

INTRODUÇÃO

Na presente atividade iremos estudar o pêndulo simples, ou seja, o movimento oscilatório de um objeto de massa m , preso em um fio de comprimento L de massa comparativamente desprezível, comprovando experimentalmente a independência do período de oscilação com a massa e a dependência deste período com o comprimento. Para isso, empregaremos as técnicas básicas utilizadas no tratamento estatístico de dados e conhecimentos básicos de mecânica.

OBJETIVOS

- Comprovar a independência do período de oscilação com a massa,
- Comprovar a dependência do período de oscilação com o comprimento do fio, e
- Testar a validade da aproximação para pequenas amplitudes de oscilação.

MATERIAL UTILIZADO

- Calculadora científica em modo de calculo estatístico,
- Material de apoio (apostilas, vídeos, artigos, etc), e
- Conjunto experimental para estudo do pêndulo simples (suporte, balança, cronometro, etc).

RESUMO DAS BASES TEÓRICAS

Um pêndulo simples é um sistema idealizado que consiste fundamentalmente de uma partícula de massa m suspensa por um fio de comprimento L com massa desprezível, inextensível e não deformável. Quando a partícula é afastada de sua posição de equilíbrio e solta, o pêndulo oscilará em um plano vertical sob a ação da gravidade, tal como ilustrado abaixo.

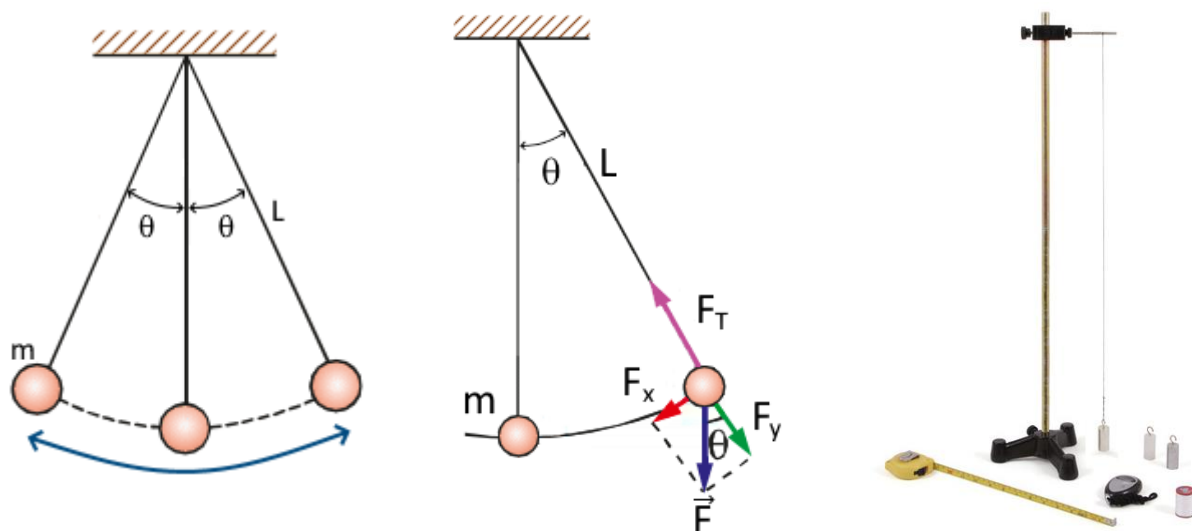
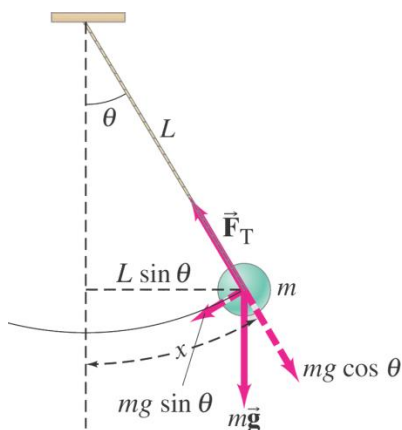


Figura 1: Representações esquemáticas de um pêndulo simples e exemplo de um conjunto experimental.

