

ANALISE DE CIRCUITOS ELÉTRICOS

J.R. Kaschny

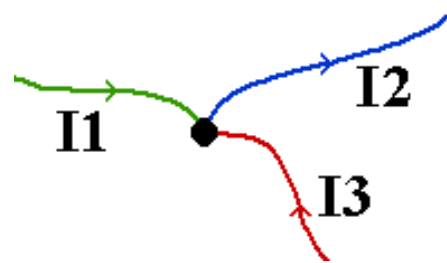
Leis de Kirchhoff

Lei dos Nós

O somatório de todas as correntes que entram e saem de um nó é nulo.

Nó em um circuito elétrico é qualquer ponto/junção por onde flui uma corrente elétrica.

Esta lei expressa a continuidade do fluxo de cargas elétricas!



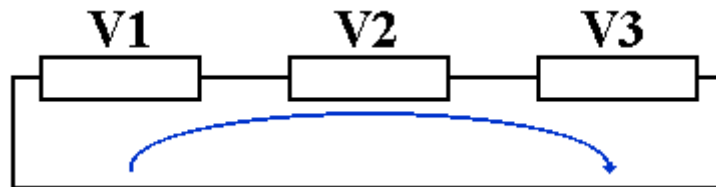
$$I_1 - I_2 + I_3 = 0$$

Lei das Malhas

O somatório de todas as quedas ou elevações de tensões em uma malha é nulo.

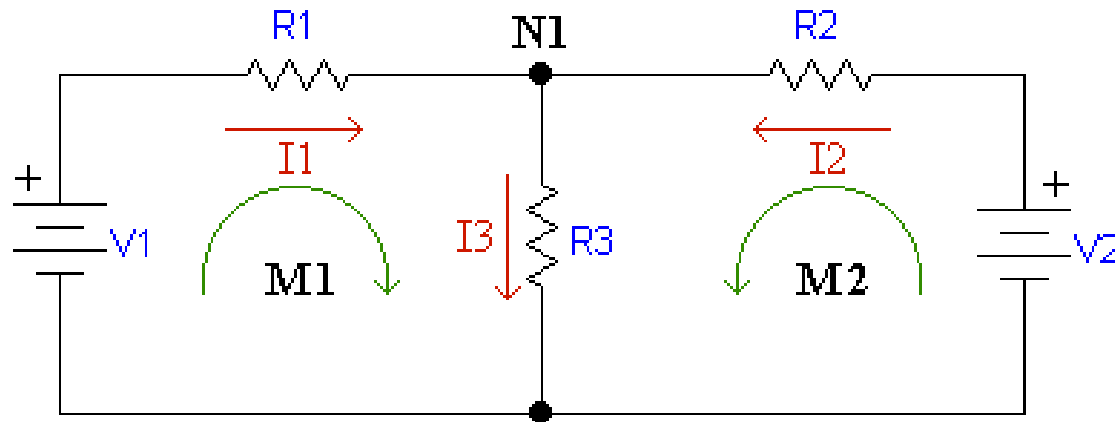
Malha ou laço em um circuito elétrico é qualquer caminho fechado por onde flui uma corrente.

Esta lei expressa a conservação de energia!



$$V_1 + V_2 + V_3 = 0$$

EXEMPLO:



$$\left\{ \begin{array}{l} \text{N1:} \\ \text{M1:} \\ \text{M2:} \end{array} \right. \begin{array}{l} I_1 + I_2 - I_3 = 0 \Rightarrow I_3 = I_1 + I_2 \\ V_1 - R_1 I_1 - R_3 I_3 = 0 \\ V_2 - R_2 I_2 - R_3 I_3 = 0 \end{array} \begin{array}{l} \nearrow \\ \nearrow \end{array} \text{com } V_{R_j} = R_j I_j \quad j \in \{1, 2, 3\}$$

$$\begin{array}{rcl} (R_1 + R_2)I_1 + R_3 I_2 & = & V_1 \\ R_3 I_1 + (R_2 + R_3)I_2 & = & V_2 \end{array}$$

como:

$$\Delta = \begin{vmatrix} (\mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_3) & \mathbf{R}_3 \\ \mathbf{R}_3 & (\mathbf{R}_2 + \mathbf{R}_3) \end{vmatrix} = \mathbf{R}_1\mathbf{R}_2 + \mathbf{R}_1\mathbf{R}_3 + \mathbf{R}_2\mathbf{R}_3$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} \mathbf{V}_1 & \mathbf{R}_3 \\ \mathbf{V}_2 & (\mathbf{R}_2 + \mathbf{R}_3) \end{vmatrix} = \mathbf{V}_1(\mathbf{R}_2 + \mathbf{R}_3) - \mathbf{V}_2\mathbf{R}_3$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} (\mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_3) & \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{R}_3 & \mathbf{V}_2 \end{vmatrix} = \mathbf{V}_2(\mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_3) - \mathbf{V}_1\mathbf{R}_3$$

portanto:

$$\mathbf{I}_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{\mathbf{V}_1(\mathbf{R}_2 + \mathbf{R}_3) - \mathbf{V}_2\mathbf{R}_3}{\mathbf{R}_1\mathbf{R}_2 + \mathbf{R}_1\mathbf{R}_3 + \mathbf{R}_2\mathbf{R}_3}$$

$$\mathbf{I}_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{\mathbf{V}_2(\mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_3) - \mathbf{V}_1\mathbf{R}_3}{\mathbf{R}_1\mathbf{R}_2 + \mathbf{R}_1\mathbf{R}_3 + \mathbf{R}_2\mathbf{R}_3}$$

$$\mathbf{I}_3 = \frac{\mathbf{V}_1\mathbf{R}_2 + \mathbf{V}_2\mathbf{R}_1}{\mathbf{R}_1\mathbf{R}_2 + \mathbf{R}_1\mathbf{R}_3 + \mathbf{R}_2\mathbf{R}_3}$$

LINEARIDADE

Um elemento linear é aquele elemento passivo que apresenta uma relação tensão-corrente linear.

