suponha que não haja transferência de energia através das paredes ou pelo fundo do tanque.

$$\begin{aligned} k &= 0,0040cal/s.cm.^{\circ}C \\ \rho &= 0,92g/cm^3 \\ L_F &= 79,5cal/g \\ T_1 &= -10^{\circ}C \\ T_2 &= 0^{\circ}C \\ L &= 5cm \end{aligned}$$

Vamos considerar que a camada de gelo vá se aprofundando, de modo que num intervalo de tempo dt , se forme uma camada de gelo de área A e espessura dx , ou seja, se formaria um volume de gelo $dV = A dx$, e a esse volume corresponde uma massa dM , tal que:



$$dM = \rho dV = \rho A dx$$

A quantidade de calor que deve ser retirada para a formação deste camada de gelo, é dada por:

$$dQ = -L_F dM = -\rho A L_F dx$$

A taxa de calor retirado no tempo, ou fluxo de calor será dada por:

$$\frac{dQ}{dt} = -\rho A L_F \frac{dx}{dt}$$

onde dx/dt é a velocidade com que a camada dx de gelo aumenta, ou seja é a taxa de formação da placa de gelo. Mas por outro lado, o fluxo de calor que sai do gelo para a atmosfera através da placa de gelo já formada é dada por:

$$\frac{dQ}{dt} = kA \frac{T_2 - T_1}{L}$$

Como o gelo irá sendo formado como consequência desse fluxo, temos que:

$$\frac{dQ}{dt} = -\rho A L_F \frac{dx}{dt} = kA \frac{T_2 - T_1}{L}$$

ou seja:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{k}{\rho L_F} \frac{T_2 - T_1}{L} = 1,09 \times 10^{-4} \text{ cm/s}$$

e ainda

$$\frac{dx}{dt} = 0,39 \text{ cm/hora}$$

Notas de Aula de Física

20. TEORIA CINÉTICA DOS GASES	2
UMA NOVA MANEIRA DE VER OS GASES	2
O NÚMERO DE AVOGADRO	2
GASES IDEAIS.....	2
<i>Trabalho com temperatura constante</i>	<i>3</i>
CÁLCULO CINÉTICO DA PRESSÃO	3
ENERGIA CINÉTICA DE TRANSLAÇÃO	6
PERCURSO LIVRE MÉDIO	6
DISTRIBUIÇÃO DE VELOCIDADES MOLECULARES.....	7
CALORES ESPECÍFICOS MOLARES DE UM GÁS IDEAL	9
<i>A energia interna E_{INT}.....</i>	<i>9</i>
<i>Calor específico molar a volume constante – C_V</i>	<i>9</i>
<i>Calor específico molar a pressão constante – C_P.....</i>	<i>10</i>
<i>Relação entre C_V e C_P para um gás ideal</i>	<i>10</i>
TRANSFORMAÇÃO ADIABÁTICA DE UM GÁS IDEAL	11
SOLUÇÃO DE ALGUNS PROBLEMAS	13
10.....	13
“10”.....	13
11.....	15
12.....	15
15.....	16
16.....	17
17.....	17
19.....	18
23.....	18
“27”.....	19
28.....	20
33.....	20
36.....	21
43.....	21
45.....	23
47.....	23
57.....	24
61.....	24

20. Teoria Cinética dos Gases

Quando consideramos um gás contido em um recipiente podemos analisá-lo de uma maneira global usando a Termodinâmica, e calcular as suas propriedades macroscópicas tais como temperatura, pressão, volume e etc.

Por outro lado, se quisermos entender os porquês do comportamento macroscópico, devemos analisar os constituintes deste gás, como eles interagem entre si e como interagem com as paredes do volume que os contém.

Uma nova maneira de ver os Gases

Os gases são constituídos de pequenas entidades, que podem ser átomos, moléculas ou ambos. Ele será um gás monoatômico quando composto apenas de átomos (ou seja: moléculas monoatômicas) ou um gás poliatômico, dependendo das suas características moleculares.

As moléculas interagem entre elas, e essa interação acontece aos pares, ou seja elas interagem duas a duas. Se neste gás existirem N moléculas cada molécula interage com todas as outras $N-1$ moléculas. Cada molécula deve ter o seu movimento governado pela segunda lei de Newton, e portanto temos N equações referentes a aplicação dessa lei, uma para cada molécula. Como cada molécula interage com as restantes, o seu movimento irá interferir no movimento de todas as outras, e dizemos então que essas equações estão acopladas uma as outras.

O número de equações resultante deste modelo torna a sua solução numérica impossível, mesmo usando os melhores computadores contemporâneos.

O Número de Avogadro

Mas quantas moléculas existem em uma amostra macroscópica de uma dada substância? Vamos definir uma grandeza adequada para lidar com moléculas, é o mol. Um mol é o número de moléculas que existem em 12g de carbono-12. Experimentalmente se determina quantas moléculas existem em um mol, e esse é o chamado número de Avogadro N_A ,

$$N_A = 6,02 \times 10^{23} \text{ moléculas}$$

Desse modo, já podemos relacionar número de moles μ e número de moléculas N , ou seja:

$$N = \mu N_A \Rightarrow \mu = \frac{N}{N_A}$$

Gases ideais

Se considerarmos uma amostra com 12g de carbono-12, teremos neste material $N_A = 6,02 \times 10^{23}$ moléculas, e se desejarmos usar a segunda lei de Newton para calcular as trajetórias das moléculas, teremos que resolver N_A equações acopladas. O que fazer nesta situação?

A aproximação mais drástica possível será considerar que as moléculas não

interagem, elas se ignoram, e desse modo elas interagem apenas com as paredes do recipiente que contém a mostra do gás. Apesar desta aproximação ser drástica, ela se aproxima da realidade em muitas situações práticas, quando a densidade do gás é suficientemente baixa. Nestas circunstâncias, uma amostra de um gás real se aproxima do modelo do gás ideal.

Trabalhos experimentais com gases ideais mostraram que a pressão, temperatura e volume se relacionam de tal modo que:

$$p V = \mu R T$$

onde μ é o número de moles do gás presentes na amostra considerada e $R=8,31\text{J/mol.K}$ é a constante universal dos gases. A equação anterior é chamada equação dos gases ideais. Por outro lado, se ao invés de moles estivermos usando o número de moléculas, a equação tomará a forma

$$p V = N k_B T$$

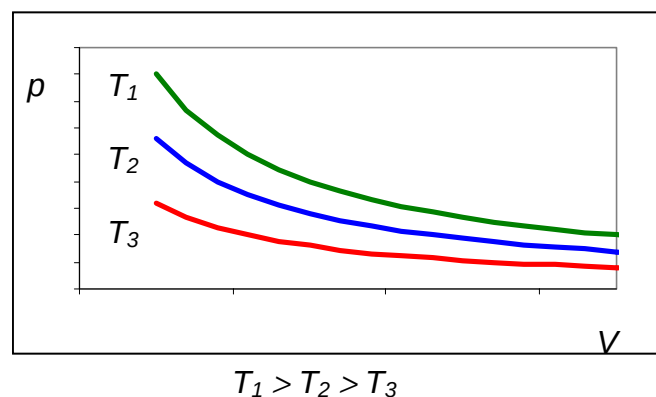
onde N é o número de moléculas do gás presentes na amostra considerada e $k_B=1,38 \times 10^{-23}\text{J/K}$ é a constante de Boltzmann. Pode-se notar que:

$$\mu R = N k_B \Rightarrow k_B = \frac{\mu}{N} R = \frac{R}{N_A} \therefore R = k_B N_A$$

Trabalho com temperatura constante

Vamos considerar um sistema em contato com um reservatório térmico. Nessas condições esse sistema pode sofrer mudanças de pressão e volume mas manterá sempre a mesma temperatura, que é a temperatura do reservatório térmico. O trabalho realizado pelo sistema é definido como:

$$W_{if} = \int_{V_i}^{V_f} p dV$$



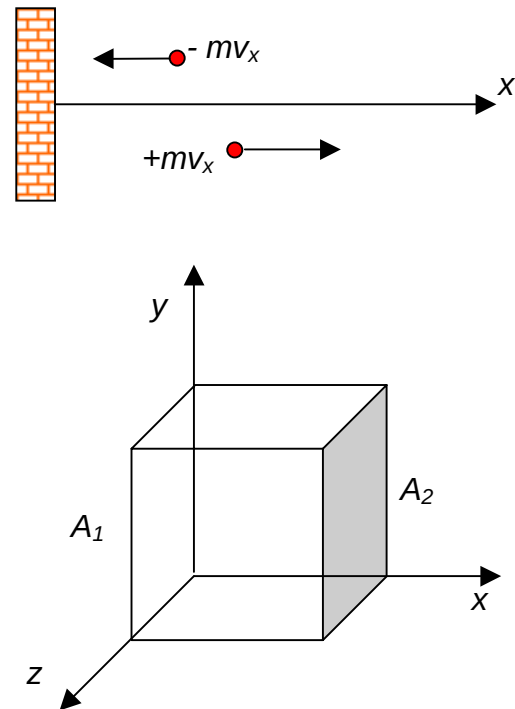
Mas como o gás é ideal e a temperatura é mantida constante ao longo da transformação, temos que:

$$W_{if} = \mu R T \int_{V_i}^{V_f} \frac{dV}{V} = \mu R T (\ln V) \Big|_{V_i}^{V_f} = \mu R T (\ln V_f - \ln V_i) = \mu R T \ln \left(\frac{V_f}{V_i} \right)$$

Cálculo cinético da pressão

Vamos considerar N moléculas um gás ideal em um recipiente em forma de um cubo de aresta L e considerar os eixos cartesianos paralelos as arestas, como na figura a seguir.

As moléculas desse gás estão continuamente colidindo com as paredes do recipiente. Vamos analisar especificamente a colisão de uma molécula, que se dirige para colidir com a parede do recipiente paralela ao plano yz e que passa pela origem. Quando ela colide com a parede, não acontecerá mudança nas componentes y e z do momento linear, mas a componente x do momento linear mudará de sinal, acontecerá uma reversão neste movimento. Estamos considerando que as colisões são perfeitamente elásticas. A variação do momento dever-se-á apenas a mudança da componente x .



$$\Delta p = p_f - p_i = mv_x - (-mv_x) = 2mv_x$$

Sejam A_1 e A_2 as paredes do cubo perpendiculares ao eixo x . A molécula vai colidir com a face A_1 e levar um intervalo de tempo Δt para colidir com a face oposta A_2 e depois colidir novamente com A_1 .

O tempo t necessário para essa molécula ir de uma face até outra é dado por $t=L/v_x$, e desse modo:

$$\Delta t = 2t = \frac{2L}{v_x}$$

A variação do momento linear de uma molécula, num intervalo Δt entre duas colisões com a mesma face do recipiente é dada por:

$$\frac{\Delta p_x}{\Delta t} = \frac{2mv_x}{2L/v_x} = \frac{mv_x^2}{L}$$

A equação anterior nos dá a força que uma molécula exerce na face considerada. Para se encontrar a força total exercida por todas as moléculas, devemos considerar as contribuições de todas as N moléculas:

$$F_x = \frac{m}{L} (v_{x1}^2 + v_{x2}^2 + \dots + v_{xN}^2)$$

A pressão que essas moléculas exercerão dependerá da força média e será dada por:

$$p = \frac{\langle F_x \rangle}{L^2} = \frac{m}{L^3} (\langle v_{x1}^2 \rangle + \langle v_{x2}^2 \rangle + \dots + \langle v_{xN}^2 \rangle)$$

onde estamos representando o valor médio de uma grandeza A por $\langle A \rangle$. Como as moléculas não são distinguíveis, os valores médios das componentes x de cada uma das moléculas são iguais, ou seja:

$$\left(\langle v_{x1}^2 \rangle + \langle v_{x2}^2 \rangle + \dots + \langle v_{xN}^2 \rangle\right) = N \langle v_x^2 \rangle$$

Considerando que neste cubo não existe direção privilegiada, os valores médios das diversas componentes serão iguais, ou seja:

$$\langle v^2 \rangle = \langle v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 \rangle = 3 \langle v_x^2 \rangle \Rightarrow \langle v_x^2 \rangle = \frac{1}{3} \langle v^2 \rangle$$

e como temos N moléculas nesse gás ideal;

$$\left(\langle v_{x1}^2 \rangle + \langle v_{x2}^2 \rangle + \dots + \langle v_{xN}^2 \rangle\right) = N \langle v_x^2 \rangle = \frac{N}{3} \langle v^2 \rangle$$

Desse modo:

$$p = \frac{\langle F_x \rangle}{L^2} = \frac{m}{L^3} \left(\langle v_{x1}^2 \rangle + \langle v_{x2}^2 \rangle + \dots + \langle v_{xN}^2 \rangle\right) = \frac{mN}{3V} \langle v^2 \rangle$$

onde consideramos que o volume do cubo é $V = L^3$. Podemos ainda dizer que:

$$pV = \frac{mN}{3} \langle v^2 \rangle$$

Mas Nm é a massa total do gás pois: N é número de moléculas e m é a massa de cada molécula. Por outro lado, a massa total também pode ser expressa como μM pois: μ é o número de moles e M é a massa molar. Portanto, usando a equação dos gases ideais:

$$pV = \frac{\mu M}{3} \langle v^2 \rangle = \mu RT \Rightarrow \langle v^2 \rangle = \frac{3RT}{M}$$

e se definirmos

$$v_{RMS} = \sqrt{\langle v^2 \rangle}$$

(*RMS = root mean square*) encontramos que:

$$v_{RMS} = \sqrt{\frac{3RT}{M}}$$

Entretanto a massa molar M é igual ao número de Avogadro vezes a massa m de uma molécula $M = N_A m$, e a constante universal dos gases pode ser escrita como $R = N_A k_B$, e desse modo teremos que:

$$v_{RMS} = \sqrt{\frac{3k_B T}{m}}$$

Energia cinética de translação

Como já foi mencionada, em um gás ideal as moléculas não interagem, portanto não existem energia potencial e o único tipo de energia possível é a energia cinética de translação. A energia cinética média de uma partícula é dada por:

$$\langle K \rangle = \left\langle \frac{1}{2} m v^2 \right\rangle = \frac{m}{2} \langle v^2 \rangle = \frac{m}{2} \frac{3k_B T}{m}$$

$$\langle K \rangle = \frac{3}{2} k_B T$$

Percurso livre médio

Entre colisões sucessivas, o movimento de uma molécula de um gás ideal é retilíneo e uniforme. A distância média que uma molécula percorre entre duas colisões sucessivas é chamado percurso livre médio.

Se tivermos duas moléculas de diâmetro d , ocorrerá uma colisão quando os seus centros se aproximarem de uma distância d .

Uma descrição equivalente das colisões entre moléculas consiste em considerar uma delas pontual e a outra com diâmetro $2d$, pois colisão ocorrerá quando os seus centros se aproximarem de uma distância d , como na situação anterior.

Se estivermos observando uma molécula nas suas múltiplas colisões, podemos considerar que ela tem um diâmetro $2d$ e as outras são pontuais.

Se ela tem diâmetro $2d$ e velocidade média $\langle v \rangle$, num intervalo de tempo t , ela terá descrito um cilindro de seção reta πd^2 e comprimento $\langle v \rangle t$. Se a densidade de partículas no gás for $n = N/V$, existirão no cilindro N partículas, onde:

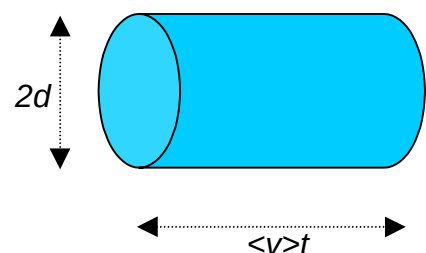
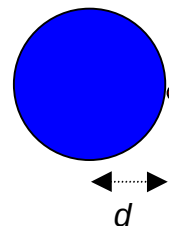
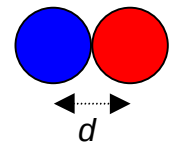
$$N = n V = n (\pi d^2 \cdot \langle v \rangle t)$$

Este número de partículas N será exatamente o número de colisões num dado intervalo de tempo t . O percurso livre médio $\langle L \rangle$ será a distância percorrida num intervalo de tempo t dividido pelo número de colisões que acontecerá neste trajeto.

$$\langle L \rangle = \frac{\langle v \rangle t}{N} = \frac{\langle v \rangle t}{n \pi d^2 \langle v \rangle t} = \frac{1}{n \pi d^2}$$

ou ainda

$$\langle L \rangle = \frac{V}{N} \frac{1}{\pi d^2}$$



Esse resultado é apenas uma primeira aproximação, por que ele se baseia na hipótese que todas as moléculas estão em repouso, e apenas uma se move.

Distribuição de velocidades moleculares

Vamos considerar um número N de moléculas que estão no interior de um recipiente de volume V . As moléculas têm velocidade diferentes, mas essas velocidades se distribuem segundo uma característica própria.