Tendo em mente os cálculos resumidamente mostrados na Figura 2, adotando a aproximação para pequenas oscilações, ou seja, pequenas amplitudes de oscilação, obtemos que o período das oscilações de um pêndulo simples, T_{LIN} , é dado por:

$$T_{LIN} = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$$

onde g é a aceleração da gravidade ($g = 9.8 \text{ m/s}^2$).



$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + mg \sin \theta = 0 \quad \text{com } x = L\theta$$

$$\Rightarrow \frac{d^2 \theta}{dt^2} + \frac{g}{L} \sin \theta = 0 \quad \text{com } \sin \theta \cong \theta$$

$$\Rightarrow \frac{d^2 \theta}{dt^2} + \frac{g}{L} \theta = 0$$

$$\theta(t) = \theta_M \cos(\omega t + \varphi)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L}} \Rightarrow T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$$

Figura 2: Representações esquemáticas de um pêndulo simples e resumo do cálculo do período de oscilação usando a chamada aproximação para pequenos ângulos, ou seja, aproximação de oscilações de pequenas amplitudes.

Contudo, utilizando técnicas aproximativas mais avançadas, tal como discutido em <https://physika.info/site/documents/PenduloAvancado.pdf>, abordagem não linear de Bernoulli para o cálculo do período, T_{BER} , que leva em consideração oscilações cuja amplitude não pode ser vista como pequena, fornece:

$$T_{\text{BER}} = 2\pi \left[1 + \frac{\theta_M^2}{16} \right] \sqrt{\frac{L}{g}}$$

onde θ_M é a amplitude angular das oscilações, dado em radianos, ou seja, o valor máximo que o ângulo θ pode atingir e que usualmente corresponde ao valor inicial de tal ângulo. Salienta-se mais uma vez que, na expressão acima, θ_M deve ser dado em radianos.

TÓPICOS PRINCIPAIS DO PROCEDIMENTO

Para efetuar a aquisição dos dados necessários para realizar a presente atividade, utilize o conjunto experimental disponível, e siga todas as orientações repassadas na aula na qual o presente roteiro foi apresentado. Aqui, iremos investigar diversos aspectos conforme descrições a seguir.

(i) Dependência do período de oscilação com a massa: Nesta etapa fixe o comprimento do fio $L = 0,6 \text{ m}$, o valor inicial do ângulo θ como sendo aproximadamente 2° , $\theta_M \approx 2^\circ$, e use o valor da aceleração da gravidade como sendo $g = 9,8 \text{ m/s}^2$. Selecione, com o auxílio de uma balança digital, 3 valores distintos para a massa, m , do corpo de prova. Feito isso, adquira os dados tal como foi orientado em sala de aula, cronometrando 10 oscilações para cada valor de m , e complete o quadro abaixo. Observe com cuidado as unidades requeridas. Adicionalmente, cabe salientar que devemos tomar muito cuidado ao “soltar” o corpo de prova de forma que sua velocidade inicial seja nula, ou seja, o corpo de prova deve partir do repouso, pois somente assim a amplitude angular do movimento será mantida igual ao valor inicial ($\theta_M \approx 2^\circ$).

Quadro1: Dados experimentais com $L = 0,6 \text{ m}$, $\theta_M = 2^\circ$ e $g = 9,8 \text{ m/s}^2$.

Massa $m \text{ (kg)}$	Tempo cronometrado de 10 oscilações: $t \text{ (s)}$	Período de oscilação: $T = t/10 \text{ (s)}$

Com base nesses dados, podemos afirmar que o período de oscilação de um pêndulo simples depende da massa do objeto? Isso está coerente com as expressões usadas para o cálculo do período de oscilação?