Um circuito linear é aquele circuito composto inteiramente de fontes independentes, fontes dependentes lineares e elementos lineares.

Entendemos como fonte dependente linear toda a fonte dependente cuja magnitude seja uma função linear de alguma quantidade mensurável no circuito considerado. Se o parâmetro de controle for externo, esta fonte constituirá uma variável independente.

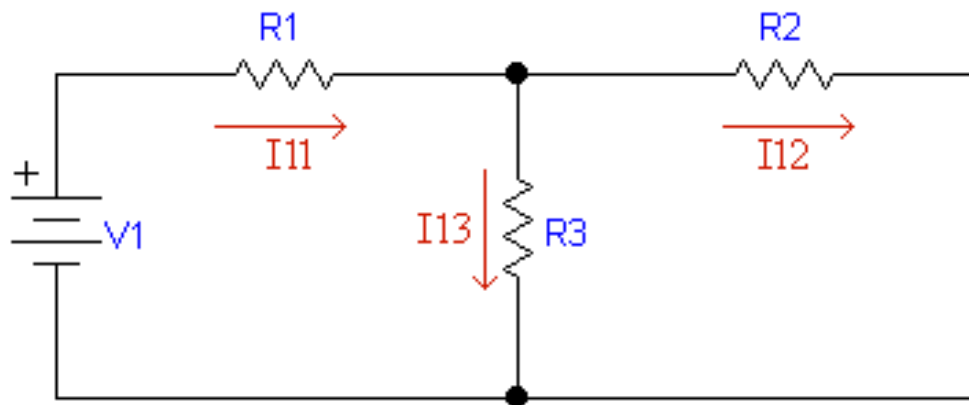
Exemplo: ... um resistor, onde $V = R.I$ (Lei de Ohm)

SUPERPOSIÇÃO

A corrente em qualquer elemento linear, ou a tensão através de qualquer elemento linear, de um circuito linear, é a soma das correntes ou tensões produzidas separadamente por cada fonte de energia (fonte de corrente ou tensão).

EXEMPLO: Considerando o circuito anterior, vamos novamente determinar as correntes.

1º Passo: Substituindo V_2 por um curto circuito!



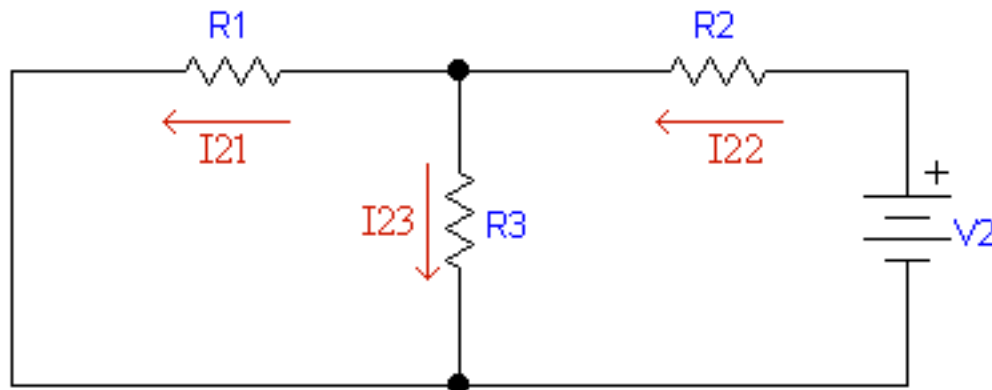
$$I_{11} = V_1 / (R_1 + R_2 // R_3)$$

$$I_{12} = [R_3 / (R_2 + R_3)] \cdot I_{11}$$

$$I_{13} = [R_2 / (R_2 + R_3)] \cdot I_{11}$$

$$\text{onde: } R_2 // R_3 = \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}$$

2º Passo: Substituindo V_1 por um curto circuito!



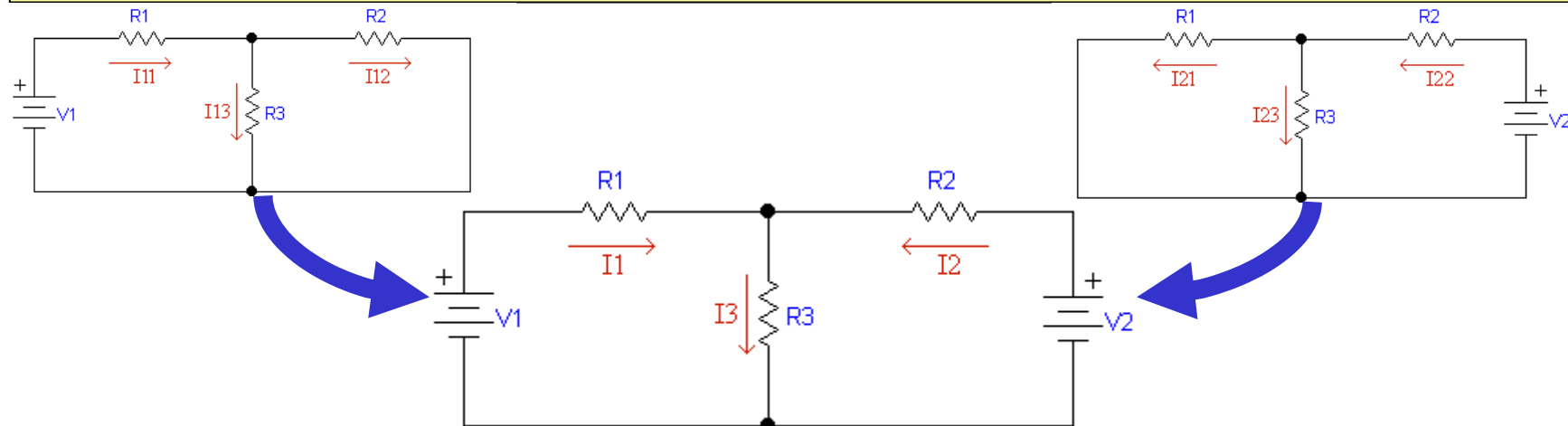
$$I_{22} = V_2 / (R_2 + R_1 // R_3)$$

$$I_{21} = [R_3 / (R_1 + R_3)] \cdot I_{22}$$

$$I_{23} = [R_1 / (R_1 + R_3)] \cdot I_{22}$$

$$\text{onde: } R_1 // R_3 = \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3}$$