Se considerarmos uma situação genérica, onde a energia interna E de cada molécula é composta da soma de sua energia cinética K mais sua energia potencial U , e desse modo:

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + U(x, y, z)$$

A função que explicita a distribuição de velocidades, é a distribuição de Maxwell-Boltzmann, e tem a forma:

$$f(E) = Ae^{-E/k_B T}$$

onde A é uma constante. Essa constante pode ser determinada se considerarmos que integral da função de distribuição deve ser igual ao número de moléculas. Quando estamos analisando um gás ideal, a energia potencial é desprezada, e temos como energia interna apenas a energia cinética:

$$E = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)$$

e portanto:

$$f(v) = Ae^{-m(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)/2k_B T}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dv_x \int_{-\infty}^{+\infty} dv_y \int_{-\infty}^{+\infty} dv_z f(v_x, v_y, v_z) = N$$

ou seja:

$$A \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-mv_x^2/2kT} dv_x \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-mv_y^2/2kT} dv_y \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-mv_z^2/2kT} dv_z = N$$

e por outro lado, seja:

$$B = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} dx$$

Podemos dizer que:

$$B^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} dx \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ay^2} dy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\infty} r dr e^{-ar^2} = 2\pi \int_0^{\infty} \frac{du}{2a} e^{-u} = -\frac{2\pi}{2a} e^{-u} \Big|_0^{\infty} = -\frac{\pi}{a} (0 - 1) = \frac{\pi}{a}$$

ou seja:

$$B = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

e portanto

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-mv_x^2/2kT} dv_x = \sqrt{\frac{2\pi kT}{m}}$$

e

$$A \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-mv_x^2/2kT} dv_x \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-mv_y^2/2kT} dv_y \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-mv_z^2/2kT} dv_z = N$$

logo

$$A \left(\sqrt{\frac{2\pi kT}{m}} \right)^3 = N \Rightarrow A = N \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2}$$

e portanto

$$f(v) = N \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-m(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)/2k_B T}$$

Se fizermos a mudança de variáveis para coordenadas esféricas, encontraremos que:

$$\int_0^{\infty} 4\pi v^2 dv f(v) = 4\pi N \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \int_0^{\infty} v^2 e^{-mv^2/2k_B T} dv = N$$

Podemos então definir uma função de distribuição de velocidades $F(v)$ que depende do módulo do vetor velocidade, ou seja:

$$F(v) = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} v^2 e^{-mv^2/2k_B T}$$

Pode-se mostrar que:

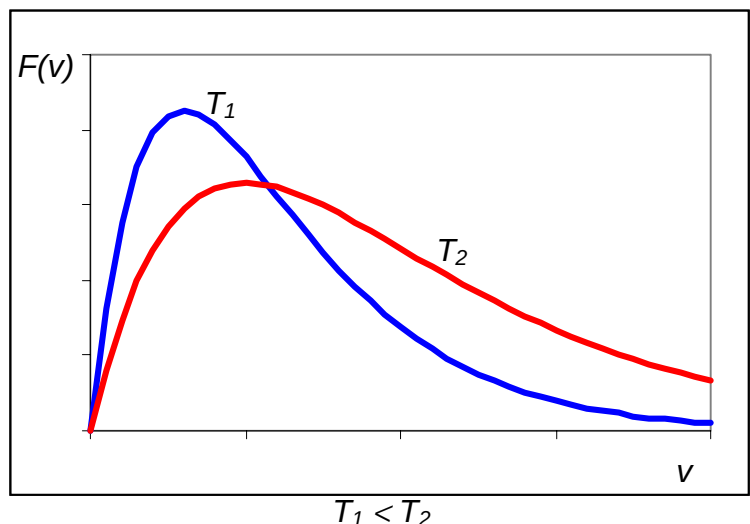
$$\int_0^{\infty} F(v) dv = 1$$

Tem-se que:

$$\langle v \rangle = \int_0^{\infty} v F(v) dv = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}$$

e

$$\langle v^2 \rangle = \int_0^{\infty} v^2 F(v) dv = \frac{3kT}{m}$$



A velocidade mais provável em uma gás é aquela na qual a função de distribuição de velocidades $F(v)$ é máxima, e nestas circunstâncias:

$$\frac{dF(v)}{dv} = 0 \Rightarrow v_p = \sqrt{\frac{2kT}{m}}$$

Calores específicos molares de um gás ideal

Se tivermos uma certa massa m de uma substância, podemos tentar relacionar qual a variação de temperatura ΔT que sofrerá essa massa, quando ela absorver uma quantidade de calor ΔQ . Existe uma relação, que tem a forma:

$$\Delta Q = m c \Delta T$$

onde chamamos a grandeza c de calor específico. Quando lidamos com gases, surge a necessidade de definir uma relação mais específica que leve em contas as especificidades deste fluido. Definimos o *calor específico a volume constante* para relacionar variação de temperatura ΔT que sofrerá um gás, quando ele absorver uma quantidade de calor ΔQ ; na situação em que o recipiente que contém o gás é mantido a volume constante. De maneira equivalente, definimos o *calor específico a pressão constante* para relacionar variação de temperatura ΔT que sofrerá um gás, quando ele absorver uma quantidade de calor ΔQ ; na situação em que o recipiente que contém o gás é mantido a pressão constante

A energia interna E_{INT}

Vamos considerar uma gás ideal monoatômico, ou seja as suas moléculas têm apenas um átomo. Ao nível dessa nossa descrição da Natureza, não estamos considerando a estrutura interna dos átomos e portanto eles podem ter apenas um tipo de energia: a energia associada ao seu movimento. Desse modo, a energia total das N moléculas monoatômicas que compõe esse gás terá a forma:

$$E_{INT} = \frac{3}{2} N k_B T = \frac{3}{2} \mu R T$$

Calor específico molar a volume constante – C_V

Como mencionado anteriormente, podemos definir o calor específico molar a volume constante como:

$$dQ_V = \mu C_V dT$$

ou ainda:

$$C_V = \frac{1}{\mu} \left(\frac{dQ}{dT} \right)_V$$

Usando a primeira lei da Termodinâmica, temos que:

$$dE_{INT} = dQ - p dV$$

e se considerarmos uma transformação isovolumétrica:

$$(dE_{INT})_V = dQ_V$$

ou seja:

$$C_V = \frac{1}{\mu} \left(\frac{dQ}{dT} \right)_V = \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial E_{INT}}{\partial T} \right)_V$$

e para um gás ideal, encontramos

$$C_V = \frac{3}{2}R$$

Calor específico molar a pressão constante – C_P

Como mencionado anteriormente, podemos definir o calor específico molar a pressão constante como:

$$dQ_P = \mu C_P dT$$

ou ainda:

$$C_P = \frac{1}{\mu} \left(\frac{dQ}{dT} \right)_P$$

Usando a primeira lei da Termodinâmica, temos que:

$$dE_{INT} = dQ - p dV$$

e se considerarmos uma transformação que envolva uma variação de temperatura, mas com o sistema mantido a pressão constante, temos que:

$$\left(\frac{\partial E_{INT}}{\partial T} \right)_P = \left(\frac{dQ}{dT} \right)_P - p \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P$$

onde lembramos que dQ não é uma diferencial exata, daí o aparente contra-senso ao envolver derivadas parciais e total, na equação anterior. Usando as definições de um gás ideal, temos que:

$$\begin{cases} E_{INT} = \frac{3}{2} \mu R T & \therefore \left(\frac{\partial E_{INT}}{\partial T} \right)_P = \frac{3}{2} \mu R \\ V = \frac{\mu R T}{p} & \therefore p \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P = \mu R \end{cases}$$

ou seja:

$$\frac{3}{2} \mu R = \mu C_P - \mu R \Rightarrow C_P = \frac{5}{2} R$$

Relação entre C_V e C_P para um gás ideal

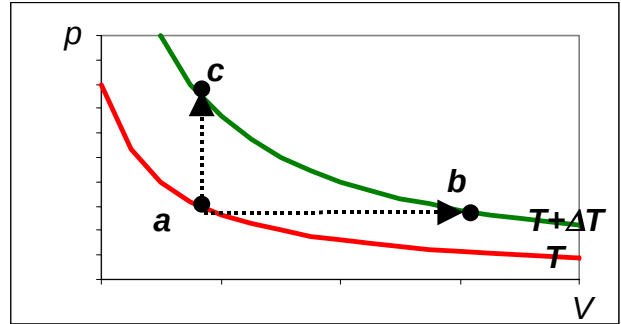
Vamos considerar um sistema formado por μ moles de uma gás ideal, e a sua temperatura será aumentada T até alcançar $T + \Delta T$ de duas formas diferentes. As curvas que representam transformações isotérmicas nas duas temperaturas mencionadas

estão representadas no gráfico ao lado. A primeira transformação será feita a volume constante, e o gás vai do estado **a** até o estado **c**. A primeira lei da Termodinâmica diz que:

$$dE_{INT} = dQ - p dV$$

e neste caso teremos que

$$\Delta E_{ac} = \Delta Q_V = \mu C_V \Delta T$$



A segunda transformação será feita a pressão constante, e o gás vai do estado **a** até o estado **b**. A primeira lei da Termodinâmica diz que:

$$dE_{INT} = dQ - p dV$$

e neste caso teremos que

$$\Delta E_{ab} = \Delta Q_P - p \Delta V = \mu C_P \Delta T - p (\Delta V)_P$$

Como a energia interna de uma gás ideal depende apenas da sua temperatura, temos que:

$$\Delta E_{ac} = \Delta E_{ab}$$

e portanto:

$$\mu C_V \Delta T = \mu C_P \Delta T - p (\Delta V)_P$$

ou seja:

$$C_P - C_V = \frac{p}{\mu} \left(\frac{\Delta V}{\Delta T} \right) = \frac{p}{\mu} \left(\frac{\mu R}{p} \right) = R \quad \therefore \quad C_P = C_V + R$$

Transformação adiabática de um gás ideal

Uma expansão adiabática é caracterizada por ser uma transformação onde o sistema não troca calor com as suas vizinhanças. Nestas circunstâncias, temos então que:

$$dE = dQ - p dV \quad \Rightarrow \quad dE = \mu C_V dT = - p dV$$

ou seja:

$$dT = - \frac{p}{\mu C_V} dV$$

Mas por outro, se diferenciarmos a equação do gás ideal encontramos que:

$$pV = \mu RT \quad \Rightarrow \quad p dV + V dp = \mu R dT \quad \therefore \quad dT = \frac{p dV + V dp}{\mu R}$$

e igualando os termos em dT , temos que:

$$dT = \frac{p dV + V dp}{\mu R} = - \frac{p}{\mu C_V} dV$$

ou seja:

$$(C_V + R) p dV + C_V V dp = 0$$

Mostramos anteriormente que para um gás ideal:

$$C_P = C_V + R$$

logo:

$$C_P p dV + C_V V dp = 0$$

ou seja:

$$\frac{C_P}{C_V} \frac{dV}{V} + \frac{dp}{p} = 0$$

Vamos definir $\gamma = C_P/C_V$

$$\gamma \frac{dV}{V} + \frac{dp}{p} = 0 \Rightarrow \gamma \ln V + \ln p = \text{const} = \ln a$$

e portanto:

$$\ln(pV^\gamma) = \ln a \quad \therefore \quad pV^\gamma = a = \text{const}$$

Solução de alguns problemas

Capítulo 20 - Halliday, Resnick e Walker

10 Uma quantidade de oxigênio ocupando um volume de 1000cm^3 a 40°C e uma pressão de $1,01 \times 10^5\text{Pa}$ se expande até um volume de 1500cm^3 e pressão $1,06 \times 10^5\text{Pa}$

a) Encontre o número de moles de oxigênio no sistema.

$$V_1 = 1000\text{cm}^3 = 10^{-3}\text{m}^3$$

$$T_1 = 40^\circ\text{C} = 313\text{K}$$

$$p_1 = 1,01 \times 10^5\text{Pa}$$

$$R = 8,314\text{J/mol} \cdot \text{K}$$

$$pV = \mu RT \Rightarrow \mu = \frac{pV}{RT} = \frac{(1,01 \times 10^5)(10^{-3})}{(8,314)(313)} = 3,8 \times 10^{-2}\text{moles}$$

b) Encontre a temperatura final do sistema.

$$V_2 = 1500\text{cm}^3 = 1,5 \times 10^{-3}\text{m}^3$$

$$p_2 = 1,06 \times 10^5\text{Pa}$$

$$\mu = \frac{p_1 V_1}{RT_1} = \frac{p_2 V_2}{RT_2} \Rightarrow T_2 = T_1 \left(\frac{p_2}{p_1} \right) \left(\frac{V_2}{V_1} \right) = 492,74\text{K}$$

$$T_2 = 219,74^\circ\text{C}$$

Capítulo 20 – Halliday e Resnick – Edição antiga

“10” Um manômetro de mercúrio selado, tem dois ramos desiguais à mesma pressão p_0 , como mostra a figura abaixo à esquerda. A área da seção reta do manômetro é $1,0\text{cm}^2$. Através de uma torneira no fundo do manômetro, admite-se no recipiente um volume adicional de mercúrio, igual a 10cm^3 . O nível da esquerda sobe de $6,0\text{cm}$ e o nível da direita sobe de $4,0\text{cm}$. Determine a pressão p_0 .

$$h_e' = 50\text{cm} \quad h_d' = 30\text{cm}$$

$$H_e = 6\text{cm} \quad H_d = 4\text{cm}$$

$$\Delta H = H_e - H_d = 2\text{cm}$$

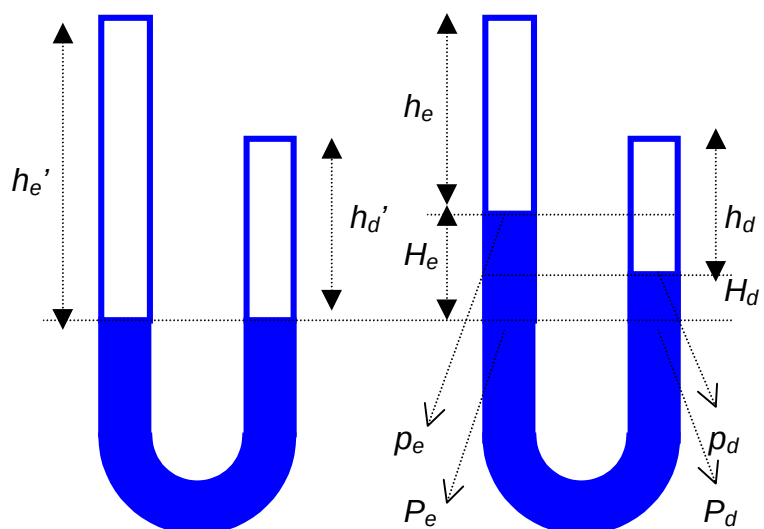
$$h_e = h_e' - H_e = 44\text{cm}$$

$$h_d = h_d' - H_d = 26\text{cm}$$

$$A = 1\text{cm}^2$$

$$\Delta V = 10\text{cm}^3$$

Tanto na situação inicial como na final, existe um gás acima do nível



do líquido, e a sua composição deve ser basicamente de mercúrio. Vamos considerar esse gás como ideal. Desse modo, considerando a situação inicial, teremos que:

$$\begin{aligned} p_0 V_d' &= \mu_d R T \\ e \\ p_0 V_e' &= \mu_e R T \end{aligned}$$

onde V é o volume ocupado por esse gás e μ é o número de moléculas contido nele. Logo temos que:

$$p_0 = \frac{\mu_d R T}{V_d'} = \frac{\mu_e R T}{V_e'} \Rightarrow \frac{V_d'}{V_e'} = \frac{\mu_d}{\mu_e}$$

ou ainda:

$$\mu_d = \frac{p_0 V_d'}{R T} \quad e \quad \mu_e = \frac{p_0 V_e'}{R T}$$

Depois de adicionado um volume ΔV de mercúrio, as colunas ficarão com níveis diferentes. Usando a hidrostática, poderemos relacionar as pressões em diferentes pontos do manômetro.

$$P_d = p_d + \rho g H_d$$

e

$$P_e = p_e + \rho g H_e$$

Como as pressões no mesmo nível horizontal do líquido são iguais, subtraímos a penúltima equação da última e encontramos que:

$$p_d - p_e = \rho g (H_e - H_d) = \rho g \Delta H$$

Por outro lado, o gás acima do nível de mercúrio terá um volume disponível diferente da situação inicial, e será diverso em cada ramo do manômetro. Ou seja:

$$\begin{cases} p_d V_d = \mu_d R T \\ p_e V_e = \mu_e R T \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p_d = \frac{\mu_d R T}{V_d} \\ p_e = \frac{\mu_e R T}{V_e} \end{cases}$$

e usando a equação anterior, encontramos que:

$$p_d - p_e = \left(\frac{\mu_d}{V_d} - \frac{\mu_e}{V_e} \right) R T = \rho g \Delta H \Rightarrow R T = \frac{\rho g \Delta H}{\left(\frac{\mu_d}{V_d} - \frac{\mu_e}{V_e} \right)}$$

e usando que

$$\frac{V_d'}{V_e'} = \frac{\mu_d}{\mu_e}$$

encontramos que

$$\mu_e R T = \rho g \Delta H \left(\frac{V_d V_e V_e'}{V_d' V_e - V_d V_e'} \right) = p_0 V_e'$$

ou seja:

$$p_0 = \rho g \Delta H \left(\frac{V_d V_e}{V_d' V_e - V_d V_e'} \right)$$

Lembrando que os volumes considerados são partes dos ramos do manômetro, que têm seção reta A , e desse modo $V = A h$ e portanto:

$$p_0 = \rho g \Delta H \left(\frac{h_d h_e}{h_d' h_e - h_d h_e'} \right)$$

Usando que a densidade do mercúrio $\rho = 1,36 \times 10^4 \text{ kg/m}^3$ encontramos que:

$$p_0 = 1,55 \times 10^5 \text{ N/m}^2 = 1,55 \text{ atm}$$

Capítulo 20 - Halliday, Resnick e Walker

11 A pressão p , o volume V e a temperatura T de um certo material estão relacionados através da equação:

$$p = \frac{AT - BT^2}{V}$$

onde A e B são constantes. Encontre uma expressão para o trabalho realizado pelo material se a temperatura variar de T_1 até T_2 enquanto a pressão permanece constante.