(ii) Dependência do período de oscilação com o comprimento do fio: Nesta etapa fixe a massa m do corpo de prova, escolhendo um dos valores utilizados no item anterior. Adote o valor inicial do ângulo θ como sendo aproximadamente 2° , $\theta_M \approx 2^\circ$, e a aceleração da gravidade $g = 9,8 \text{ m/s}^2$. Nessa etapa iremos variar o comprimento L do fio, completando o Quadro 2 mostrado a seguir. Observe com cuidado as

unidades requeridas. Adicionalmente, cabe salientar que devemos tomar muito cuidado ao “soltar” o corpo de prova de forma que sua velocidade inicial seja nula, ou seja, o corpo de prova deve partir do repouso, pois somente assim a amplitude angular do movimento será mantida igual ao valor inicial ($\theta_M \approx 2^\circ$).

Efetue 3 medidas do tempo cronometrado de 10 oscilações, t , para cada valor de L , e calcule o valor médio dessas 3 medidas, $\bar{t}$. Calcule o respectivo período de oscilação, $T = \bar{t}/10$, e as previsões teóricas T_{LIN} e T_{BER} . Com base nesses valores, calcule os desvios Δ_{LIN} e Δ_{BER} , usando:

$$\Delta_{LIN} = \frac{|T - T_{LIN}|}{T_{LIN}} \times 100\% \quad \text{e} \quad \Delta_{KF} = \frac{|T - T_{BER}|}{T_{BER}} \times 100\%$$

Tais desvios correspondem aos desvios percentuais tomando os valores de T_{LIN} e T_{BER} como referência, e traduzem o quanto o valor obtido “experimentalmente” se desvia (ou discorda) do valor calculado para a aproximação de pequenas oscilações (T_{LIN}) e para a aproximação mais elaborada (T_{BER}), respectivamente.

Com base nesses dados, discuta a validade da aproximação para oscilações de pequenas amplitudes. Partindo da análise dos dados, podemos dizer que se os maiores desvios, Δ_{LIN} , ocorrem para valores de L menores? Justifique essa resposta. No tocante aos valores T_{BER} , eles são mais fidedignos? Os maiores desvios, Δ_{BER} , ocorrem para quais valores de L ? Explique e contextualize suas conclusões.

Quadro 2: Dados experimentais com $m =$ _____ kg, $\theta_M = 2^\circ$ e $g = 9,8 \text{ m/s}^2$.

Comprimento do fio: L (m)	Medida n°	Tempo cronometrado de 10 oscilações: t (s)	$\bar{t}$ (s)	$T = \bar{t}/10$ (s)	T_{LIN} (s)	Δ_{LIN} (%)	T_{BER} (s)	Δ_{BER} (%)
0,2	1							
	2							
0,6	1							
	2							
1,0	1							
	2							

Construa um gráfico T^2 versus L , marcando os pontos obtidos experimentalmente com símbolos sem conecta-los entre si. Para auxiliar a execução desta tarefa, e da próxima tarefa também, construa um quadro do tipo mostrado a seguir contendo as coordenadas de cada ponto experimental e valores intermediários empregados nos cálculos descritos a seguir.

Quadro 3: Quadro resumido de dados experimentais e valores intermediários.

k	$X_k = L_k$ (m)	X_k^2 (m ²)	T (s)	$Y_k = T^2$ (s ²)	$Y_k \cdot X_k$ (m.s ²)
1	0,2	0,04			
3	0,6	0,36			
5	1,0	1,00			

Efetue um ajuste linear do tipo $Y = \alpha \cdot X$, ou seja, $T^2 = \alpha \cdot L$, usando os dados experimentais contidos no Quadro 3, determinando a inclinação α dessa reta e calculando o coeficiente de correlação, r . Para isso, utilize as expressões a seguir.

$$\alpha = \frac{\sum_{k=1}^5 Y_k \cdot X_k}{\sum_{k=1}^5 X_k^2} \quad \text{e} \quad r = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^5 (\alpha \cdot X_k - \bar{Y})^2}{\sum_{k=1}^5 (Y_k - \bar{Y})^2}} \quad \text{onde} \quad \bar{Y} = \frac{\sum_{k=1}^5 Y_k}{5}$$