3º Passo: Aplicando a superposição!



$$I_1 = I_{11} - I_{21}$$

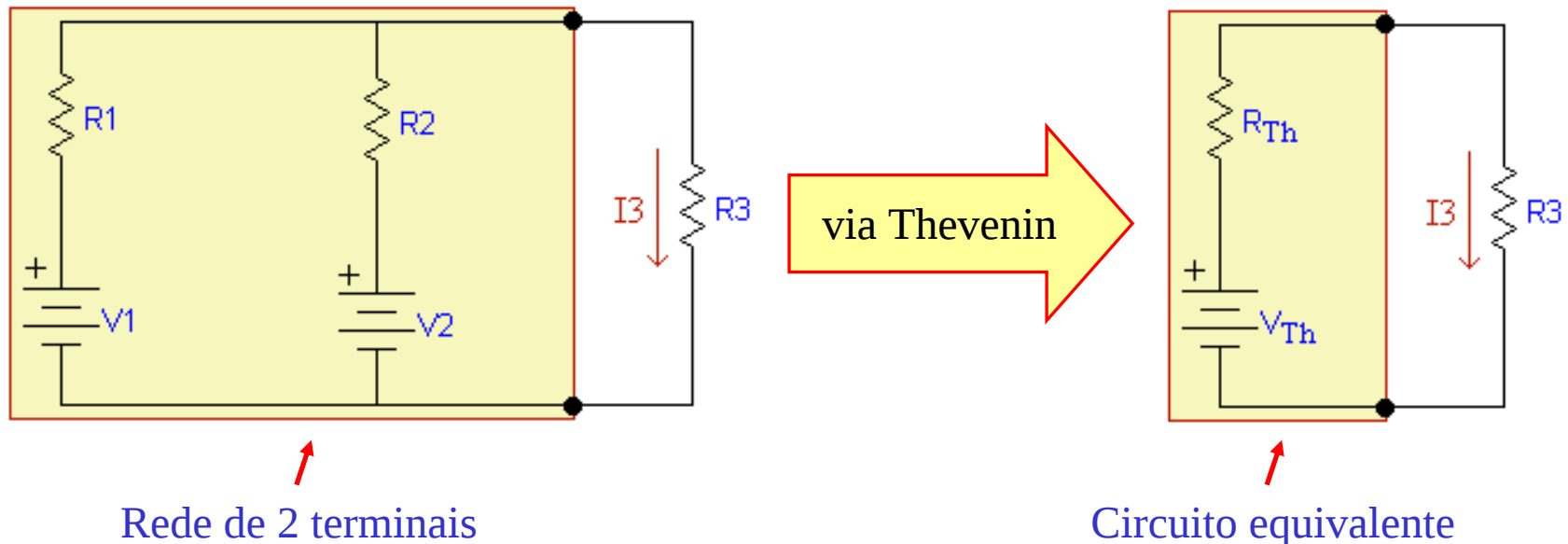
$$I_2 = I_{22} - I_{12}$$

$$I_3 = I_{13} + I_{23}$$

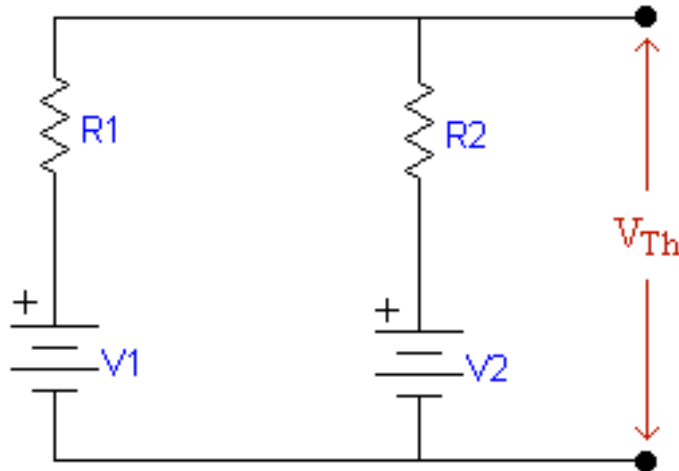
TEOREMA DE THEVENIN

Qualquer circuito linear de dois terminais, ou seja, um circuito que pode ser reduzido a um dipolo, contendo fontes de tensão e/ou corrente, pode ser representado por um circuito equivalente composto por uma fonte de tensão, com tensão igual a do circuito em aberto, em série com uma resistência de valor igual a resistência equivalente medida no circuito original.

EXEMPLO: Considerando o circuito original, vamos determinar a corrente I_3 .