O trabalho realizado pelo sistema quando ele passa de um estado para outro é definido como:

$$W_{12} = \int_1^2 p dV$$

e como a pressão permanece constante ($p_1 = p_2$) nesse processo, temos que:

$$W_{12} = p_1 \int_1^2 dV = p_1 (V_2 - V_1) = p_2 V_2 - p_1 V_1$$

Usando a dependência funcional mencionada:

$$W_{12} = [AT_2 - BT_2^2] - [AT_1 - BT_1^2] = A(T_2 - T_1) - B(T_2^2 - T_1^2)$$

Capítulo 20 - Halliday, Resnick e Walker

12 Um recipiente encerra dois gases ideais. Dois moles do primeiro gás estão presentes, com massa molar M_1 . O segundo gás possui massa molar $M_2 = 3M_1$, e $0,5 \text{ mol}$ deste gás está presente. Que fração da pressão total na parede do recipiente pode ser atribuída ao segundo gás?

(A explicação da pressão da teoria cinética conduz à descoberta experimentalmente de pressões parciais para uma mistura de gases que não reagem quimicamente: a pressão total exercida pela mistura é igual à soma das pressões que os vários gases exerceriam separadamente se cada um deles ocupasse o recipiente sozinho.)

$$M_1 \\ \mu_1 = 2 \text{ moles}$$

$$M_2 \\ \mu_2 = 0,5 \text{ mol}$$

$$(m_i) = (\mu_i) (M_i) \\ (\text{Massa}) = (\text{Número de moles}) (\text{Massa molar})$$

$$p_i V = \mu_i R T$$

$$p = p_1 + p_2 = (\mu_1 + \mu_2) RT/V$$

$$\frac{p_1}{p} = \frac{\mu_1 RT/V}{(\mu_1 + \mu_2) RT/V} = \frac{\mu_1}{\mu_1 + \mu_2} = 0,8$$

e de modo equivalente:

$$\frac{p_2}{p} = \frac{\mu_2}{\mu_1 + \mu_2} = 0,2$$

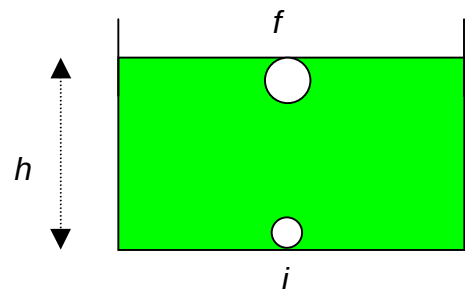
Capítulo 20 - Halliday, Resnick e Walker

- 15 Uma bolha de ar com volume de 20 cm^3 está no fundo de um lago a 40 m de profundidade, onde a temperatura é 4°C . A bolha sobe até a superfície, que está na temperatura de 20°C . Considere que a temperatura da bolha de ar é a mesma que a da água ao seu redor. Exatamente quando a bolha atinge a superfície, qual o seu volume?

$$V_i = 20 \text{ cm}^3 = 2 \times 10^{-5} \text{ m}^3 \quad \rho_A = 10^3 \text{ kg/m}^3 \\ T_i = 4^\circ \text{C} = 277 \text{ K} \quad p_0 = 1,013 \times 10^5 \text{ Pa} \\ h = 40 \text{ m} \\ T_f = 20^\circ \text{C} = 293 \text{ K}$$

Vamos chamar de situação inicial quando a bolha está no fundo do lago e situação final quando ela alcança a superfície. Temos que:

$$\begin{cases} p_i = p_0 + \rho g h = \frac{\mu R T_i}{V_i} \\ p_f = p_0 = \frac{\mu R T_f}{V_f} \end{cases}$$



Temos duas equações e duas incógnitas, V_f e μ .

$$\rho g h = \mu R \left(\frac{T_i}{V_i} - \frac{T_f}{V_f} \right) = \left(\frac{p_0 V_f}{T_f} \right) \left(\frac{T_i}{V_i} - \frac{T_f}{V_f} \right) = p_0 \left[\left(\frac{T_i}{T_f} \right) \left(\frac{V_f}{V_i} \right) - 1 \right]$$

Ou seja:

$$\left(\frac{T_i}{T_f}\right)\left(\frac{V_f}{V_i}\right) = 1 + \frac{\rho gh}{p_0} \Rightarrow V_f = V_i \left(\frac{T_f}{T_i}\right) \left(1 + \frac{\rho gh}{p_0}\right) = 103 \text{ cm}^3$$

Capítulo 20 - Halliday, Resnick e Walker

- 16 Um tubo de comprimento $L = 25\text{m}$ que está aberto em uma extremidade, contém ar a pressão atmosférica. Ele é empurrado na vertical para dentro de um lago de água doce até que a água suba até a metade do tubo, como mostrado na figura ao lado. Qual a profundidade h da extremidade inferior do tubo? Suponha que a temperatura é a mesma em todos os pontos e que não varie com o tempo.

$$L = 25\text{m}$$

$$p_0 = 1,013 \times 10^5 \text{ Pa}$$

$$\rho = 10^3 \text{ kg/m}^3$$

A pressão na superfície do líquido dentro do tubo, é a mesma do gás acima desta superfície, e é dada por:

$$p_f = p_0 + \rho g (h - L/2)$$

onde estamos explicitando que esta é a situação final do tubo. Na situação inicial, este tubo está a pressão atmosférica. Como foi dito, a temperatura é a mesma em todos os pontos e não varia com o tempo, temos que:

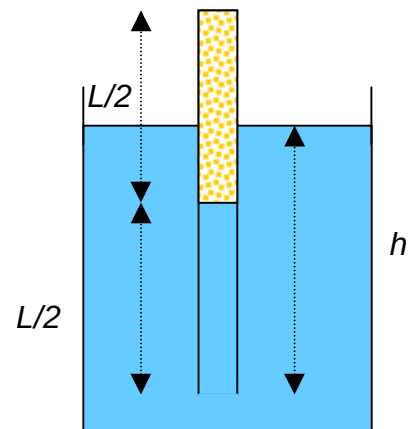
$$p_0 V_i = \mu RT = p_f V_f \Rightarrow p_f = p_0 \left(\frac{V_i}{V_f}\right) = p_0 \left(\frac{2V_f}{V_f}\right) \therefore p_f = 2p_0$$

ou seja:

$$p_f = p_0 + \rho g (h - L/2) = 2p_0 \Rightarrow p_0 = \rho g (h - L/2)$$

logo:

$$h = \frac{L}{2} + \frac{p_0}{\rho g} = 22,83\text{m}$$



Capítulo 20 - Halliday, Resnick e Walker

- 17 O recipiente A da figura abaixo contém um gás ideal a uma pressão de $5,0 \times 10^5 \text{ Pa}$ e a uma temperatura de 300K . Ele está ligado por um tubo fino (e uma válvula fechada) ao recipiente B, com quatro vezes o volume de A. O recipiente B contém, o mesmo gás ideal a uma pressão $1,0 \times 10^5 \text{ Pa}$ e a uma temperatura de 400K . A válvula é aberta para permitir que as pressões se igualem, mas a temperatura de cada recipiente é mantida constante em seus valores iniciais. Qual será então a pressão nos dois recipientes?

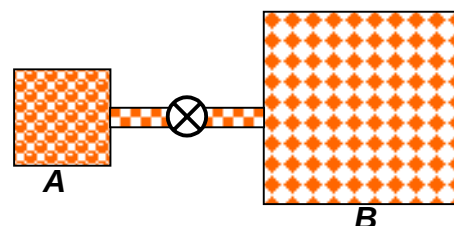
$$p_A = 5 \times 10^5 \text{ Pa}$$

$$T_A = 300\text{K}$$

$$p_B = 1 \times 10^5 \text{ Pa}$$

$$T_B = 400\text{K}$$

$$V_B = 4V_A$$



Temos claramente duas situações, antes da válvula ser aberta e depois que ela foi aberta. Depois que ela foi aberta existiu um fluxo de gás de um recipiente para outro de modo que as pressões foram equilibradas, mas a quantidade total de gás permaneceu a mesma. Logo:

$$\mu = \mu_A + \mu_B = \mu'_A + \mu'_B$$

onde os μ são os números de moles em cada recipiente, antes e depois da válvula ser aberta. Usando a equação dos gases ideais encontramos que:

$$\begin{cases} p_A V_A = \mu_A R T_A \\ p_B V_B = \mu_B R T_B \end{cases} \quad e \quad \begin{cases} p V_A = \mu'_A R T_A \\ p V_B = \mu'_B R T_B \end{cases}$$

ou seja:

$$\mu = \mu_A + \mu_B = \frac{p_A V_A}{R T_A} + \frac{p_B V_B}{R T_B} = \frac{V_A}{R} \left(\frac{p_A}{T_A} + \frac{4p_B}{T_B} \right)$$

e também

$$\mu = \mu'_A + \mu'_B = \frac{p V_A}{R T_A} + \frac{p V_B}{R T_B} = \frac{p V_A}{R} \left(\frac{1}{T_A} + \frac{4}{T_B} \right)$$

ou ainda:

$$\mu = \frac{V_A}{R} \left(\frac{p_A}{T_A} + \frac{4p_B}{T_B} \right) = \frac{p V_A}{R} \left(\frac{1}{T_A} + \frac{4}{T_B} \right)$$

e portanto:

$$p = \frac{\left(\frac{p_A}{T_A} + \frac{4p_B}{T_B} \right)}{\left(\frac{1}{T_A} + \frac{4}{T_B} \right)} = 2,0 \times 10^5 \text{ Pa}$$

Capítulo 20 - Halliday, Resnick e Walker

- 19 A temperatura mais baixa possível no espaço sideral é 2,7K . Qual a velocidade média quadrática das moléculas de hidrogênio a esta temperatura?

$$R = 8,31 \text{ J/mol.K}$$

$$M = 2,02 \times 10^{-3} \text{ kg/mol}$$

$$v_{QM} = \sqrt{\frac{3RT}{M}} = 182 \text{ m/s}$$

Capítulo 20 - Halliday, Resnick e Walker

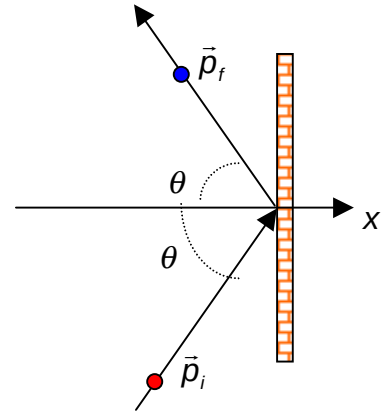
- 23 Um feixe de moléculas de hidrogênio (H_2) está dirigido contra uma parede, segundo um ângulo de 55° com a normal à parede. Cada molécula no feixe possui uma velocidade escalar de $1,0 \text{ km/s}$ e uma massa de $3,3 \times 10^{-24} \text{ g}$. O feixe bate na parede sobre uma área de $2,0 \text{ cm}^2$, à uma taxa média de 10^{23} moléculas por segundo . Qual a pressão do o feixe sobre a parede?

$$\begin{aligned} n &= 10^{23} \text{ moléculas/s} & \theta &= 55^\circ \\ A &= 2 \text{ cm}^2 = 2 \times 10^{-4} \text{ m}^2 & v &= 1 \text{ km/s} = 10^3 \text{ m/s} \\ m &= 3,3 \times 10^{-24} \text{ g} = 3,3 \times 10^{-27} \text{ kg} \end{aligned}$$

Como as moléculas só apresentam variação de momento na direção do eixo x , temos que:

$$\Delta p = p_{fx} - p_{ix} = (-m v_x) - (+m v_x) = -2 m v_x$$

$$v_x = v \cos 55^\circ \Rightarrow \Delta p = -2 m v \cos 55^\circ$$



A força total que as moléculas exercem na parede é resultado das contribuições de todas as N moléculas que colidem num intervalo de tempo Δt , ou seja:

$$F = N \left| \frac{\Delta p}{\Delta t} \right| = \frac{N}{\Delta t} |\Delta p| = n |\Delta p|$$

A pressão P é definida em termos da força exercida pelas moléculas na parede, ou seja:

$$P = \frac{F}{A} = \frac{n}{A} |\Delta p| = \frac{2nmv \cos 55^\circ}{A}$$

$$P = 1,89 \times 10^3 \text{ Pa} = 1,8 \times 10^{-2} \text{ atm}$$

Capítulo 20 – Halliday e Resnick – **Edição antiga**

“27” Mostre que a variação de pressão na atmosfera terrestre, suposta isotérmica, é dada por:

$$p(y) = p_0 e^{-Mgy / RT}$$

Considerando a atmosfera um fluido em repouso, temos que:

$$dp = -\rho g dy$$

onde estamos considerando a superfície da Terra como a origem do eixo y , que mede a altura de um elemento de volume. Da equação anterior, temos que:

$$\frac{dp}{dy} = -\rho g$$

A equação dos gases ideais, nos diz que:

$$pV = \mu RT = \frac{m}{M} RT$$

onde $m = \mu M$ é a massa de um elemento de volume, μ é o número de moles contido nesse elemento de volume e M é a massa molecular da substância considerada. Desse modo:

$$p = \frac{m}{V} \frac{RT}{M} = \rho \frac{RT}{M} \Rightarrow \rho = \frac{pM}{RT}$$

onde ρ é a densidade do material considerado. A equação da variação da pressão terá a forma:

$$\frac{dp}{dy} = -\left(\frac{pM}{RT}\right)g \Rightarrow \frac{dp}{p} = -\left(\frac{Mg}{RT}\right)dy$$

Integrando, temos que:

$$\ln p - \ln p_0 = -\left(\frac{Mg}{RT}\right)(y - y_0)$$

Considerando que a superfície da Terra como origem do referencial, $y_0 = 0$, logo:

$$\ln\left(\frac{p}{p_0}\right) = -\left(\frac{Mg}{RT}\right)y \Rightarrow p(y) = p_0 e^{-Mgy/RT}$$

Capítulo 20 - Halliday, Resnick e Walker

- 28 Mostre que a equação dos gases ideais $pV = \mu RT$ pode ser escrita na forma alternativa $p = \rho RT/M$ onde ρ é a massa específica do gás e M é a massa molar.

$$pV = \mu RT$$

onde

$$\mu = \frac{m}{M} = \frac{\text{massa da amostra}}{\text{massa molar}}$$

logo:

$$pV = \frac{m}{M}RT \Rightarrow p = \left(\frac{m}{V}\right)\frac{RT}{M}$$

e portanto:

$$p = \rho \frac{RT}{M}$$

Capítulo 20 - Halliday, Resnick e Walker

- 33 Qual a trajetória livre média para 15 balas de goma esféricas em um saco que é sacudido vigorosamente? O volume do saco é *1 litro* e o diâmetro de uma bala é igual a *1,0 cm*. Considere colisões de balas com balas, não colisões de balas com o saco.

$$N = 15 \text{ balas} \\ V = 1l = 10^{-3}m^3$$

$$d = 1,0cm = 10^{-2}m$$

$$\langle L \rangle = \frac{V}{N} \frac{1}{\pi d^2}$$

Devemos corrigir essa equação ao considerar que todas as moléculas estão se

movimentando. A equação corrigida tem a forma:

$$\langle L \rangle_c = \frac{V}{N} \frac{1}{\sqrt{2} \pi d^2} = 0,150m = 15,0cm$$

Capítulo 20 - Halliday, Resnick e Walker

36 Vinte e duas partículas têm as seguintes velocidades (N_i representa o número de partículas que possuem velocidade v_i)

N_i	2	4	6	8	2
v_i (cm/s)	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0

a) Calcule a sua velocidade média v_M .

$$\langle v \rangle = \frac{\sum_{i=1}^N v_i}{N} = \frac{2 \times 1 + 4 \times 2 + 6 \times 3 + 8 \times 4 + 2 \times 5}{2 + 4 + 6 + 8 + 2} = \frac{70}{22} = 3,18m/s$$

b) Calcule a sua velocidade média quadrática v_{RMS} .

$$\langle v^2 \rangle = \frac{\sum_{i=1}^N v_i^2}{N} = \frac{2 \times 1^2 + 4 \times 2^2 + 6 \times 3^2 + 8 \times 4^2 + 2 \times 5^2}{2 + 4 + 6 + 8 + 2} = \frac{250}{22} = 11,36m^2/s^2$$

$$v_{RMS} = \sqrt{\langle v^2 \rangle} = 3,37m/s$$

c) Das cinco velocidades mostradas, qual a velocidade mais provável v_P ?

$$v_P = 4,0m/s$$

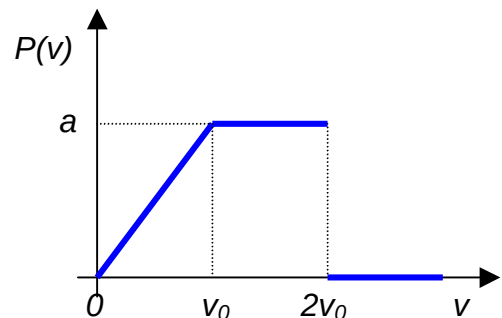
Capítulo 20 - Halliday, Resnick e Walker

43 A figura abaixo mostra uma distribuição hipotética de velocidades para uma amostra de N partículas de um gás (observe que $P(v) = 0$ para $v > 2v_0$) .

a) Expresse a em termos de N e v_0 .