A partir dos resultados obtidos, trace no mesmo gráfico mencionado acima, a reta que melhor se ajusta aos pontos passando pela origem (0,0). Em outras palavras, ilustre nesse mesmo gráfico os resultados do ajuste linear efetuado acima. Para isso, use uma linha contínua, sem símbolos gráficos. Sabendo a inclinação α dessa reta, estime o valor da aceleração da gravidade via a expressão: $g = 4\pi^2/\alpha$. Tal estimativa fornece um resultado razoável? Compare com o valor tabelado ($g = 9,8 \text{ m/s}^2$) e determine o respectivo desvio percentual.

O coeficiente de correlação linear, r , obtido acima, terá um valor tal que: quanto mais próximo de 1 menor será os desvios entre os dados experimentais e os valores calculados via esse ajuste linear. Tipicamente, consideramos que a reta obtida por tal ajuste, representará adequadamente os dados experimentais quando obtivermos $r > 0,80$. Sendo assim, diga se r apresenta um valor que indique que os dados experimentais possam ser bem representados pelo ajuste linear? Se isso for verdadeiro, o que podemos afirmar sobre a dependência funcional que o período de oscilação, T , apresenta com relação ao comprimento do fio, L ?

(iii) Validade das aproximações no cálculo do período: Nesta etapa fixe o comprimento do fio $L = 0,6 \text{ m}$, a massa m do corpo de prova no mesmo valor adotado no item anterior e a use aceleração da gravidade como sendo $g = 9,8 \text{ m/s}^2$. Agora iremos variar o valor inicial do ângulo θ , que corresponde à amplitude (angular) de oscilação, completando o Quadro 4 mostrado a seguir. Lembre que os dados para $\theta_M \approx 2^\circ$ já foram produzidos na etapa anterior. Adicionalmente, cabe salientar que devemos sempre tomar muito cuidado ao “soltar” o corpo de prova de forma que sua velocidade inicial seja nula, ou seja, o corpo de prova deve partir do repouso, pois somente assim a amplitude angular do movimento será mantida igual ao valor inicial. Efetue as medidas do tempo cronometrado de 10 oscilações, t , para cada valor de θ_M , e calcule o valor o respectivo período de oscilação, $T = t/10$. Calcule as previsões teóricas T_{LIN} e T_{BER} , e os respectivos desvios Δ_{LIN} e Δ_{BER} , usando as expressões mostradas anteriormente.

Com base nesses resultados, discuta a validade de cada aproximação teórica para o cálculo do período de oscilação. Partindo da análise dos dados, podemos dizer que se os maiores desvios, Δ_{LIN} , ocorrem quais para valores de θ_M ? No tocante aos valores T_{BER} , eles são mais fidedignos? Os maiores desvios, Δ_{BER} , ocorrem para valores quais valores de θ_M ? Faça um gráfico comparativo incluindo duas curvas: $\Delta_{\text{LIN}} (\%)$ versus θ_M e $\Delta_{\text{BER}} (\%)$ versus θ_M . Assinale os pontos de cada curva e conecte-os com linhas retas formando assim uma curva ilustrativa. Discuta os resultados com base na análise dessas curvas.

Quadro 4: Dados experimentais com $m = \underline{\hspace{2cm}}$ kg, $L = 0,6 \text{ m}$ e $g = 9,8 \text{ m/s}^2$.

Amplitude angular: θ_M	Tempo cronometrado de 10 oscilações: t (s)	$T = t/10$ (s)	T_{LIN} (s)	Δ_{LIN} (%)	T_{BER} (s)	Δ_{BER} (%)
2°						
20°						
40°						

SUGESTÕES PARA REFERENCIAS

- Apostilas sobre teoria de erros (UFBA e UNICAMP) – Ver <http://physika.info>
- Livro de Física II – ex. Halliday, Resnick e Walker Vol. 2.
- Demais referências apontadas ao longo do roteiro – Ver <http://physika.info>.