1º Passo: Calculando V_{Th} !



$$V_{Th} = V_2 + R_2 I'_{R2}$$

$$V_1 - R_1 I'_{R1} - R_2 I'_{R2} - V_2 = 0$$

$$\text{com } I'_{R1} = I'_{R2} = I'$$

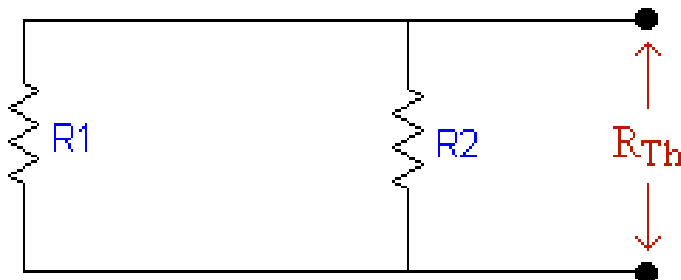
$$V_1 - V_2 = (R_1 + R_2) \cdot I' \Rightarrow I' = \frac{V_1 - V_2}{R_1 + R_2}$$

$$\Rightarrow V_{Th} = V_2 + R_2 \cdot \frac{V_1 - V_2}{R_1 + R_2}$$

$\Rightarrow$

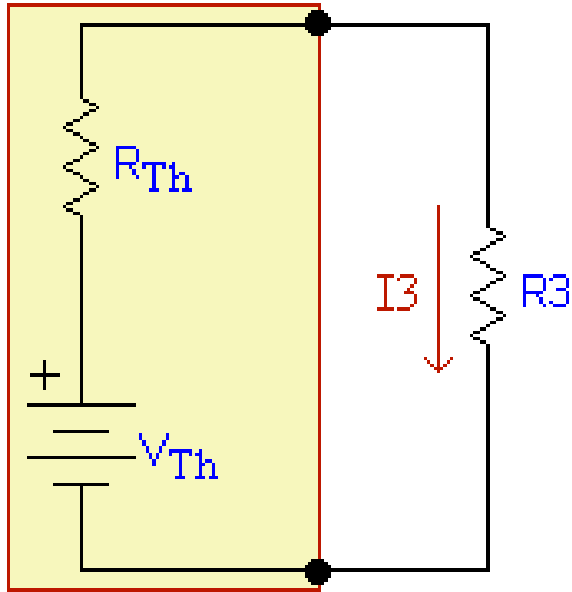
$$V_{Th} = \frac{V_2 R_1 + V_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

2º Passo: Calculando R_{Th} !



$$R_{Th} = R_1 // R_2 = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

3º Passo: Calculando I_3 !



$$V_{Th} - R_{Th} I_3 - R_3 I_3 = 0$$

$$\left[\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + R_3 \right] \cdot I_3 = \frac{V_2 R_1 + V_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

$$\left[\frac{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}{R_1 + R_2} \right] \cdot I_3 = \frac{V_2 R_1 + V_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

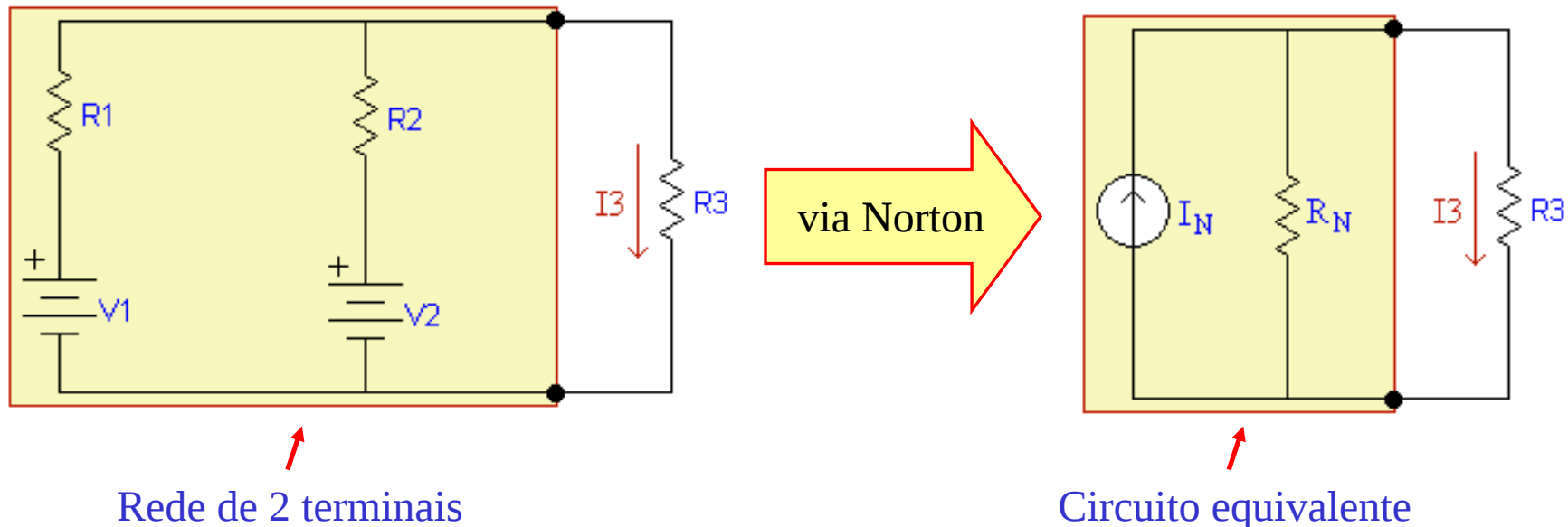
$$\Rightarrow I_3 = \frac{V_2 R_1 + V_1 R_2}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}$$

Que constitui o mesmo resultado obtido inicialmente!

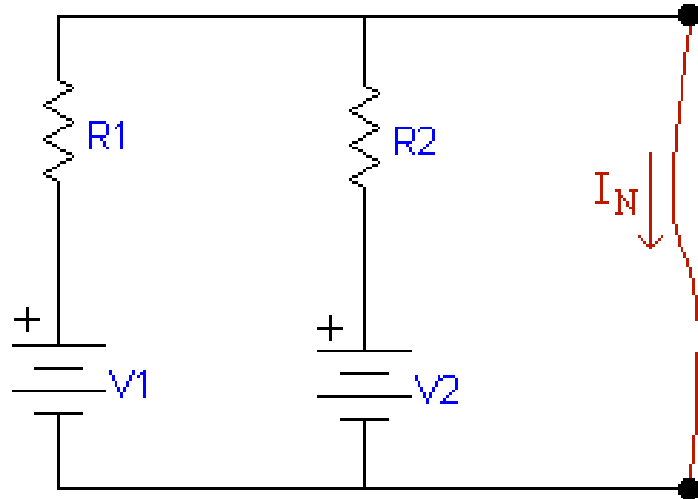
TEOREMA DE NORTON

Qualquer circuito linear de dois terminais, ou seja, um circuito que pode ser reduzido a um dipolo, contendo fontes de tensão e/ou corrente, pode ser representado por um circuito equivalente composto por uma fonte de corrente, com corrente igual a corrente de curto circuito, em paralelo com uma resistência de valor igual a resistência equivalente medida no circuito original.