Observando o gráfico de $P(v)$ versus v , podemos notar que:

$$P(v) = \begin{cases} \left(\frac{a}{v_0} \right) v & \text{para } 0 \leq v \leq v_0 \\ a & \text{para } v_0 \leq v \leq 2v_0 \\ 0 & \text{para } v \geq 2v_0 \end{cases}$$



A condição de normalização no diz que:

$$\int_0^{\infty} P(v) dv = 1$$

e portanto:

$$\int_0^{v_0} \left[\left(\frac{a}{v_0} \right) v \right] dv + \int_{v_0}^{2v_0} [a] dv = 1$$

$$\left(\frac{a}{v_0} \right) \frac{v_0^2}{2} + a(2v_0 - v_0) = \frac{av_0}{2} + av_0 = \frac{3av_0}{2} = 1$$

ou seja:

$$a = \left(\frac{2}{3v_0} \right)$$

b) Quantas das partículas possuem velocidades entre $1,5v_0$ e $2,0v_0$?

A fração de partículas (N_1/N) , com velocidade dentro deste intervalo, tem a forma:

$$\frac{N_1}{N} = \int_{1,5v_0}^{2,0v_0} P(v) dv = \int_{1,5v_0}^{2,0v_0} [a] dv = av \Big|_{1,5v_0}^{2,0v_0} = a(0,5v_0) = \left(\frac{2}{3v_0} \right) \left(\frac{v_0}{2} \right) = \frac{1}{3}$$

ou seja:

$$N_1 = \frac{N}{3}$$

c) Expresse a velocidade média das partículas em termos de v_0 .

$$\langle v \rangle = \int_0^{\infty} v P(v) dv$$

$$\langle v \rangle = \int_0^{v_0} v \left[\left(\frac{a}{v_0} \right) v \right] dv + \int_{v_0}^{2v_0} v [a] dv = \frac{a}{v_0} \frac{v^3}{3} \Big|_0^{v_0} + a \frac{v^2}{2} \Big|_{v_0}^{2v_0} = \frac{a}{v_0} \frac{v_0^3}{3} + \frac{a}{2} (4v_0^2 - v_0^2)$$

$$\langle v \rangle = \frac{a}{3} v_0^2 + \frac{3a}{2} v_0^2 = \frac{11}{6} av_0^2 = \frac{11}{6} \left(\frac{2}{3v_0} \right) v_0^2 = \frac{11}{9} v_0$$

d) Determine v_{RMS} .

$$\langle v^2 \rangle = \int_0^{\infty} v^2 P(v) dv$$

$$\langle v^2 \rangle = \int_0^{v_0} v^2 \left[\left(\frac{a}{v_0} \right) v \right] dv + \int_{v_0}^{2v_0} v^2 [a] dv = \left(\frac{a}{v_0} \right) \frac{v^4}{4} \Big|_0^{v_0} + a \frac{v^3}{3} \Big|_{v_0}^{2v_0} = \left(\frac{a}{v_0} \right) \frac{v_0^4}{4} + \left(\frac{a}{3} \right) (8v_0^3 - v_0^3)$$

$$\langle v^2 \rangle = \frac{av_0^3}{4} + \frac{7av_0^3}{3} = av_0^3 \left(\frac{1}{4} + \frac{7}{3} \right) = \left(\frac{31}{12} \right) \left(\frac{2}{3v_0} \right) v_0^3 = \left(\frac{31}{18} \right) v_0^2$$

$$v_{RMS} = \sqrt{\langle v^2 \rangle} = v_0 \sqrt{\frac{31}{18}}$$

Capítulo 20 - Halliday, Resnick e Walker

- 45 Um mol de um gás ideal sofre uma expansão isotérmica. determine a energia adicionada ao gás sob a forma de calor em termos dos volumes inicial e final e da temperatura.

Como o gás é ideal, a sua energia interna é uma função apenas da temperatura. Se a transformação for isotérmica, a temperatura se mantém constante e portanto não existe variação da energia interna nesse processo. Desse modo, usando a primeira lei da termodinâmica, encontramos que:

$$(dE)_T = (dQ)_T - (dW)_T = 0 \Rightarrow (dQ)_T = (dW)_T$$

$$W_{if} = \int_i^f p dV = \mu RT \int_{V_i}^{V_f} \frac{dV}{V} = \mu RT \ln V \Big|_{V_i}^{V_f} = \mu RT (\ln V_f - \ln V_i)$$

$$Q_{if} = W_{if} = \mu RT \ln \left(\frac{V_f}{V_i} \right)$$

Capítulo 20 - Halliday, Resnick e Walker

- 47 Um recipiente contém uma mistura de três gases que não reagem entre si: μ_1 moles do primeiro gás com calor específico molar a volume constante C_1 , e assim por diante. Determine o calor específico molar a volume constante da mistura, em termos dos calores específicos molares e das quantidades dos gases em separado.
O número total de moles desta mistura de três gases é dada por:

$$\mu = \mu_1 + \mu_2 + \mu_3$$

e a quantidade de calor total absorvido (a volume constante) pela mistura será a soma dos calores absorvidos pelos diversos componentes:

$$dQ_V = dQ_{V1} + dQ_{V2} + dQ_{V3}$$

Calculando as derivadas:

$$\left(\frac{dQ}{dT} \right)_V = \left(\frac{dQ_1}{dT} \right)_V + \left(\frac{dQ_2}{dT} \right)_V + \left(\frac{dQ_3}{dT} \right)_V \Rightarrow \mu C_V = \mu_1 C_{V1} + \mu_2 C_{V2} + \mu_3 C_{V3}$$

$$C_V = \frac{\mu_1 C_{V1} + \mu_2 C_{V2} + \mu_3 C_{V3}}{\mu_1 + \mu_2 + \mu_3}$$

Capítulo 20 - Halliday, Resnick e Walker

- 57 Sejam μ moles de um gás ideal que se expande adiabaticamente de uma temperatura inicial T_1 até uma temperatura final T_2 . Prove que o trabalho realizado pelo gás é $\mu C_V (T_2 - T_1)$, onde C_V é o calor específico molar a volume constante.

O calor específico molar a volume constante é definido como:

$$C_V = \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial E_{int}}{\partial T} \right)_{V=const}$$

Mas a energia interna do gás ideal depende explicitamente apenas da temperatura, e neste caso, a derivada parcial se transforma em derivada total, ou seja:

$$C_V = \frac{1}{\mu} \frac{dE_{int}}{dT} \Rightarrow dE_{int} = \mu C_V dT$$

A primeira lei da Termodinâmica diz que:

$$dE_{int} = dQ - dW$$

e para um gás ideal, temos que:

$$\mu C_V dT = dQ - dW$$

Quando a transformação for adiabática, não existe troca de calor com o ambiente, logo:

$$\mu C_V dT = -dW$$

e portanto:

$$W_{12} = -\mu C_V \int_{T_1}^{T_2} dT$$

ou seja:

$$W_{12} = \mu C_V (T_1 - T_2)$$

Capítulo 20 - Halliday, Resnick e Walker

- 61 Um mol de um gás ideal monoatômico percorre o ciclo **123** da figura abaixo. O processo $1 \rightarrow 2$ ocorre a volume constante, o processo $2 \rightarrow 3$ é adiabático e o processo $3 \rightarrow 1$ ocorre a pressão constante.

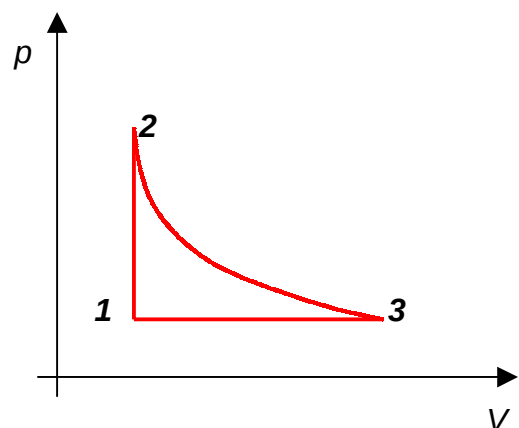
- a) Calcule o calor Q , a variação de energia interna ΔE_i e o trabalho realizado W , para cada um dos três processos e para o ciclo como um todo.

$$T_1 = 300K$$

$$T_2 = 600K$$

$$T_3 = 455K$$

$$dE_{int} = dQ - p dV$$



O processo $1 \rightarrow 2$ é realizado a

volume constante:

$$dE_{int} = dQ \Rightarrow \Delta E_{int} = Q_{12}$$

Como se trata de um gás ideal monoatômico:

$$E_{int} = \frac{3}{2} \mu R T$$

ou seja:

$$Q_{12} = \frac{3}{2} \mu R (T_2 - T_1)$$

e como temos apenas um mol:

$$Q_{12} = \frac{3}{2} R (T_2 - T_1)$$

e portanto:

$$\Delta E_{int} = Q_{12} = 3.740J$$
$$W_{12} = 0$$

O processo $2 \rightarrow 3$ é realizado adiabaticamente, ou seja $dQ = 0$ e $pV^\gamma = \text{const}$.

$$dE_{int} = -dW \Rightarrow \Delta E_{int} = -W_{12}$$

Como se trata de um gás ideal monoatômico:

$$E_{int} = \frac{3}{2} \mu R T$$

ou seja:

$$W_{23} = -\frac{3}{2} \mu R (T_3 - T_2)$$

e como temos apenas um mol:

$$W_{23} = -\frac{3}{2} R (T_3 - T_2)$$

e portanto:

$$\Delta E_{int} = W_{23} = 1.807J$$
$$Q_{23} = 0$$

O processo $3 \rightarrow 1$ é realizado a pressão constante. Usando a definição de trabalho, encontramos que:

$$W_{31} = \int_3^1 p dV = p_1 \int_{V_3}^{V_1} dV = p_1 (V_1 - V_3)$$

e como o gás é ideal

$$p V = \mu R T$$

ou seja:

$$W_{31} = R (T_1 - T_3) = -1288J$$

A energia interna de um gás ideal é dada por:

$$E_{int} = \frac{3}{2} \mu RT$$

e portanto:

$$\Delta E_{int} = \frac{3}{2} R(T_1 - T_3) = -1932J$$

Usando a primeira lei da Termodinâmica, temos que:

$$\Delta E_{int} = Q_{31} - W_{31} \quad \Rightarrow \quad Q_{31} = \Delta E_{int} + W_{31}$$

ou seja:

$$Q_{31} = \frac{5}{2} R(T_1 - T_3) = -3220J$$

- b)** A pressão no ponto 1 é $1,00atm$. determine a pressão e o volume nos pontos 2 e 3 . Use $1,00atm = 1,013 \times 10^5 Pa$ e $R = 8,314 J/mol \cdot K$

$$p_1 = 1,00atm = 1,013 \times 10^5 Pa$$

$$R = 8,314 J/mol \cdot K$$

$$T_1 = 300K$$

$$T_2 = 600K$$

$$T_3 = 455K$$

$$V_1 = \frac{RT_1}{p_1} = 0,246m^3$$

$$\left\{ \begin{array}{l} p_3 = p_1 \\ V_3 = \frac{RT_3}{p_3} = 0,0373m^3 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} V_2 = V_1 \\ p_2 = \frac{RT_2}{V_2} = 2,0 \times 10^5 N/m^2 = 2,0atm \end{array} \right.$$

Notas de Aula de Física

21. ENTROPIA E A SEGUNDA LEI DA TERMODINÂMICA	2
PROCESSOS REVERSÍVEIS E IRREVERSÍVEIS	2
MÁQUINAS TÉRMICAS	4
<i>Uma máquina de Carnot</i>	4
<i>Eficiência de uma máquina de Carnot</i>	6
REFRIGERADORES	6
TEOREMA DE CLAUSIUS	7
A SEGUNDA LEI DA TERMODINÂMICA	9
<i>Enunciado de Kelvin</i>	9
<i>Consequências do enunciado de Kelvin</i>	9
<i>Enunciado de Clausius</i>	9
VARIAÇÃO DA ENTROPIA - CASOS PARTICULARES	9
<i>Transformação adiabática reversível</i>	9
<i>Variação da entropia em uma transição de fase</i>	9
<i>Variação de entropia de um gás ideal</i>	10
PROBABILIDADE E ENTROPIA	10
UMA VISÃO ESTATÍSTICA DA ENTROPIA	13
CALOR, TRABALHO E ENERGIA	13
SOLUÇÃO DE ALGUNS PROBLEMAS	14
01	14
06	14
07	16
09	16
11	17
18	19
19	21
23	22
27	22
29	23
30	24
32	25
33	26
35	27
37	28
41	28
44	29

21. Entropia e a Segunda Lei da Termodinâmica

Processos reversíveis e irreversíveis

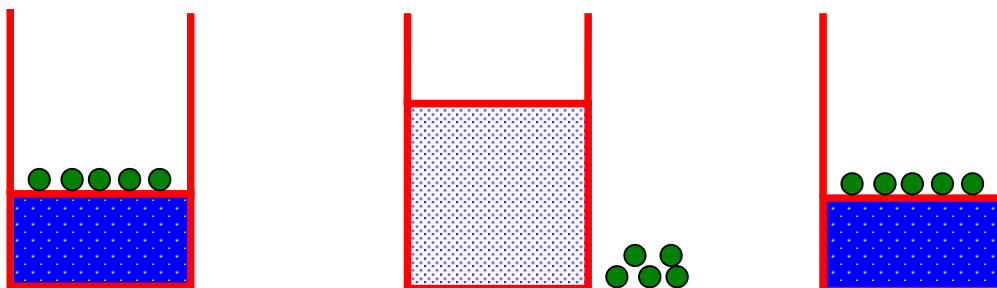
Segundo o Dicionário Aurélio, que reflete o nosso linguajar coloquial, algo é reversível quando se pode reverter; ou que pode retornar ao estado inicial. Em Física, um processo é reversível quando pode parti do estado final e alcançar o estado inicial usando os mesmos micro-estados que utilizou para alcançar o estado final.

Consideremos um sistema em equilíbrio, e apenas nessas circunstâncias podemos caracterizar um estado termodinâmico e, nesse estado podemos atribuir valores para as funções termodinâmicas de estado tais como temperatura, pressão, energia interna, e etc. Quando um sistema sofre variações através de absorção de calor ou trabalho, ele sai momentaneamente do estado de equilíbrio, e depois de um certo tempo de relaxação encontra outro estado de equilíbrio.

Quando a variação sofrida pelo sistema for infinitesimal, as suas funções termodinâmicas também sofrerão variações infinitesimais. E podemos caracterizar os novos valores das funções termodinâmicas para essa nova situação de equilíbrio. Essas transformações infinitesimais são chamadas às vezes de transformações quasi-estáticas. Quando submetemos um sistema a várias transformações quasi-estáticas, podemos definir uma sequência de valores para as suas funções de estado, que irão caracterizar cada uma das pequenas transformações. Podemos desse modo executar a mudança de um sistema físico entre dois estados termodinâmicos afastados, utilizando uma sequência de pequenas transformações quasi-estáticas.

Um exemplo dessa situação seria considerar um gás em equilíbrio, contido em um êmbolo, que está mantido nessa posição por uma certa quantidade de pequenos pesos. À medida que retiramos um pequeno peso, a pressão exercida no êmbolo diminui infinitesimalmente, fazendo com que o gás encontre outra situação de equilíbrio, infinitesimalmente próxima da situação de equilíbrio anterior. Quando terminarmos de retirar os pesos, o gás encontra-se em um estado termodinâmico final distante do estado termodinâmico inicial. E o gás alcançou o estado final seguindo um percurso de estados intermediário que foram sendo conhecidos enquanto ele sofria as transformações infinitesimais.

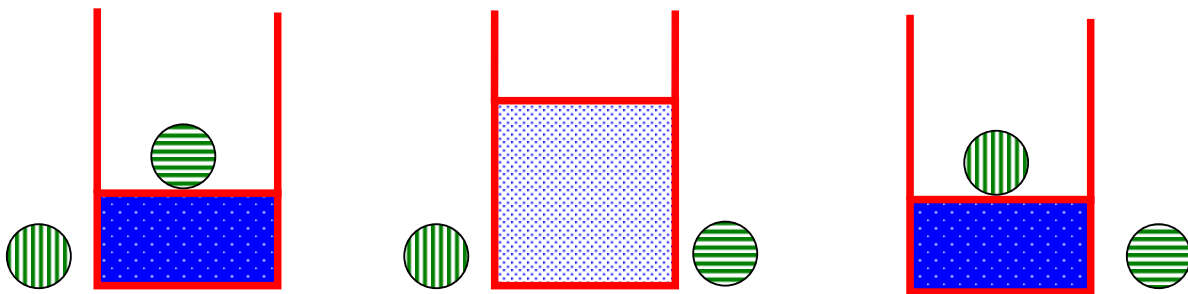
Se quisermos fazer o gás retornar ao estado inicial pelo mesmo percurso, será necessário apenas ir recolocando paulatinamente os pesos em seus lugares originais, e o sistema voltará usando os mesmos estados do percurso de ida.