EXEMPLO: Considerando o circuito original, vamos novamente determinar a corrente I_3 .



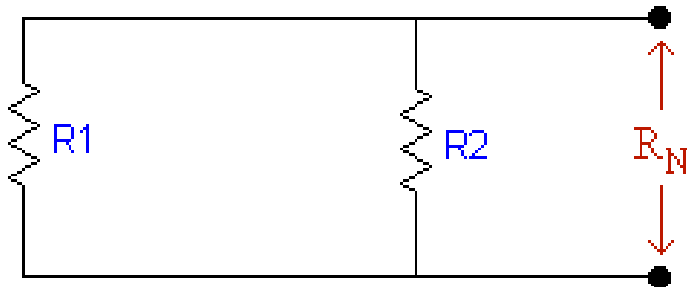
1º Passo: Calculando V_N !



$$I_N = I'_{R1} + I'_{R2} = \frac{V_1}{R_1} + \frac{V_2}{R_1}$$

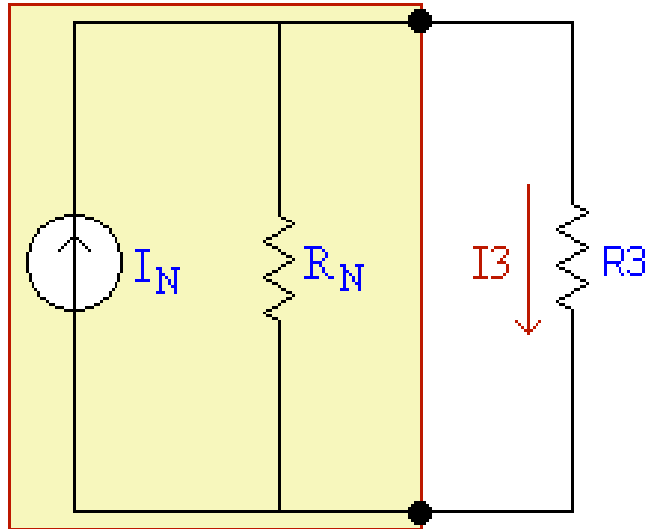
$$\Rightarrow I_N = \frac{V_1 R_2 + V_2 R_1}{R_1 + R_2}$$

2º Passo: Calculando R_N !



$$R_N = R_1 // R_2 = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

3º Passo: Calculando I_3 !



$$I_3 = \frac{R_N}{R_N + R_3} I_N$$

$$I_3 = \left[\frac{\left(\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \right)}{\left(\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \right) + R_3} \right] \cdot \left(\frac{V_1 R_2 + V_2 R_1}{R_1 + R_2} \right)$$

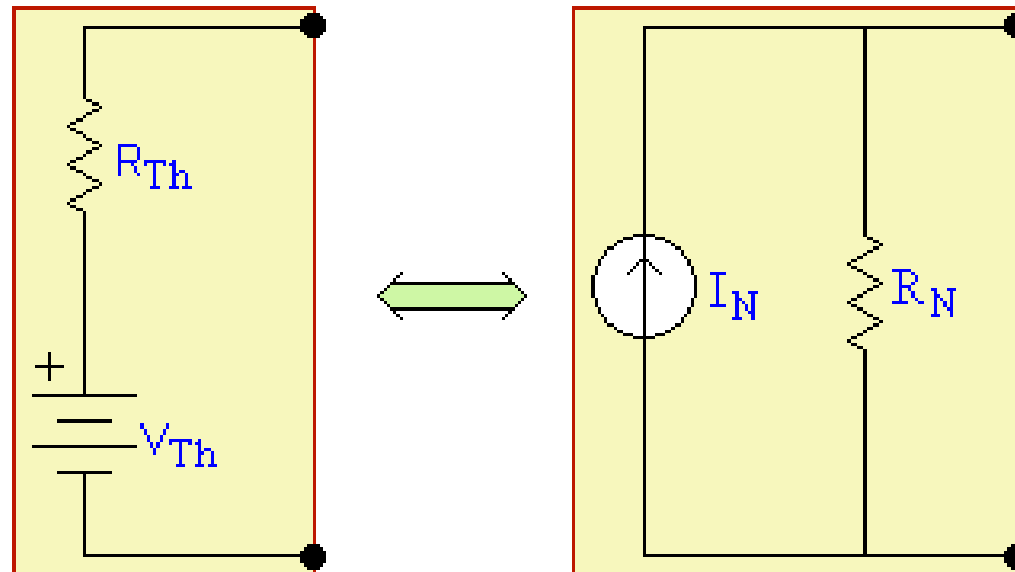
$$\Rightarrow I_3 = \frac{V_2 R_1 + V_1 R_2}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}$$

Que também constitui o mesmo resultado obtido inicialmente!

EQUIVALÊNCIA ENTRE THEVENIN E NORTON

Via as definições de V_{Th} , R_{Th} , I_N e R_N , é possível constatar facilmente a íntima relação entre ambos os teoremas, onde:

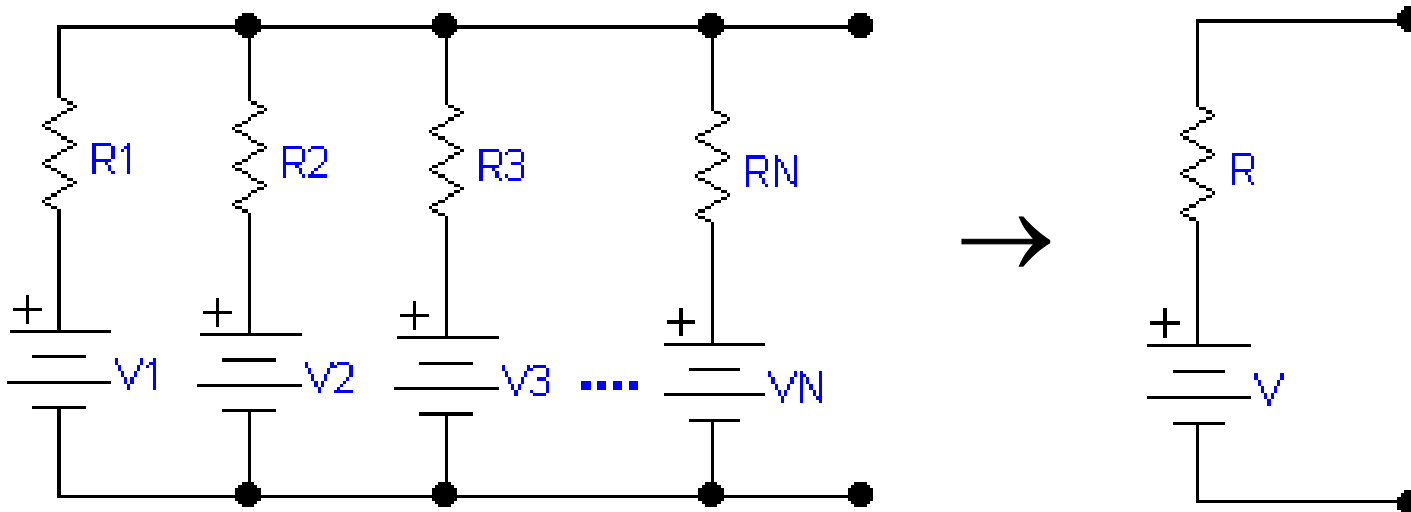
$$R_{Th} = R_N = R \quad \text{e} \quad I_N = \frac{V_{Th}}{R}$$



TEOREMA DE MILLMAN

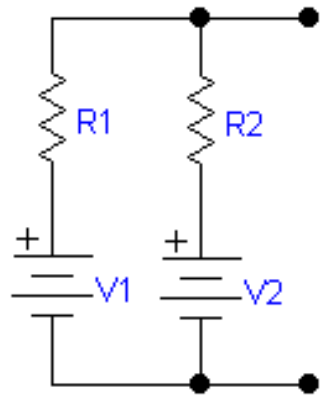
Um conjunto de N fontes de tensão, V_n ($n=1,2,3, \dots, N$), associadas em paralelo, cada qual com uma resistência interna R_n , pode ser representado por uma única fonte de tensão V em serie com um resistor R , tal que:

$$V = \frac{\sum_{n=1}^N V_n / R_n}{1/R} \quad \frac{1}{R} = \sum_{n=1}^N \frac{1}{R_n}$$



Demonstrando este teorema via indução, temos:

(i) Já que $N = 1$ é obviamente valido, vamos demonstrar o caso $N = 2$!

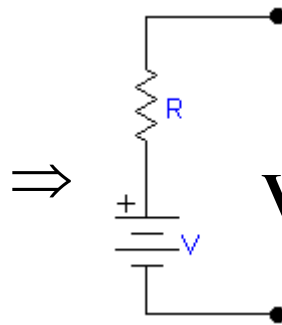
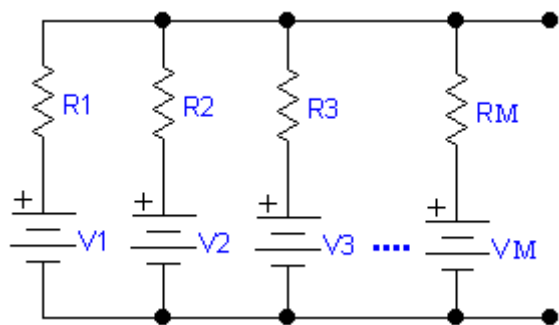


Determinando o circuito equivalente Thevenin, temos:

$$R_{Th} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = R \quad \text{e} \quad V_{Th} = \frac{V_1 R_2 + V_2 R_1}{R_1 + R_2} = V$$

$$\Rightarrow V = \left(\frac{V_1 R_2 + V_2 R_1}{R_1 + R_2} \right) \cdot \left(\frac{1/R_1 R_2}{1/R_1 R_2} \right) = \frac{V_1/R_1 + V_2/R_2}{1/R} \quad \checkmark \text{OK!}$$

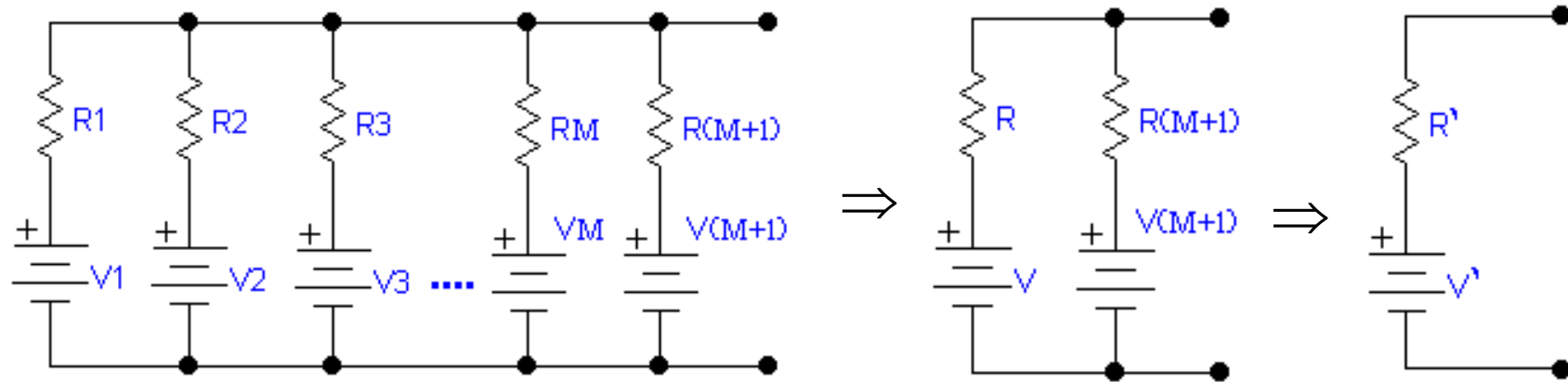
(ii) Supondo que para $N = M$ o teorema é valido