Consideremos o mesmo sistema anterior, no mesmo estado inicial. A única diferença da configuração seria que os pequenos pesos forma substituídos por um único peso de mesma massa. Quando esse peso é retirado, o sistema sofre uma mudança brusca até atingir o equilíbrio. Durante esse processo, para as funções termodinâmicas de estado tais como temperatura, pressão, energia interna; ficam indefinidas, pois são caracterizadas apenas em situações de equilíbrio.

Como não estamos limitando as possibilidades de interação entre o gás e o ambiente, as quantidades de calor e trabalho envolvidas no percurso de volta podem ser diferentes das quantidades do percurso da vinda.

No percurso inicial, quando retiramos o peso, o gás enfrentou um processo de forte desequilíbrio no qual não é possível definir as funções termodinâmicas. Essa é a essência de um processo irreversível: a impossibilidade de definir os estados intermediários de uma transformação termodinâmica. Como não podemos conhecer o percurso utilizado, não podemos reverter o processo pelo mesmo caminho.



Existe uma outra faceta que caracteriza os processos irreversíveis. São que processos que naturalmente acontecem apenas em uma direção.

Na experiência cotidiana percebemos que o calor sempre vai naturalmente do corpo mais quente para o mais frio, até que as temperaturas se equilibrem. Mas nunca acontece o contrário: o calor naturalmente ir do corpo mais frio para corpo o mais, esquentando o mais quente e esfriando o mais frio. Essa frase anterior chega a incomodar do absurdo que ela reflete. Porque acontece isso se as duas transformações são equivalentes em termos energéticos: a energia seria conservada em ambas as situações.

As mudanças que acontecem com a energia dentro de um sistema fechado não impõem o sentido de processos irreversíveis. Essa direção é imposta pela análise da variação de uma outra grandeza termodinâmica: a entropia. A entropia está associada com o grau de organização de um sistema. E esse grau de organização não pode nunca diminuir naturalmente.

Quando um sistema esfria significa que diminuiu a sua energia interna e, portanto a amplitude de seus movimentos, o números de graus de liberdade. Isso implica em torná-lo mais organizado. Nessa situação, esfriar o sistema significaria diminuir a entropia, e por isso em um sistema isolado a temperatura nunca diminui.

Máquinas térmicas

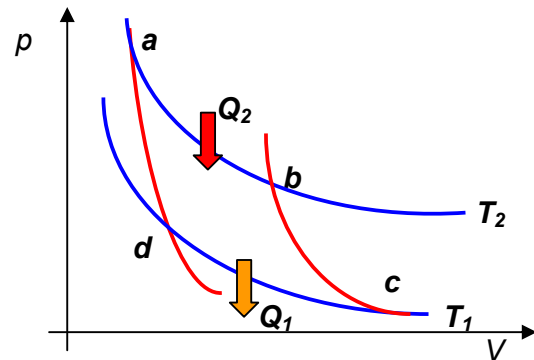
Máquina térmica ou motor é um dispositivo que extrai energia do ambiente, na forma de calor, e realiza trabalho útil. No interior de toda máquina térmica está uma substância de trabalho, que sofre as transformações termodinâmicas que possibilitam as mudanças de forma da energia.

Para que uma máquina funcione de maneira permanente é necessário que ela opere em ciclos, ou seja: a substância de trabalho passa por diversas transformações termodinâmicas até retornar ao estado inicial, completando um ciclo.

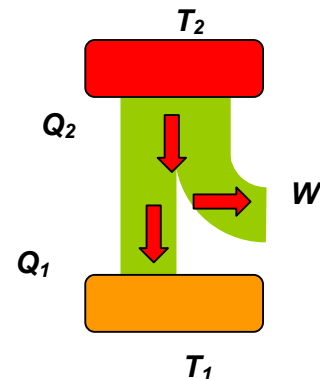
De modo geral as máquinas térmicas operam em ciclo entre duas fontes térmicas com temperaturas diferentes. Uma máquina térmica retira calor da fonte quente e rejeita parte desse calor para uma fonte fria e transforma essa diferença de energia em trabalho mecânico.

Uma máquina de Carnot

Em um ciclo de uma máquina de Carnot a substância de trabalho passa por quatro processos diferentes, onde dois processos são isotérmicos (**ab** e **cd**) e os outros dois processos são adiabáticos (**bc** e **da**).



O sistema absorve uma quantidade de calor Q_2 isotermicamente a uma temperatura T_2 quando vai do estado **a** para o estado **b**. E de maneira equivalente, o sistema rejeita uma quantidade de calor Q_1 isotermicamente a uma temperatura T_1 quando vai do estado **c** para o estado **d**. As transformações entre os estados **b** e **c**, bem como entre os estados **d** e **a** acontecem adiabaticamente, ou seja: sem que ocorra troca de calor com o ambiente.



O trabalho executado pelo sistema quando acontece a transformação isotérmica entre os estados **a** e **b** é calculado como:

$$W_{ab} = \int_a^b p dV$$

e considerando a substância de trabalho como um gás ideal, temos que:

$$p = \frac{\mu RT}{V}$$

ou seja:

$$W_{ab} = \mu RT_2 \int_{V_a}^{V_b} \frac{dV}{V} = \mu RT_2 \ln \left(\frac{V_b}{V_a} \right)$$

De maneira equivalente calculamos trabalho executado pelo sistema quando acontece a transformação isotérmica entre os estados **c** e **d** como sendo:

$$W_{cd} = \mu RT_1 \int_{V_c}^{V_d} \frac{dV}{V} = \mu RT_1 \ln \left(\frac{V_d}{V_c} \right)$$

Considerando que a substância de trabalho é um gás ideal, a sua energia interna depende explicitamente apenas da temperatura, e desse modo ela se mantém constante ao longo de uma transformação isotérmica. Ou seja:

$$\begin{cases} E(T_2) = E_a = E_b \\ E(T_1) = E_c = E_d \end{cases}$$

Tendo em conta a primeira lei da termodinâmica

$$dE = dQ - dW$$

encontramos que:

$$\begin{cases} \Delta E_{ab} = Q_{ab} - W_{ab} \Rightarrow Q_2 \equiv Q_{ab} = W_{ab} \\ \Delta E_{cd} = Q_{cd} - W_{cd} \Rightarrow Q_3 \equiv Q_{cd} = W_{cd} \end{cases}$$

ou seja:

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{W_{ab}}{W_{cd}} = \frac{\mu RT_1 \ln \left(\frac{V_b}{V_a} \right)}{\mu RT_2 \ln \left(\frac{V_d}{V_c} \right)}$$

Ainda considerando as propriedades de um gás ideal, quando ele é submetido a uma transformação adiabática, temos que:

$$TV^{\gamma-1} = \text{constante}$$

ou seja:

$$\begin{cases} T_2 V_b^{\gamma-1} = T_1 V_c^{\gamma-1} \\ T_2 V_a^{\gamma-1} = T_1 V_d^{\gamma-1} \end{cases}$$

logo:

$$\frac{V_b^{\gamma-1}}{V_a^{\gamma-1}} = \frac{V_c^{\gamma-1}}{V_d^{\gamma-1}} \Rightarrow \ln\left(\frac{V_b}{V_a}\right) = \ln\left(\frac{V_c}{V_d}\right) = -\ln\left(\frac{V_d}{V_c}\right)$$

e finalmente

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{W_{cd}}{W_{ab}} = \frac{\mu RT_1 \ln\left(\frac{V_d}{V_c}\right)}{\mu RT_2 \ln\left(\frac{V_b}{V_a}\right)} = -\frac{T_1}{T_2}$$

Eficiência de uma máquina de Carnot

A eficiência de uma máquina térmica qualquer é definida como a sua capacidade de transformar calor em trabalho. Ou seja:

$$\varepsilon = \frac{\text{trabalho efetivo}}{\text{calor absorvido}} = \frac{W_E}{Q_{\text{absorvido}}}$$

onde o trabalho efetivo é entendido como a soma de todos os trabalhos envolvidos em cada etapa do ciclo completo, e o calor absorvido é considerado como o soma de todos os calores absorvidos (positivos), ignorando-se os calores rejeitados (negativos).

Em um ciclo de Carnot, como esse considerado anteriormente:

$$W_E = W_{ab} + W_{cd} = |W_{ab}| - |W_{cd}|$$

onde enfatizamos que $W_{cd} < 0$. Por outro lado, o calor absorvido foi $Q_2 > 0$. E desse modo temos que:

$$\varepsilon = \frac{|W_{ab}| - |W_{cd}|}{Q_2} = \frac{|Q_2| - |Q_1|}{|Q_2|} = \frac{|W_{ab}| - |W_{cd}|}{W_{ab}} = 1 - \left| \frac{Q_1}{Q_2} \right|$$

ou seja:

$$\varepsilon = 1 - \frac{T_1}{T_2}$$

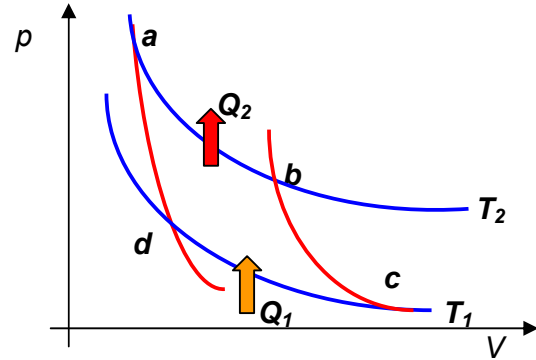
Refrigeradores

Refrigerador é um dispositivo cuja função é transferir calor de um reservatório térmico em uma temperatura mais baixa para um outro reservatório térmico em uma temperatura mais alta. Em um processo natural o calor se transfere de um reservatório com temperatura mais alta para outro com uma temperatura mais baixa. Para conseguir realizar uma transferência de calor num sentido contrário ao sentido natural, o refrigerador necessita executar trabalho na substância de trabalho.

A região onde são armazenados os alimentos no interior de uma geladeira doméstica é o reservatório frio, e o reservatório quente é o ambiente que rodeia a geladeira. Para um ar-condicionado o reservatório frio é o interior do aposento onde ele está instalado, e o reservatório quente é o ambiente externo a esse aposento.

De maneira semelhante a uma máquina térmica ideal, em um refrigerador ideal todos os processos são reversíveis.

Em um refrigerador de Carnot temos um ciclo passando pelos mesmos estados de uma máquina de Carnot, mas com uma sequência de transformações em um sentido contrário, como mostra a figura ao lado.

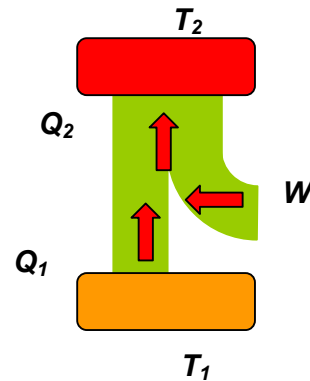


O equivalente à eficiência de uma máquina térmica é definido como coeficiente de desempenho de um refrigerador K :

$$K = \frac{\text{o que queremos}}{\text{o que pagamos}} = \frac{|Q_1|}{|Q_2| - |Q_1|}$$

Para um refrigerador de Carnot temos que:

$$K_c = \frac{T_1}{T_2 - T_1}$$



Teorema de Clausius

Quando estávamos analisando o ciclo de Carnot, encontramos que:

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{W_{cd}}{W_{ab}} = \frac{\mu R T_1 \ln\left(\frac{V_d}{V_c}\right)}{\mu R T_2 \ln\left(\frac{V_b}{V_a}\right)} = -\frac{T_1}{T_2}$$

Podemos então dizer que quando uma máquina térmica realiza um ciclo reversível usando duas transformações isotérmicas de temperaturas T_1 e T_2 e duas transformações adiabáticas que partem de uma isotérmica e alcança a outra, como foi indicado anteriormente, nós temos que:

$$\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} = 0$$

Se tivermos um grande número de transformações reversíveis alternadamente isotérmicas e adiabáticas, como na situação anterior, de modo que esse sistema complete um ciclo, poderemos generalizar a equação anterior como:

$$\sum_i \frac{Q_i}{T_i} = 0$$

A generalização da equação anterior é conhecida como o teorema de Clausius.

Seja dQ a quantidade de calor que um dado sistema troca com o ambiente que o rodeia, e seja T a temperatura em que se dá essa troca de calor; segundo o teorema de Clausius nós temos que:

$$\left\{ \begin{array}{l} \oint_C \frac{dQ_R}{T} = 0; \text{ num ciclo reversível} \\ \oint_C \frac{dQ}{T} \leq 0; \text{ num ciclo irreversível} \end{array} \right.$$

Como foi dito anteriormente, um processo reversível é composto de pequenos processos entre estados termodinâmicos muito próximos. Acontece uma pequena mudança no estado de equilíbrio de um sistema, e ele encontra um novo estado de equilíbrio próximo ao estado inicial.

Apesar da grandeza dQ_R/T de modo geral não ser uma função de estado, para um processo reversível ela comporta como uma função de estado, e podemos definir a entropia S como sendo essa grandeza, de tal modo que:

$$dS = \frac{dQ_R}{T}$$

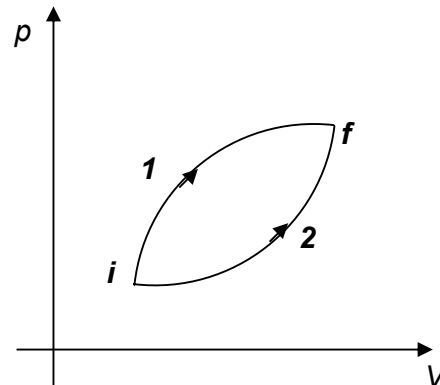
Como a entropia é uma função de estado, a diferença entre os valores de da entropia de dois estados independe do caminho usado para se ir de um estado até o outro. Vamos considerar um processo reversível cíclico, partindo do estado i até o estado f pelo percurso 1 e voltando até o estado original pelo percurso 2 . Desse modo, temos que:

$$\oint_C \frac{dQ_R}{T} = \oint_C dS = 0$$

ou seja:

$$\int_{i(1)}^f dS + \int_{f(2)}^i dS = 0 \Rightarrow \int_{i(1)}^f dS = - \int_{f(2)}^i dS \therefore \int_{i(1)}^f dS = \int_{i(2)}^f dS$$

Como os percursos 1 e 2 foram escolhidos genericamente, podemos concluir que num processo reversível a variação de entropia entre dois estados de equilíbrio não depende do percurso usado para ir de um estado até o outro.



A segunda lei da Termodinâmica

A primeira lei da termodinâmica incorpora ao princípio geral da conservação da energia o reconhecimento de que calor é uma forma de energia. Qualquer processo cuja energia total seja conservada é compatível com a primeira lei da termodinâmica.

No entanto, existem processos que só acontecem em um sentido, são os processos irreversíveis. A segunda lei da termodinâmica dá conta desta questão, assim como das possíveis maneiras de transformar calor em trabalho.

Enunciado de Kelvin

É impossível realizar um processo cujo único efeito seja remover calor de um reservatório térmico e produzir uma quantidade equivalente de trabalho.

Consequências do enunciado de Kelvin

- A geração de calor por atrito a partir de trabalho mecânico é irreversível.
- A expansão livre de um gás é um processo irreversível.
- A condução de calor, que se dá sempre do corpo mais quente para o mais frio, é um processo irreversível.

Curso de Física Básica - Vol 2 - item 10.2 **Moysés Nussenzveig**

Enunciado de Clausius

É impossível realizar um processo cujo único efeito seja transferir calor de um corpo mais frio para um corpo mais quente.

Variação da entropia - casos particulares

Transformação adiabática reversível

Em uma transformação adiabática reversível o sistema não troca calor com o ambiente e, portanto:

$$dQ_R = 0 \Rightarrow dS = 0 \Rightarrow \Delta S = S_f - S_i = 0$$

Variação da entropia em uma transição de fase

Em uma transição de fase o sistema absorve (ou fornece) calor sem que exista uma variação de temperatura:

$$\Delta S = S_f - S_i = \int_i^f dS = \int_i^f \frac{dQ_R}{T}$$

e como a temperatura é constante

$$\Delta S = \frac{\Delta Q_R}{T} = \frac{mL}{T}$$

onde m é a massa do sistema e L é o calor latente desse sistema nessa transição de fase.

Variação de entropia de um gás ideal

De acordo com a primeira lei da termodinâmica

$$dE = dQ - dW \Rightarrow TdS = dQ = dE + pdV$$

ou seja:

$$dS = \frac{dE}{T} + \frac{p}{T} dV$$

Considerando que para um gás ideal:

$$\begin{cases} dE = \mu C_v dT \\ \frac{p}{T} = \frac{\mu R}{V} \end{cases}$$

encontramos:

$$\Delta S = S_f - S_i = \int_i^f dS = \int_i^f \mu C_v \frac{dT}{T} + \int_i^f \mu R \frac{dV}{V}$$

Se considerarmos o calor específico constante na região de integração, teremos que:

$$\Delta S = S_f - S_i = \mu C_v \ln\left(\frac{T_f}{T_i}\right) + \mu R \ln\left(\frac{V_f}{V_i}\right)$$

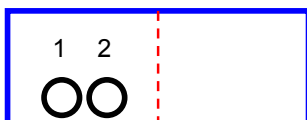
Probabilidade e entropia

Uma amostra de um gás comum contém um número muito grande de átomos ou moléculas. Para termos uma idéia da ordem de grandeza de quão grande é esse número basta lembrarmos que em um mol de hidrogênio (2 gramas) existem 10^{23} moléculas (número de Avogadro).

Para lidar uma grande quantidade de moléculas vamos introduzir conceitos de probabilidade e estatística, e para tal vamos analisar um gás composto por pouquíssimas partículas.

Consideremos um gás com apenas duas moléculas idênticas, que ocupam um recipiente dividido em duas partes; à parte da esquerda e a parte da direita.

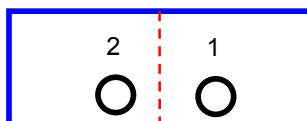
Quais as possíveis configurações que esse gás pode apresentar? Podemos ter as possibilidades mostradas adiante:



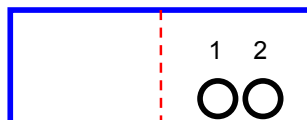
A As duas moléculas ocupam o lado esquerdo do recipiente.



B Uma molécula ocupa o lado esquerdo do recipiente enquanto a outra molécula ocupa o lado direito.



C As posições são invertidas, a molécula que na configuração anterior ocupava o lado esquerdo passa a ocupar o lado direito do recipiente, e a molécula que na configuração anterior ocupava o lado direito passa a ocupar o lado esquerdo do recipiente.



D As duas moléculas ocupam o lado direito do recipiente.

Mas afinal, esse gás de duas moléculas se apresentará em qual configuração? Essa situação se apresenta de uma forma nova, pois o gás pode se apresentar em qualquer uma das configurações. A pergunta deve ser feita de uma maneira diferente: qual a probabilidade do gás se apresentar em cada uma das configurações? Para responde a essa pergunta vamos construir uma tabela:

Configuração	Molécula 1	Molécula 2	n_E	n_D	Nº estados	Probabilidade
A	E	E	2	0	1	1/4
B	E	D	1	1	2	2/4 = 1/2
C	D	E	1	1		
D	D	D	0	2	1	1/4
Total					4	1

Nós temos dois estados equivalentes, e são aqueles associados com as configurações **B** e **C**. O total de estados acessíveis para as duas moléculas, nestas circunstâncias, é $2^N = 2^2 = 4$. Considerando que cada uma das configurações são igualmente prováveis, a probabilidade de encontrar o sistema em cada uma delas é $\frac{1}{4}$. Como temos duas configurações equivalentes (**B** e **C**), a probabilidade de encontrar sistema em uma delas é $2 \cdot (1/4) = \frac{1}{2}$. As duas configurações são equivalentes (**B** e **C**) por que são indistinguíveis, não se pode distinguir em qual das configurações o sistema está.

Para tentar entender o comportamento de um gás real, devemos analisar um gás com um número cada vez maior de moléculas. Nesse sentido, vamos refazer os cálculos anteriores considerando dessa vez um gás com 4 moléculas.

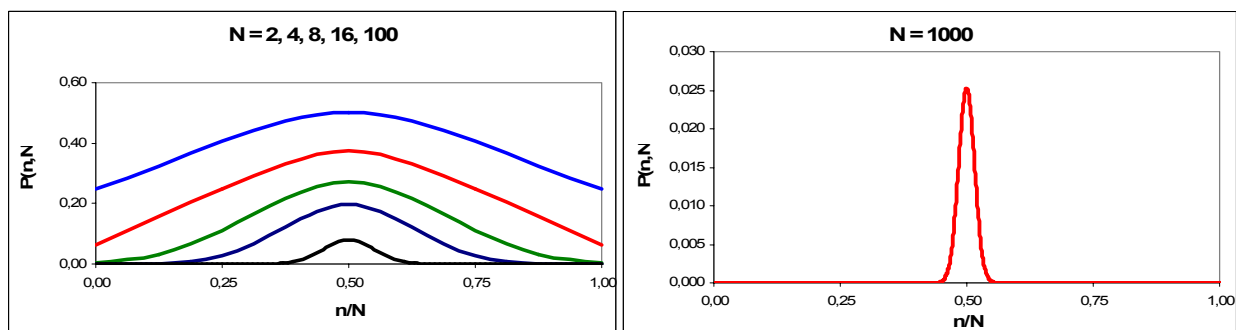
N = 4							
Molécula				n _E	n _D	Nº de estados	Probabilidade P(n _E , n _D)
1	2	3	4				
E	E	E	E	4	0	$1 = \binom{4}{0}$	$\frac{1}{16} = \frac{1}{2^4}$
D E E E	E D E E	E E D E	E E E D	3	1	$4 = \binom{4}{1}$	$\frac{4}{16} = \frac{1}{4} = \binom{4}{1} \frac{1}{2^4}$
D D D E E E	D E E D D E	E D E D E D	E E D E D D	2	2	$6 = \binom{4}{2}$	$\frac{6}{16} = \frac{3}{8} = \binom{4}{2} \frac{1}{2^4}$
D D D E	D D E D	D E D D	E D D D	1	3	$4 = \binom{4}{3}$	$\frac{4}{16} = \frac{1}{4} = \binom{4}{3} \frac{1}{2^4}$
D	D	D	D	0	4	$1 = \binom{4}{4}$	$\frac{1}{16} = \frac{1}{2^4}$
Totais						$16 = 2^4$	1

Estamos usando a notação:

$$\binom{N}{n} = \frac{N!}{n!(N-n)!} = \binom{N}{N-n}$$

É possível generalizar os resultados obtidos para a situação onde o sistema é composto por um número N de moléculas. As probabilidades calculadas para cada uma das situações têm a forma:

$$P(n_E, n_D) = \binom{N}{n_E} \frac{1}{2^N}$$



Como mostra a figura anterior na medida que aumenta o número N de moléculas do gás o máximo em torno de $n_E = n_D$ vai se tornando cada vez mais agudo. Podemos entender que quando N for pequeno, não são muito diferentes as probabilidades do sistema ocupar um de seus estados acessíveis. No entanto, quando N assume valores apreciáveis, existe uma grande quantidade de estados equivalentes em torno de $n_E = n_D$ e desse modo existe uma grande probabilidade do sistema ocupar um estado onde $n_E = n_D$ onde o número de moléculas na parte esquerda do recipiente é igual ao número de moléculas na parte direita do recipiente.

Curso de Física Básica - Vol 2 - item 12.5
Moysés Nussenzveig

Uma visão estatística da entropia

No item anterior encontramos que o número de estados acessíveis $W(N, n_E)$ para uma dada escolha de n_E , ou seja, a multiplicidade de estados com essa mesma característica é dado por

$$W(N, n_E) = \binom{N}{n} = \frac{N!}{n!(N-n)!} = \binom{N}{N-n}$$

O Físico austríaco Ludwig Boltzmann deduziu uma relação entre a entropia S de um sistema e a multiplicidade $W(N, n_E)$, e essa relação tem a forma:

$$S = k_B \ln W$$

Calor, trabalho e energia

Calor é a energia que se transfere de um corpo para o outro corpo devido a uma diferença de temperatura entre eles.

Trabalho é a energia que se transfere de um corpo para o outro devido a uma força que age entre eles.

Solução de alguns problemas

Capítulo 21 - Halliday, Resnick e Walker

- 01 Uma amostra de $2,5 \text{ moles}$ de um gás ideal se expande reversível e isotermicamente a 360 K até que o seu volume seja dobrado. Qual o aumento de entropia do gás?

$$\mu = 2,5 \text{ moles}$$

$$T = 360 \text{ K}$$

$$V_f = 2 V_i$$

Para um gás ideal a energia interna é função apenas da temperatura, e desse modo em uma transformação isotérmica a energia interna não varia. Considerando a primeira lei da termodinâmica, para uma transformação isotérmica ($dE = 0$), temos que:

$$dE = dQ - dW \Rightarrow dQ = dW = p dV$$

Por outro lado:

$$dS = \frac{dQ}{T} = \frac{dW}{T} = \frac{pdV}{T} = \mu R \frac{dV}{V}$$

onde a última igualdade é uma consequência da equação de estado para um gás ideal. Integrando a equação anterior, temos que:

$$\Delta S = S_f - S_i = \mu R \int_{V_i}^{V_f} \frac{dV}{V} = \mu R \ln \left(\frac{V_f}{V_i} \right) = \mu R \ln 2$$

$$\Delta S = 14,41 \text{ J/K}$$

Capítulo 21 - Halliday, Resnick e Walker

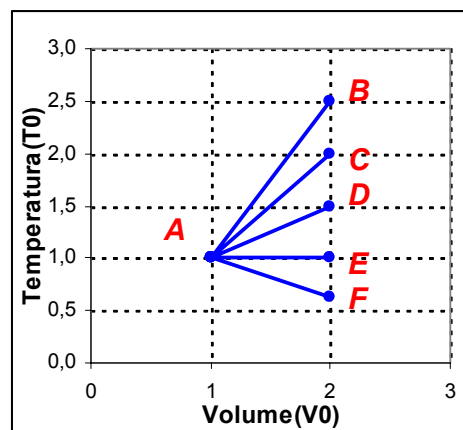
- 06 Um gás ideal monoatômico à temperatura inicial T_0 (em Kelvins) se expande do volume inicial V_0 até o volume final $2V_0$, por cada um dos processos indicados na figura ao lado. No processo **AF** a temperatura final é de $0,63T_0$.

Em que processo a expansão é:

- a) isotérmica
- b) Isobárica (pressão constante)
- c) adiabática

Explique as suas respostas.

- d) Em quais dos processos a entropia do gás diminui?



- a) Numa expansão isotérmica de um gás temos que, obviamente, a temperatura permanece constante e, portanto isso acontece no processo **AE**.
- b) Numa expansão isobárica de um gás ideal temos que:

$$\frac{V_i}{T_i} = \frac{\mu R}{p} = \frac{V_f}{T_f} \quad \therefore \quad T_f = T_i \left(\frac{V_f}{V_i} \right) = 2T_i$$

e, portanto isso acontece na expansão **AC**.

- c) Numa expansão adiabática de um gás ideal temos que:

$$pV^\gamma = \text{const} \quad \Rightarrow \quad TV^{\gamma-1} = \text{const}$$

Para um gás ideal monoatômico:

$$\gamma = \frac{C_P}{C_V} = \frac{\frac{5R}{2}}{\frac{3R}{2}} = \frac{5}{3} \quad \therefore \quad \gamma - 1 = \frac{2}{3}$$

e desse modo:

$$T_i V_i^{\gamma-1} = T_f V_f^{\gamma-1} \quad \therefore \quad T_f = T_i \left(\frac{V_i}{V_f} \right)^{\gamma-1} = \frac{T_i}{2^{2/3}} = 0,629T_i$$

e, portanto isso acontece na expansão **AF**.

- d) Numa **expansão isotérmica** desse tipo, como mostrado no problema 06, a entropia varia da forma:

$$\Delta S = S_f - S_i = \mu R \int_{V_i}^{V_f} \frac{dV}{V} = \mu R \ln \left(\frac{V_f}{V_i} \right) = \mu R \ln 2 > 0$$

Numa **expansão adiabática** $dQ = 0$ e desse modo $\Delta S = 0$

Numa variação genérica em um gás ideal temos que:

$$dQ = dE + p dV = \mu C_V dT + p dV$$

ou seja:

$$dS = \frac{dQ}{T} = \mu C_V dT + \frac{p}{T} dV = \mu C_V dT + \mu R \frac{dV}{V}$$

e, portanto

$$\Delta S = \mu C_V \ln \left(\frac{T_f}{T_i} \right) + \mu R \ln \left(\frac{V_f}{V_i} \right)$$

Numa **expansão isobárica** desse tipo

$$\Delta S = (\mu C_V + \mu R) \ln 2 > 0$$

Capítulo 21 - Halliday, Resnick e Walker

- 07 a) Qual a variação de entropia de um cubo de gelo de $12,0g$ que se derrete completamente em um balde de água cuja temperatura está logo acima do ponto de congelamento da água?

$$\begin{aligned} m &= 12,0g = 0,012kg \\ T &= 0^{\circ}C = 273K \\ L_F &= 79,5cal/g = 333 \times 10^3 J/kg \end{aligned}$$

$$\Delta S = \frac{Q}{T} = \frac{mL_F}{T} = 14,63 J/K$$

- b) Qual a variação de entropia de uma colherada de $5,0g$ de água que evapora completamente em cima de um prato quente cuja temperatura está ligeiramente acima do ponto de ebulição da água?

$$\begin{aligned} m &= 5,0g = 0,005kg \\ T &= 100^{\circ}C = 373K \\ L_V &= 539cal/g = 2.256 \times 10^3 J/kg \end{aligned}$$

$$\Delta S = \frac{Q}{T} = \frac{mL_V}{T} = 30,24 J/K$$

Capítulo 21 - Halliday, Resnick e Walker

- 09 Em um experimento, $200g$ de alumínio (com calor específico de $900J/kg.K$) a $100^{\circ}C$ são misturados com $50,0g$ de água a $20,0^{\circ}C$, com a mistura termicamente isolada.

- a) Qual a temperatura de equilíbrio?

$$\begin{aligned} m_a &= 200g = 0,2kg & m_A &= 50g = 0,05kg \\ c_a &= 900J/kg.K & c_A &= 1cal/g^{\circ}C = 4.190J/kg.K \\ T_a &= 100^{\circ}C = 373K & T_A &= 20^{\circ}C = 293K \end{aligned}$$

Como o sistema composto por alumínio e água está isolado, ele não troca calor com a vizinhança, e desse modo:

$$\Delta Q = \Delta Q_a + \Delta Q_A = 0$$

e desse modo alcançam uma temperatura de equilíbrio T :

$$m_a c_a (T - T_a) + m_A c_A (T - T_A) = 0$$

ou seja:

$$T = \frac{m_a c_a T_a + m_A c_A T_A}{m_a c_a + m_A c_A} = 56,97^{\circ}C = 329,97K$$

b) Qual a variação de entropia do alumínio?

$$dS = \frac{dQ}{T} = \frac{mc dT}{T} \quad \therefore \quad \Delta S = S_f - S_i = mc \int_{T_i}^{T_f} \frac{dT}{T} = mc \ln \left(\frac{T_f}{T_i} \right)$$

ou seja:

$$\Delta S_a = m_a c_a \ln \left(\frac{T}{T_a} \right) = -22,07 J/K$$

c) Qual a variação de entropia da água?

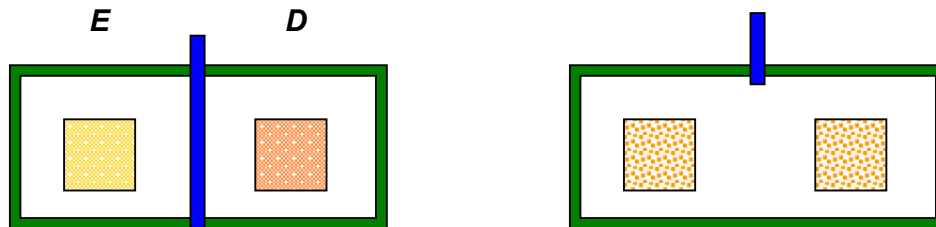
$$\Delta S_A = m_A c_A \ln \left(\frac{T}{T_A} \right) = +24,86 J/K$$

d) Qual a variação de entropia do sistema água - alumínio?

$$\Delta S = \Delta S_a + \Delta S_A \quad \Rightarrow \quad \Delta S = +2,79 J/K$$

Capítulo 21 - Halliday, Resnick e Walker

- 11 A figura abaixo mostra dois blocos idênticos de massa $m = 1,5 kg$. O bloco E da esquerda está a uma temperatura $T_{IE} = 60^\circ C$ e o bloco D da direita está a uma temperatura $T_{ID} = 20^\circ C$. Os blocos estão em uma caixa isolada termicamente e estão separados por uma divisória isolante. Quando levantamos a divisória, os blocos acabam chegando a uma temperatura de equilíbrio $T_f = 40^\circ C$.



a) Qual a variação de entropia resultante do sistema de dois blocos durante esse processo irreversível?
Depois que a divisória isolante é retirada, os blocos trocam calor até atingirem o equilíbrio térmico. Ou seja:

$$\Delta Q = \Delta Q_e + \Delta Q_d = 0$$

$$mc(T - T_e) + mc(T - T_d) = 0 \quad \therefore \quad T = \frac{T_e + T_d}{2}$$

Para calcular a entropia neste processo irreversível, usamos o fato que a entropia é uma função de estado e, portanto o seu valor depende apenas do estado em que se encontra, não importando o processo através do qual alcançou este estado. Podemos imaginar que cada um dos blocos alcançou o seu estado final através de processos reversíveis.