$$V = \frac{\sum_{n=1}^M V_n / R_n}{1/R}$$

$$\frac{1}{R} = \sum_{n=1}^M \frac{1}{R_n}$$

(iii) Vamos mostrar que para $N = M+1$ o teorema também é valido



Aplicando novamente o teorema de Thevenin, temos:

$$R_{Th} = \frac{R R_{M+1}}{R + R_{M+1}} = \left(\sum_{n=1}^{M+1} \frac{1}{R_n} \right)^{-1} = R' \quad \text{e} \quad V_{Th} = \frac{V R_{M+1} + V_{M+1} R}{R + R_{M+1}} = V'$$

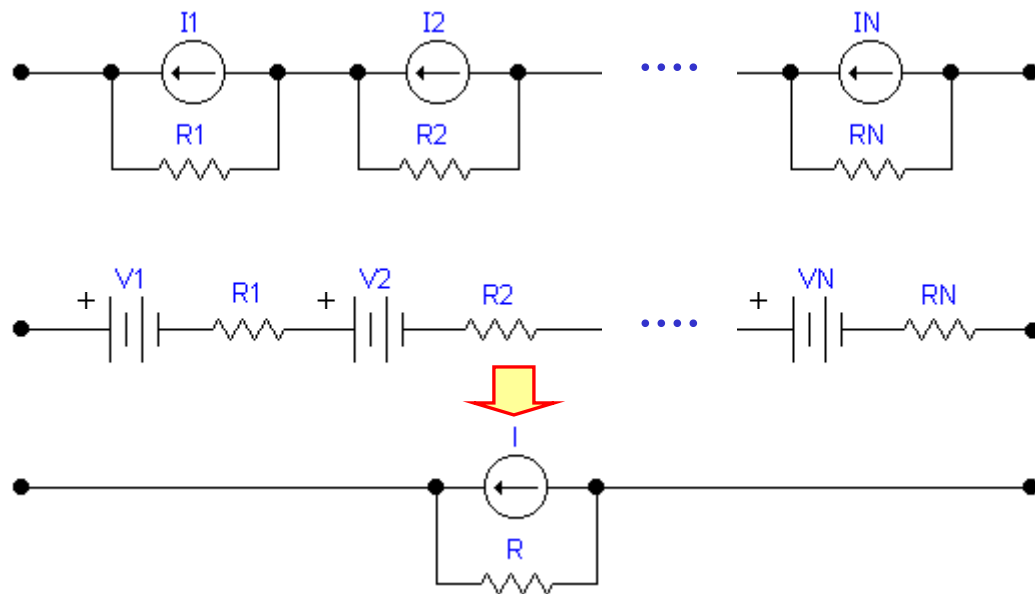
$$\Rightarrow V' = \left(\frac{V R_{M+1} + V_{M+1} R}{R + R_{M+1}} \right) \cdot \left(\frac{1/R R_{M+1}}{1/R R_{M+1}} \right) = \frac{V/R + V_{M+1}/R_{M+1}}{1/R'}$$

$$\Rightarrow V' = \frac{\sum_{n=1}^{M+1} V_n / R_n}{1/R'} \quad \checkmark \text{OK!}$$

DUAL DO TEOREMA DE MILLMAN

Um conjunto de N fontes de tensão, I_n ($n=1,2,3, \dots, N$), associadas em serie, cada qual com uma resistência interna R_n , pode ser representado por uma única fonte de corrente I em paralelo com um resistor R , tal que:

$$I = \frac{\sum_{n=1}^N I_n R_n}{R} \quad R = \sum_{n=1}^N R_n$$



via o teorema de Thevenin

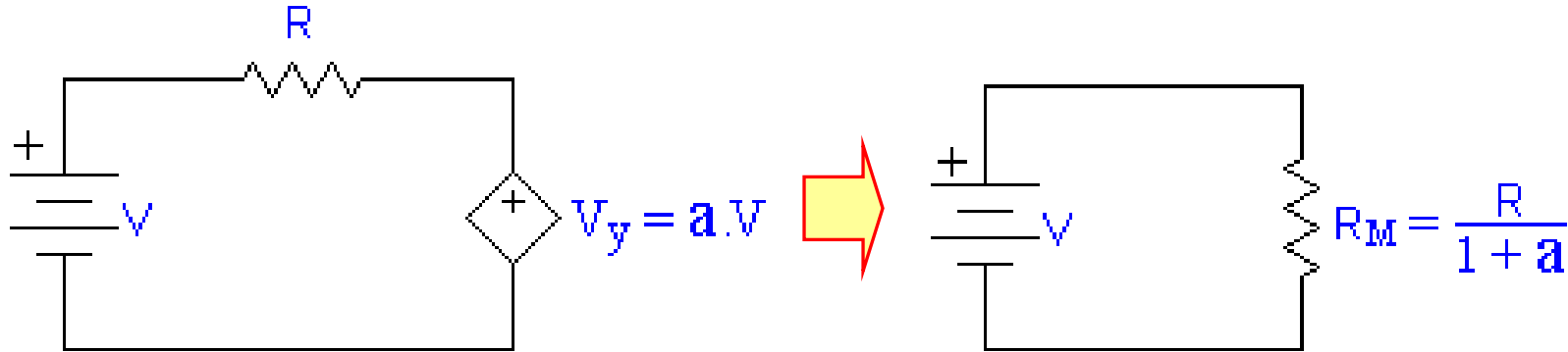
$$V_n = I_n \cdot R_n \quad n \in \{1, 2, \dots, N\}$$

$$\Rightarrow V = \sum_{n=1}^N I_n \cdot R_n \quad R = \sum_{n=1}^N R_n$$

e via o teorema de Norton obtemos o resultado final, tal como anunciado.