Por exemplo, cada um bloco poderia ter a sua temperatura modificada lentamente através da troca de calor com um banho térmico (reservatório) adequado até que atingissem a temperatura de equilíbrio original T . Desse modo podemos calcular a variação de entropia para cada um dos blocos:

$$dS = \frac{dQ}{T} = mc \frac{dT}{T} \quad \therefore \quad \Delta S = mc \int_{T_i}^{T_f} \frac{dT}{T} = mc \ln \left(\frac{T_f}{T_i} \right)$$

ou seja:

$$\begin{cases} \Delta S_e = mc \ln \left(\frac{T}{T_e} \right) \\ \Delta S_d = mc \ln \left(\frac{T}{T_d} \right) \end{cases}$$

$$\Delta S_T = \Delta S_e + \Delta S_d = mc \left\{ \ln \left(\frac{T}{T_e} \right) + \ln \left(\frac{T}{T_d} \right) \right\} = mc \ln \left[\frac{T^2}{T_e T_d} \right] = mc \ln \left[\frac{(T_e + T_d)^2}{2T_e T_d} \right]$$

No entanto:

$$(T_e + T_d)^2 = T_e^2 + T_d^2 + 2T_e T_d \quad \therefore \quad (T_e + T_d)^2 > 2T_e T_d \quad \Rightarrow \quad \frac{(T_e + T_d)^2}{2T_e T_d} > 1$$

ou seja:

$$\ln \left[\frac{(T_e + T_d)^2}{2T_e T_d} \right] > 0$$

e, portanto

$$\Delta S_T > 0$$

- b)** Mostre que se o processo acontecesse no sentido inverso, a entropia do sistema diminuiria, violando a segunda lei da termodinâmica.

Se o processo acontecer no sentido inverso

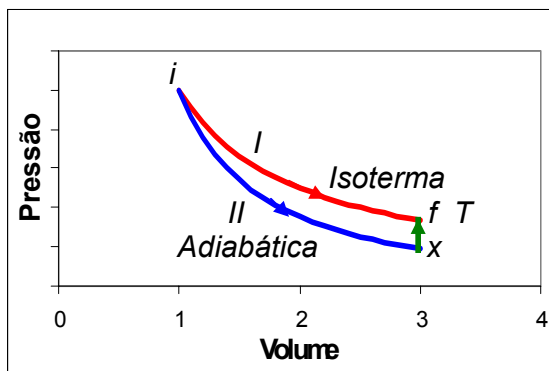
$$\begin{cases} \Delta S'_e = mc \ln \left(\frac{T_e}{T} \right) \\ \Delta S'_d = mc \ln \left(\frac{T_d}{T} \right) \end{cases}$$

$$\Delta S'_T = \Delta S'_e + \Delta S'_d = mc \ln \left[\frac{2T_e T_d}{(T_e + T_d)^2} \right] < 0$$

- 18 Um cilindro contém μ moles de um gás ideal monoatômico. Se o gás sofrer uma expansão isotérmica reversível do volume inicial V_i até o volume final V_f ao longo da trajetória *I* da figura ao lado, a sua variação de entropia é:

$$\Delta S = \mu R \ln \left(\frac{V_f}{V_i} \right)$$

Agora considere a trajetória *II* da figura ao lado, que leva o gás do mesmo estado inicial *i* até o estado *x* por meio de uma expansão adiabática reversível, e depois deste estado *x* até o mesmo estado final *f* por meio de um processo reversível a volume constante



- a) Descreva como você poderia realizar os dois processos reversíveis para a trajetória *II*
- b) Mostre que a temperatura do gás no estado *x* é dada por:

$$T_x = T_i \left(\frac{V_i}{V_f} \right)^{2/3}$$

A transformação *ix* é adiabática, e numa transformação desse tipo para um gás ideal temos que:

$$pV^\gamma = \text{const} \Rightarrow TV^{\gamma-1} = \text{const} \quad \therefore T_i V_i^{\gamma-1} = T_x V_x^{\gamma-1}$$

mas

$$\gamma = \frac{C_P}{C_V} = \frac{\frac{5R}{2}}{\frac{3R}{2}} = \frac{5}{3} \quad \therefore \gamma - 1 = \frac{2}{3}$$

ou seja:

$$T_x = T_i \left(\frac{V_i}{V_f} \right)^{2/3}$$

- c) Qual a energia Q_I transferida sob a forma de calor ao longo da trajetória *I* e a energia Q_{II} transferida sob a forma de calor ao longo da trajetória *II*? Elas são iguais?

Ao longo da **trajetória I** temos um processo isotérmico. Considerando a primeira lei da termodinâmica, para uma transformação isotérmica ($dE = 0$), temos que:

$$dE = dQ - dW \Rightarrow dQ = dW = p dV$$

Ou seja:

$$dQ = \mu RT \frac{dV}{V} \quad \therefore \quad Q_I = \mu RT_i \int_{V_i}^{V_f} \frac{dV}{V} = \mu RT \ln\left(\frac{V_f}{V_i}\right)$$

Ao longo da **trajetória II** temos um processo adiabático (**ix**) e um outro isovolumétrico (**xf**). Ou seja:

$$Q_{II} = Q_{ix} + Q_{xf}$$

Como no processo adiabático não existe troca de calor temos que $Q_{ix} = 0$. Para o processo isovolumétrico, temos que $\Delta V_{xf} = 0$. Usando a primeira lei da termodinâmica, temos que

$$dQ_{xf} = dE_{xf} + p dV_{xf}$$

ou seja:

$$dQ_{xf} = dE_{xf} = \mu C_V dT_{xf} \quad \therefore \quad Q_{xf} = \mu C_V (T_f - T_x)$$

- d) Qual a variação da entropia ΔS para a trajetória II? A variação de entropia para a trajetória I é igual a ela?

$$dS_I = \frac{dQ_I}{T} = \frac{dW_I}{T} = \frac{pdV}{T} = \mu R \frac{dV}{V} \Rightarrow \Delta S_I = \mu R \ln\left(\frac{V_f}{V_i}\right)$$

$$\Delta S_{II} = \Delta S_{ix} + \Delta S_{xf}$$

Como o processo **ix** é adiabático, temos então que $\Delta S_{ix} = 0$ e, portanto:

$$dS_{II} = dS_{xf} = \frac{dQ_{xf}}{T} = \frac{dE_{xf}}{T} = \mu C_V \frac{dT_{xf}}{T} \Rightarrow \Delta S_{II} = \mu C_V \ln\left(\frac{T_f}{T_x}\right)$$

Por outro lado

$$\frac{T_f}{T_x} = \frac{T_i}{T_x} = \left(\frac{V_f}{V_i}\right)^{\frac{2}{3}}$$

e, portanto

$$\Delta S_{II} = \mu \left(\frac{3R}{2}\right) \ln\left[\left(\frac{V_f}{V_i}\right)^{\frac{2}{3}}\right] = \mu R \ln\left(\frac{V_f}{V_i}\right)$$

onde encontramos que:

$$\Delta S_I = \Delta S_{II}$$

- e) Calcule T_x , Q_I , Q_{II} e ΔS para $\mu = 1$, $T = 500K$ e $V_f/V_i = 2$.

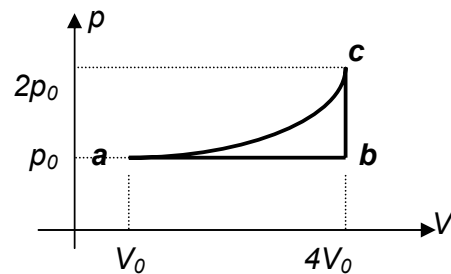
19 Um mol de um gás ideal percorre o ciclo da figura à seguir.

- a) Qual o trabalho realizado pelo gás para ir do estado **a** ao estado **c** ao longo da trajetória **abc** ?

$$W_{abc} = W_{ab} + W_{bc}$$

Como o processo **bc** é isovolumétrico, o trabalho para realizá-lo é nulo, e desse modo:

$$W_{abc} = \int_{V_a}^{V_b} p dV = p_a \int_{V_a}^{V_b} dV = p_a (V_b - V_a) = 3p_0 V_0$$



- b) Quais as variações de energia interna para ir de **b** para **c** e para percorrer um ciclo completo?

$$dE = \mu C_V dT \quad \therefore \quad \Delta E_{bc} = \mu C_V (T_c - T_b) = \frac{3}{2} (\mu R T_c - \mu R T_b) = \frac{3}{2} (p_c V_c - p_b V_b)$$

$$\Delta E_{bc} = \frac{3}{2} [(2p_0)(4V_0) - (p_0)(4V_0)] = \frac{3}{2} (4p_0 V_0) = 6p_0 V_0 = 6\mu R T_0$$

Como a energia interna é uma função de estado, a sua variação em um ciclo completo é nula.

- c) Quais as variações de entropia para ir de **b** para **c** e para percorrer um ciclo completo?

Como o processo **bc** é isovolumétrico, o trabalho para realizá-lo é nulo, e desse modo a primeira lei da termodinâmica toma a forma:

$$dQ_{bc} = dE_{bc} = \mu C_V dT_{bc}$$

Mas

$$dS_{bc} = \frac{dQ_{bc}}{T} = \mu C_V \frac{dT_{bc}}{T}$$

logo

$$\Delta S_{bc} = \mu C_V \int_{T_b}^{T_c} \frac{dT}{T} = \mu C_V \ln \left(\frac{T_c}{T_b} \right)$$

No entanto

$$\frac{T_b}{T_c} = \frac{p_c V_c / \mu R}{p_b V_b / \mu R} = \frac{p_c}{p_b} = \frac{2p_0}{p_0} = 2 \quad \Rightarrow \quad \Delta S_{bc} = \frac{3}{2} \mu R \ln 2$$

Como a entropia é uma função de estado, a sua variação em um ciclo completo é nula.

Capítulo 21 - Halliday, Resnick e Walker

23 Um motor de Carnot opera entre 235°C e 115°C , absorvendo $6,3 \times 10^4 \text{ J}$ por ciclo na temperatura mais alta.

a) Calcule a eficiência do motor.

$$T_a = 235^{\circ}\text{C} = 508\text{K}$$

$$T_b = 115^{\circ}\text{C} = 388\text{K}$$

$$Q_a = 6,3 \times 10^4 \text{ J}$$

$$\varepsilon = 1 - \frac{T_b}{T_a} = 1 - \frac{388}{508} = 0,2362 \Rightarrow \varepsilon(\%) = 23,62\%$$

b) Quanto trabalho por ciclo este motor é capaz de realizar?

$$\varepsilon = \frac{W}{Q_a} \Rightarrow W = \varepsilon Q_a = 1,48 \times 10^4 \text{ J}$$

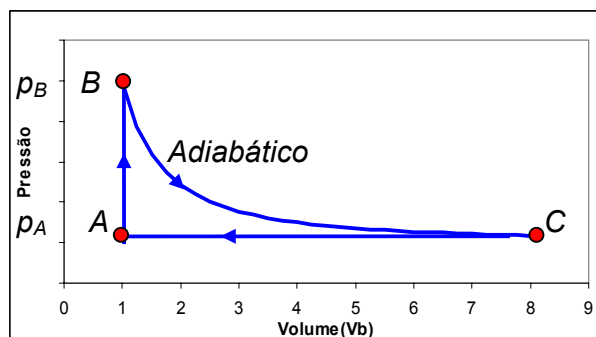
Capítulo 21 - Halliday, Resnick e Walker

27 Um mol de um gás ideal monoatômico percorre o ciclo reversível mostrado na figura ao lado. O processo BC é uma expansão adiabática, com $p_B = 10 \text{ atm}$ e $V_B = 10^{-3} \text{ m}^3$.

a) Determine a energia adicionada ao gás sob a forma de calor.

$$p_B = 10 \text{ atm} = 1,013 \times 10^5 \text{ Pa}$$

$$V_B = 10^{-3} \text{ m}^3$$



Como a transformação BC é adiabática:

$$p_B V_B^\gamma = p_C V_C^\gamma \Rightarrow p_C = p_B \left(\frac{V_B}{V_C} \right)^\gamma = p_B \left(\frac{V_B}{8V_B} \right)^{5/3} \therefore p_C = \frac{p_B}{32}$$

$$Q_T = Q_{AB} + Q_{BC} + Q_{CA}$$

Como o processo BC é adiabático, temos que $Q_{BC} = 0$. Por outro lado, o processo AB é isovolumétrico, de modo que o trabalho $dW_{AB} = 0$ e, portanto a primeira lei da termodinâmica toma a forma:

$$dQ_{AB} = dE_{AB} + dW_{AB} \Rightarrow dQ_{AB} = \mu C_V dT_{AB} \therefore Q_{AB} = \mu C_V (T_B - T_A)$$

$$Q_{AB} = \frac{3}{2} (\mu R T_B - \mu R T_A) = \frac{3}{2} (p_B V_B - p_A V_A) = \frac{3}{2} \left(p_B V_B - \frac{p_B}{32} V_B \right)$$

$$Q_{AB} = \frac{3}{2} \cdot \frac{31}{32} p_B V_B = 147,20J$$

$$dQ_{CA} = dE_{CA} + dW_{CA} = \mu C_V dT + p dV$$

ou seja:

$$Q_{CA} = \mu C_V (T_A - T_C) + p_A (V_A - V_C)$$

$$Q_{CA} = \frac{3}{2} (p_A V_A - p_C V_C) + p_A (V_A - V_C) = \frac{5}{2} p_A (V_A - V_C)$$

$$Q_{CA} = \frac{5}{2} \cdot \frac{p_B}{32} (V_B - 8V_B) = -\frac{5}{2} \cdot \frac{7}{32} p_B V_B = -55,39J$$

É fácil concluir que Q_{AB} é a energia adicionada ao gás sob a forma de calor.

- b)** Determine a energia que deixa o gás sob a forma de calor.

Por outro lado, também é fácil concluir que Q_{CA} é a energia que deixa o gás sob a forma de calor.

- c)** Determine o trabalho resultante realizado pelo gás.

$$W = Q_{AB} + Q_{CA} = 147,20J - 55,39J = +91,81J$$

- d)** Determine a eficiência do ciclo.

$$\varepsilon = \frac{W}{Q_{AB}} = \frac{91,81}{147,20} = 0,6237$$

Capítulo 21 - Halliday, Resnick e Walker

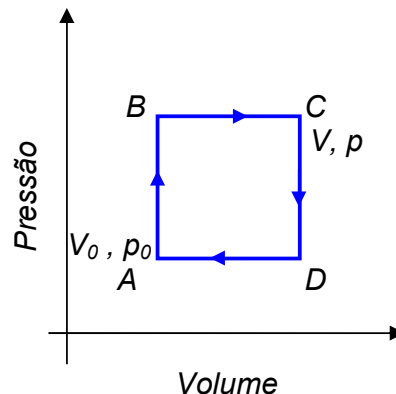
- 29** Um mol de um gás ideal monoatômico percorre o ciclo mostrado na figura ao lado. Suponha que $p = 2p_0$; $V = 2V_0$; $p_0 = 1,01 \times 10^5 Pa$ e $V_0 = 0,0225 m^3$.

- a)** Calcule o trabalho realizado durante o ciclo

$$W_{abcta} = \int_{abcta} p dV = (p - p_0)(V - V_0)$$

$$W_{abcta} = (2p_0 - p_0)(2V_0 - V_0) = p_0 V_0$$

$$W_{abcta} = 2.272,50J$$



- b)** Calcule a energia adicionada sob a forma de calor durante o tempo ABC do motor.

$$Q_{abc} = Q_{ab} + Q_{bc}$$

$$dQ_{ab} = dE_{ab} = \mu C_V dT \quad \therefore \quad Q_{ab} = \mu C_V (T_b - T_a) = \frac{3}{2} (\mu R T_b - \mu R T_a)$$

$$Q_{ab} = \frac{3}{2} (p_b V_b - p_a V_a) = \frac{3}{2} [(2p_0)(V_0) - (p_0)(V_0)] = \frac{3}{2} p_0 V_0$$

$$Q_{ab} = 3.408,75J$$

$$dQ_{bc} = dE_{bc} + dW_{bc} = \mu C_V dT_{bc} + p dV_{bc} \quad \therefore \quad Q_{bc} = \mu C_V (T_c - T_b) + p_b (V_c - V_b)$$

$$Q_{bc} = \frac{3}{2} (p_c V_c - p_b V_b) + p_b (V_c - V_b) = \frac{5}{2} p_b (V_c - V_b) = \frac{5}{2} (2p_0) [(2V_0) - V_0] = 5p_0 V_0$$

$$Q_{bc} = 11.362,50J$$

e, portanto

$$Q_{abc} = \frac{3}{2} p_0 V_0 + 5p_0 V_0 = \frac{13}{2} p_0 V_0$$

$$Q_{abc} = 14,771,25J$$

c) Calcule a eficiência do ciclo.

$$\varepsilon = \frac{W_{abca}}{Q_{abc}} = \frac{p_0 V_0}{\frac{13}{2} p_0 V_0} = \frac{2}{13} = 0,1538$$

$$\varepsilon(\%) = 15,38\%$$

d) Qual a eficiência de um motor de Carnot operando entre as temperaturas mais alta e mais baixa que ocorrem no ciclo? Como essa eficiência se compara com a calculada em (c) .

$$T_a = \frac{p_a V_a}{\mu R} = \left(\frac{p_0 V_0}{\mu R} \right)$$

$$T_b = \frac{p_b V_b}{\mu R} = 2 \left(\frac{p_0 V_0}{\mu R} \right) = 2T_a$$

$$T_c = \frac{p_c V_c}{\mu R} = 4 \left(\frac{p_0 V_0}{\mu R} \right) = 4T_a$$

$$T_d = \frac{p_d V_d}{\mu R} = 2 \left(\frac{p_0 V_0}{\mu R} \right) = 2T_a$$

$$\varepsilon_C = 1 - \frac{T_a}{T_c} = 1 - \frac{T_a}{4T_a} = \frac{3}{4} = 0,75$$

$$\varepsilon_C(\%) = 75\%$$

Capítulo 21 - Halliday, Resnick e Walker

30

No primeiro estágio de um motor de Carnot de dois estágios, a energia Q_1 é absorvida sob a forma de calor a uma temperatura T_1 , o trabalho W_1 é realizado e a energia Q_2 é expelida sob a forma de calor a uma temperatura T_2 . O segundo estágio absorve essa energia Q_2 , realiza o trabalho W_2 e expõe a energia Q_3 a uma temperatura ainda mais baixa T_3 . Prove que a eficiência do motor de dois estágios é $(T_1 - T_3)/T_1$.

$$\text{Est\u00e1gio 1} \begin{cases} \text{absorve } Q_1 \text{ em } T_1 \\ \text{produz } W_1 \\ \text{rejeita } Q_2 \text{ em } T_2 \end{cases} \quad \text{Est\u00e1gio 2} \begin{cases} \text{absorve } Q_2 \text{ em } T_2 \\ \text{produz } W_2 \\ \text{rejeita } Q_3 \text{ em } T_3 \end{cases}$$

Essa m\u00e1quina interage com a vizinhan\u00e7a absorvendo Q_1 numa temperatura T_1 , rejeitando Q_3 numa temperatura T_3 , e produzindo um trabalho $W_T = W_1 + W_2$. Em outras palavras:

$$W_T = W_1 + W_2 = |Q_1| - |Q_3|$$

$$\varepsilon = \frac{W_T}{|Q_1|} = \frac{|Q_1| - |Q_3|}{|Q_1|} = 1 - \frac{|Q_3|}{|Q_1|} = 1 - \frac{T_3}{T_1} = \frac{T_1 - T_3}{T_1}$$

Cap\u00edtulo 21 - Halliday, Resnick e Walker

32 Um mol de um g\u00e1s ideal \u00e9 usado como subst\u00e2ncia de trabalho de um motor que opera no ciclo mostrado na figura abaixo. BC e DA s\u00e3o processos adiab\u00e1ticos revers\u00edveis

a) O g\u00e1s \u00e9 monoat\u00f4mico, diat\u00f4mico ou poliat\u00f4mico?

Como o processo BC \u00e9 adiab\u00e1tico, temos que:

$$p_B V_B^\gamma = p_C V_C^\gamma$$

$$\frac{p_B}{p_C} = \left(\frac{V_C}{V_B} \right)^\gamma$$

$$\frac{p_0}{\frac{p_0}{32}} = \left(\frac{16V_0}{2V_0} \right)^\gamma \quad \therefore \quad 32 = 8^\gamma \quad \Rightarrow \quad \ln 32 = \gamma \ln 8$$

$$\gamma = \frac{\ln 32}{\ln 8} = \frac{5 \ln 2}{3 \ln 2} = \frac{5}{3}$$

Para um g\u00e1s monoat\u00f4mico:

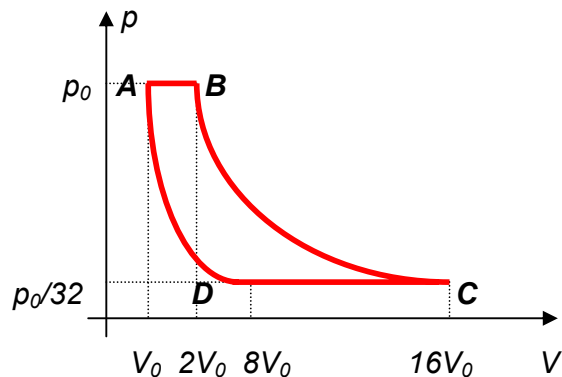
$$\gamma = \frac{C_P}{C_V} = \frac{\frac{5R}{2}}{\frac{3R}{2}} = \frac{5}{3}$$

e, portanto o g\u00e1s utilizado \u00e9 monoat\u00f4mico.

b) Qual a efici\u00eancia do motor?

$$dQ = \mu C_V dT + p dV$$

Se a transforma\u00e7\u00e3o entre os estados inicial e final acontece com a press\u00e3o constante, temos que:



$$dQ = \mu C_V dT + p dV$$

Se a transformação entre os estados inicial e final acontece com a pressão constante, temos que:

$$Q_{if} = \mu C_V (T_f - T_i) + p_i (V_f - V_i)$$

$$Q_{if} = \frac{3}{2} (p_f V_f - p_i V_i) + p_i (V_f - V_i) \Rightarrow Q_{if} = \frac{5}{2} p_i (V_f - V_i)$$

Desse modo:

$$Q_{AB} = \frac{5}{2} p_A (V_B - V_A) = \frac{5}{2} p_0 (2V_0 - V_0) = \frac{5}{2} p_0 V_0$$

$Q_{BC} = 0$, pois se trata de um processo adiabático

$$Q_{CD} = \frac{5}{2} p_C (V_D - V_C) = \frac{5}{2} \cdot \frac{p_0}{32} (8V_0 - 16V_0) = -\frac{5}{8} p_0 V_0$$

$Q_{DA} = 0$, pois se trata de um processo adiabático

Usando a primeira lei da termodinâmica, temos que em um ciclo:

$$W = Q_{AB} + Q_{CD} = \left(\frac{5}{2} p_0 V_0 \right) + \left(-\frac{5}{8} p_0 V_0 \right) = \frac{15}{8} p_0 V_0$$

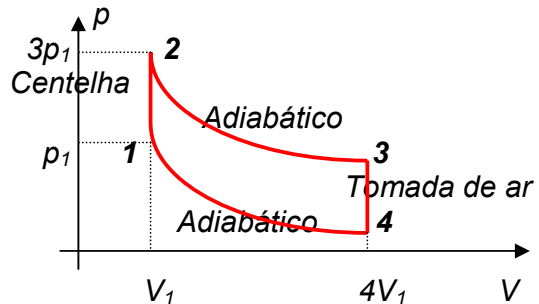
$$\varepsilon = \frac{Q_{AB} + Q_{CD}}{Q_{AB}} = \frac{W}{Q_{AB}} = \frac{\frac{15}{8} p_0 V_0}{\frac{5}{2} p_0 V_0} = \frac{3}{4} = 0,75 \Rightarrow \varepsilon(\%) = 75\%$$

Capítulo 21 - Halliday, Resnick e Walker

33

A operação de um motor a gasolina de combustão interna está representada pelo ciclo na figura ao lado. Suponha que a mistura gasolina - ar de admissão é um gás ideal e use a razão de compressão 4:1 ($V_4 = 4V_1$). Suponha que $p_2 = 3p_1$.

- a) Determine a pressão e a temperatura em cada um dos pontos de vértice do diagrama $p - V$, em termos de p_1 , T_1 , e a razão γ entre os calores específicos molares do gás.



$$T_1 = \frac{p_1 V_1}{\mu R}$$

$$T_2 = \frac{p_2 V_2}{\mu R} = \frac{(3p_1)(V_1)}{\mu R} = 3 \frac{p_1 V_1}{\mu R} = 3T_1$$

$$T_3 = \frac{p_3 V_3}{\mu R} = \frac{(3 \cdot 4^{-\gamma} p_1)(4V_1)}{\mu R} = 3 \cdot 4^{1-\gamma} \left(\frac{p_1 V_1}{\mu R} \right)$$

$$T_3 = 3 \cdot 4^{1-\gamma} T_1$$

$$T_4 = \frac{p_4 V_4}{\mu R} = \frac{(4^{-\gamma} p_1)(4V_1)}{\mu R} = 4^{1-\gamma} \left(\frac{p_1 V_1}{\mu R} \right)$$

$$T_4 = 4^{1-\gamma} T_1$$

$$p_2 V_2^\gamma = p_3 V_3^\gamma \quad \therefore \quad p_3 = p_2 \left(\frac{V_2}{V_3} \right)^\gamma$$

$$p_3 = (3p_1) \left(\frac{V_1}{4V_1} \right)^\gamma = 3 \cdot 4^{-\gamma} p_1$$

$$p_1 V_1^\gamma = p_4 V_4^\gamma \quad \therefore \quad p_4 = p_1 \left(\frac{V_1}{V_4} \right)^\gamma$$

$$p_4 = (p_1) \left(\frac{V_1}{V_1} \right)^\gamma = 4^{-\gamma} p_1$$

b) Qual a eficiência do ciclo?

$$Q_T = Q_{12} + Q_{23} + Q_{34} + Q_{41}$$

Como as transformações **23** e **41** são adiabáticas, temos que:

$$Q_{23} + Q_{41} = 0$$

As transformações **12** e **34** acontecem a volume constante, e quando usamos a primeira lei da termodinâmica, temos que:

$$dQ_{if} = dE_{if} = \mu C_V dT_{if} \Rightarrow Q_{if} = \mu C_V (T_f - T_i)$$

e desse modo:

$$Q_{12} = \mu C_V (T_2 - T_1) = \mu C_V [(3T_1) - (T_1)] = 2\mu C_V T_1$$

e

$$Q_{34} = \mu C_V (T_4 - T_3) = \mu C_V [(4^{1-\gamma} T_1) - (3 \cdot 4^{1-\gamma} T_1)] = 2 \cdot 4^{1-\gamma} \mu C_V T_1$$

e finalmente

$$\varepsilon = 1 - \frac{|Q_{34}|}{|Q_{12}|} = 1 - \frac{2 \cdot 4^{1-\gamma} \mu C_V T_1}{2\mu C_V T_1} = 1 - 4^{1-\gamma}$$

Capítulo 21 - Halliday, Resnick e Walker
--

35	Um condicionador de ar de Carnot pega energia da energia térmica de uma sala a $70^\circ F$ e a transfere para um ambiente externo, que está a $96^\circ F$. Para cada Joule de energia elétrica necessária para operar o condicionador de ar, quantos Joules de calor serão removidos do quarto?
----	--

$$T_F = 70^\circ F$$

$$T_Q = 96^\circ F$$

$$T_F = 294,26K$$

$$T_Q = 308,70K$$

Para efetuar as transformações das escalas de temperatura, usamos que:

$$\begin{cases} T_F = \frac{9}{5} T_C + 32 \\ T_C = T_K - 273,15 \end{cases} \Rightarrow T_K = 273,15 + \frac{5}{9} (T_F - 32)$$

O coeficiente de desempenho de um refrigerador de Carnot é definido como:

$$\kappa = \frac{|Q_F|}{W} = \frac{|Q_F|}{|Q_Q| - |Q_F|} = \frac{T_F}{T_Q - T_F}$$

$$\kappa = 20,37$$

E, portanto podemos dizer que para cada Joule de trabalho W fornecido pelo motor elétrico serão retirados $20,37 \text{ Joules}$ de calor do quarto.

Capítulo 21 - Halliday, Resnick e Walker

- 37 Uma bomba térmica é usada para aquecer um edifício. A temperatura externa é de $-5,0^{\circ}\text{C}$, e a temperatura dentro do edifício deve ser mantida a 22°C . O coeficiente de desempenho da bomba é de 3,8, e a bomba térmica entrega $7,54\text{MJ}$ de calor para o edifício a cada hora. Se a bomba térmica for um motor de Carnot trabalhando no sentido inverso, a que taxa deve-se realizar trabalho para fazer funcionar a bomba térmica?

$$T_F = -5^{\circ}\text{C} = 268,15\text{K}$$

$$T_Q = 22^{\circ}\text{C} = 295,15\text{K}$$

$$|Q_Q|/t = 7,5 \times 10^6 \text{ Joules/hora}$$

$$\kappa = 3,8$$

$$\kappa = \frac{|Q_F|}{W} = \frac{|Q_F|}{|Q_Q| - |Q_F|} \Rightarrow |Q_F| = \frac{\kappa}{1 + \kappa} |Q_Q|$$

portanto

$$W = |Q_Q| - |Q_F| = \frac{1}{1 + \kappa} |Q_Q| \quad \therefore P = \frac{W}{t} = \frac{1}{1 + \kappa} \frac{|Q_Q|}{t}$$

$$P = 1,56 \times 10^6 \text{ J/hora} = 434,02 \text{ watts}$$

Capítulo 21 - Halliday, Resnick e Walker

- 41 Um motor de Carnot trabalha entre as temperaturas T_1 e T_2 . Ele aciona um refrigerador de Carnot que trabalha entre as temperaturas T_3 e T_4 . Determine a razão Q_3/Q_1 em termos de T_1 , T_2 , T_3 e T_4 .

A eficiência de uma máquina de Carnot é definida como:

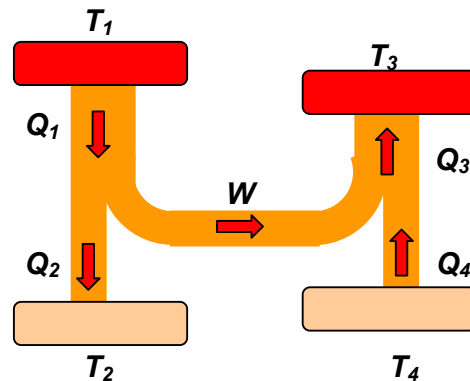
$$\varepsilon = \frac{W}{|Q_Q|} = \frac{|Q_Q| - |Q_F|}{|Q_Q|}$$

O coeficiente de desempenho de um refrigerador de Carnot é definido como:

$$\kappa = \frac{|Q_F|}{W} = \frac{|Q_F|}{|Q_Q| - |Q_F|} = \frac{T_F}{T_Q - T_F}$$

Considerando que:

- 1 – fonte quente
- 2 – fonte fria
- 3 – fonte quente
- 4 – fonte fria



$$\varepsilon = \frac{|Q_1| - |Q_2|}{|Q_1|} = 1 - \frac{T_2}{T_1}$$

$$\kappa = \frac{|Q_4|}{|Q_3| - |Q_4|} = \frac{T_4}{T_3 - T_4}$$

Por outro lado, como a máquina e o refrigerador estão conectados, os trabalhos envolvidos em ambos os processos são iguais, ou seja:

$$W = |Q_1| - |Q_2| = |Q_3| - |Q_4|$$

$$\kappa = \frac{|Q_4|}{|Q_3| - |Q_4|} \Rightarrow |Q_4| = \frac{\kappa}{1 + \kappa} |Q_3|$$

Logo

$$\varepsilon \kappa = \frac{W}{|Q_1|} \frac{|Q_4|}{W} = \frac{|Q_4|}{|Q_1|} \Rightarrow \varepsilon \kappa = \frac{\kappa}{1 + \kappa} \frac{|Q_3|}{|Q_1|}$$

ou seja:

$$\frac{|Q_3|}{|Q_1|} = (\varepsilon \kappa) \left(\frac{1 + \kappa}{\kappa} \right) = \varepsilon (1 + \kappa)$$

ou ainda:

$$\frac{|Q_3|}{|Q_1|} = \left(1 - \frac{T_2}{T_1} \right) \left(1 + \frac{T_4}{T_3 - T_4} \right) = \left(1 - \frac{T_2}{T_1} \right) \left(\frac{T_3}{T_3 - T_4} \right) = \frac{\left(1 - \frac{T_2}{T_1} \right)}{\left(1 - \frac{T_4}{T_3} \right)}$$

Capítulo 21 - Halliday, Resnick e Walker
--

44	Uma caixa contém N moléculas de gás igualmente divididas entre as suas duas metades. Para $N = 50$:
----	--

a) Qual a multiplicidade desta configuração central?

Se um sistema tem N componentes idênticos que podem ocupar duas situações distintas, a multiplicidade de um estado com n componentes em uma situação e os componentes restantes $N-n$ na outra situação é dada por

$$C_N^n = \frac{N!}{n! N!}$$

Na situação específica do problema, temos que:

$$C_{50}^{25} = \frac{50!}{25! 25!} \cong 1,26 \times 10^{14}$$

b) Qual o número total de microestados para o sistema?

O número de microestados de um sistema com N componentes que podem ocupar duas situações, é dado por 2^N , nesse caso temos:

$$2^{50} = 1,13 \times 10^{15}$$

c) Que percentagem de tempo o sistema gasta em sua configuração central?

Como todos os estados são igualmente prováveis, o sistema passará em tese o mesmo tempo em cada um desses estados. No entanto os estados têm multiplicidade diferentes e desse modo o sistema passará um tempo $\tau(N, n)$ em um determinado estado proporcional a probabilidade da ocorrência deste estado, ou seja:

$$\tau(N,n) = \frac{\text{multiplicidade do estado}}{\text{número total de estados}} = \frac{C_N^n}{2^N}$$

$$\tau(50,25) = \frac{C_{50}^{25}}{2^{50}} = 0,111$$