TEOREMA DE MILLER

O teorema de Miller estabelece que, analisando o circuito abaixo (esq.), obteremos:



Analisando o circuito original, temos:

$$V = R.I - V_y = R.I - a.V \Rightarrow V.(1 + a) = R.I$$

$$\Rightarrow V/I = R_M \text{ com } R_M = R/(1 + a)$$

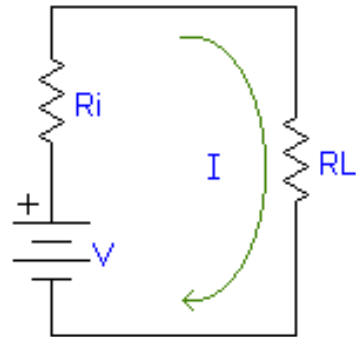
ou seja:

“A resistência aparente de circuito, olhado sob o ponto de vista da fonte V , é $(1 + a)$ vezes menor que o valor do elemento resistivo realmente presente.”

- Este é o chamado **Efeito Miller** -

MÁXIMA TRANFERENCIA DE POTÊNCIA

A máxima potência é transferida de uma fonte quando a resistência de carga, R_L , é igual a resistência interna, R_i , da fonte.



$$I = \frac{V}{R_i + R_L} \quad V_{RL} = \frac{V \cdot R_L}{R_i + R_L}$$

$$\Rightarrow P_{RL} = I \cdot V_{RL} = V^2 \cdot \frac{R_L}{(R_i + R_L)^2}$$

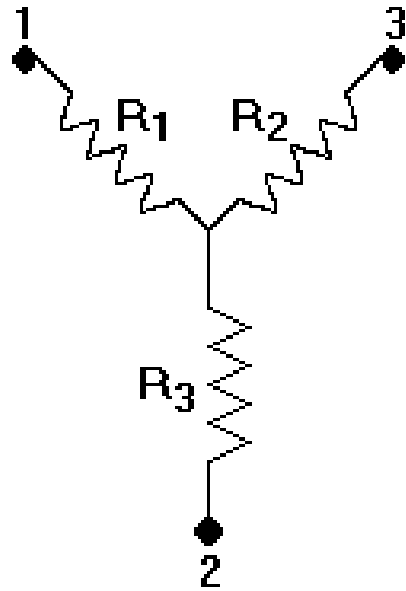
$$\frac{dP_{RL}}{dR_L} = \frac{V^2}{(R_i + R_L)^2} \cdot \left[1 - \frac{R_L}{R_i + R_L} \right] = 0 \quad \text{quando} \quad R_L = R_i$$

$$\left. \frac{d^2 P_{RL}}{dR_L^2} \right|_{R_L=R_i} = \frac{V^2}{R_i^3} \cdot \left[\frac{6}{16} - \frac{4}{8} \right] < 0 \quad \Rightarrow R_L = R_i \text{ é de fato um máximo!}$$

No presente caso, teremos ainda: $P_{RL} = V^2/4 \cdot R_i$ e $P_{\text{fonte}} = V^2/2 \cdot R_i$

Portanto o rendimento será $\eta = P_{RL}/P_{\text{fonte}} = 50\%$

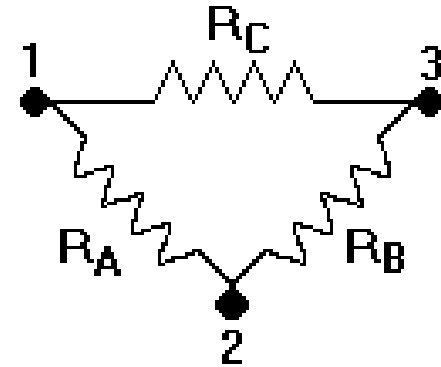
Transformação $Y \leftrightarrow \Delta$



$$R_{12} = R_1 + R_3 = \frac{R_A(R_B + R_C)}{R_A + R_B + R_C}$$

$$R_{13} = R_1 + R_2 = \frac{R_C(R_A + R_B)}{R_A + R_B + R_C}$$

$$R_{23} = R_2 + R_3 = \frac{R_B(R_A + R_C)}{R_A + R_B + R_C}$$



$$\Delta \rightarrow Y \left\{ \begin{array}{l} R_1 = \frac{R_A R_C}{R_A + R_B + R_C} \\ R_2 = \frac{R_B R_C}{R_A + R_B + R_C} \\ R_3 = \frac{R_A R_B}{R_A + R_B + R_C} \end{array} \right.$$

$$Y \rightarrow \Delta \left\{ \begin{array}{l} R_A = \frac{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}{R_2} \\ R_B = \frac{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}{R_1} \\ R_C = \frac{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}{R_3} \end{array} \right.$$

Referencias bibliográficas

- Análise de Circuitos em Engenharia, William H. Hayt e Jack E. Kemmerly, editora McGraw-Hill do Brasil (1973).
- Circuitos Elétricos, Robert A. Bartkowiak, Makron Books do Brasil, Brasil (1999).
- Análise de Circuitos Elétricos, Victor da Fonte Dias, Instituto Superior Técnico - IFR, disponível em http://www.estg.ipleiria.pt/~lneves/ce_eic/capa.htm, Portugal (1996/97).