

ANALISE DE CIRCUITOS DE 1ª E 2ª ORDENS

J.R. Kaschny

Introdução

As características tensão-corrente do capacitor e do indutor introduzem as equações diferenciais na análise dos circuitos elétricos.

As Leis de Kirchhoff e as características tensão-corrente dos elementos conduzem, em conjunto, a uma equação diferencial linear, cuja solução define a dinâmica temporal das variáveis corrente e tensão elétrica nos diversos componentes do circuito.

De acordo com a ordem e as características da equação diferencial obtida, classifica-se os circuitos, e as respectivas soluções, de acordo com:

ORDEM DA EQUAÇÃO

Circuitos de 1ª ordem (Ex. RL, RC) → Equação Linear de 1ª ordem

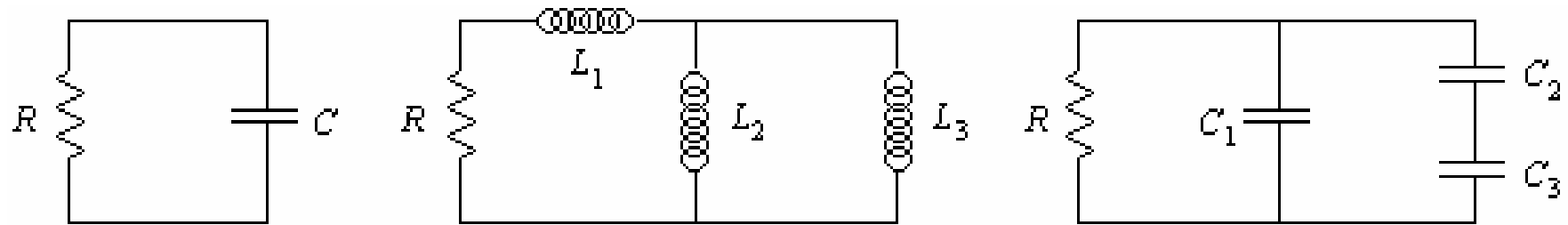
Circuitos de 2ª ordem (Ex. RLC) → Equação Linear de 2ª ordem

TIPO DA SOLUÇÃO

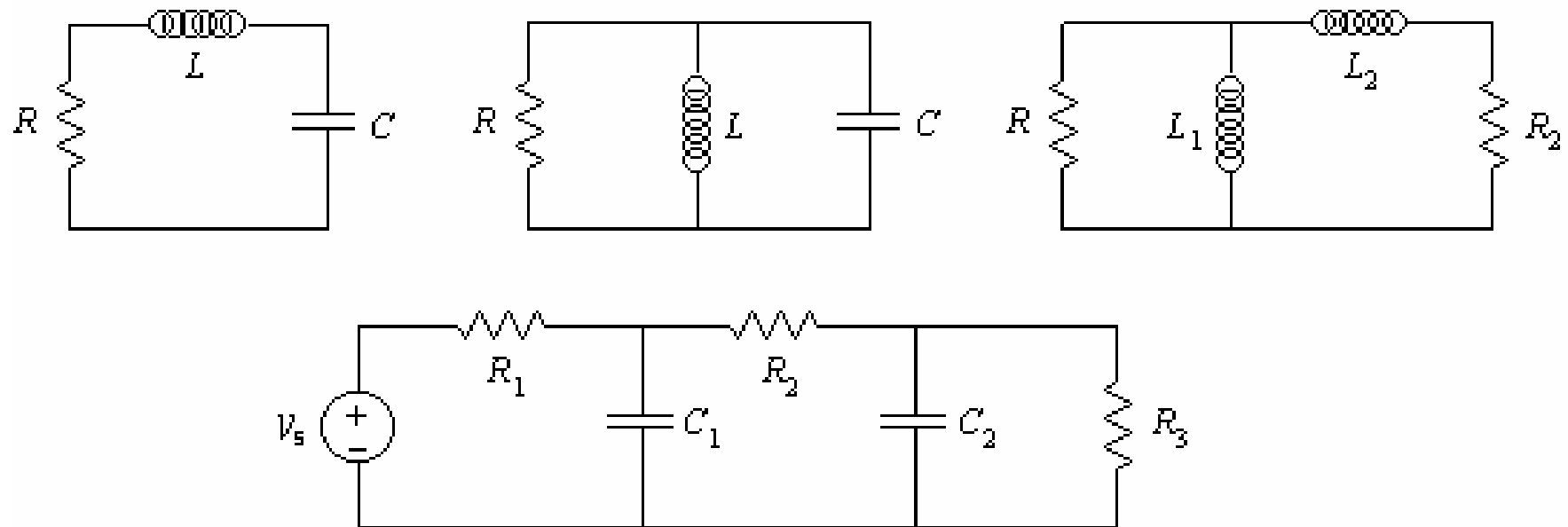
Solução Natural → Equações Diferenciais Lineares Homogêneas

Solução Forçada → Equações Diferenciais Lineares não-Homogêneas

EXEMPLOS DE CIRCUITOS DE 1ª ORDEM



EXEMPLOS DE CIRCUITOS DE 2ª ORDEM



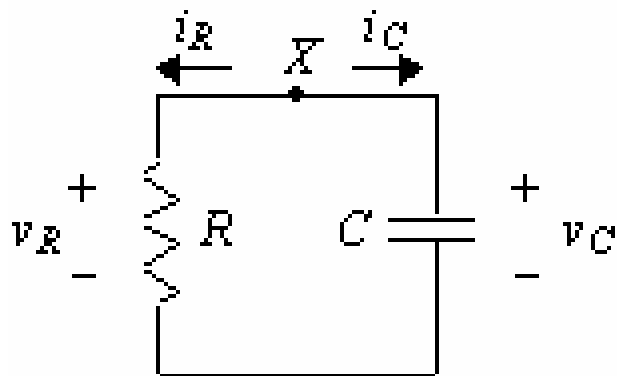
Circuitos de 1ª ordem

SOLUÇÃO NATURAL

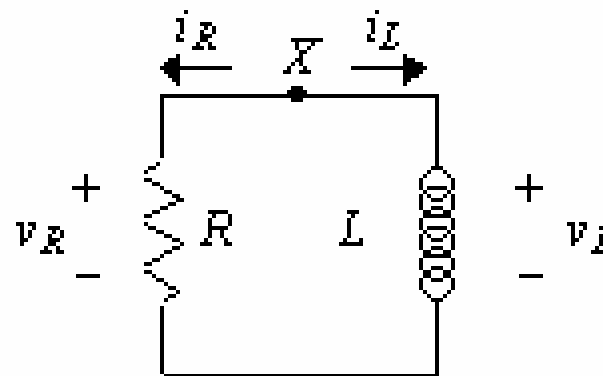
Designa-se por regime, solução ou resposta natural a dinâmica temporal de um circuito excitado pelas energias armazenadas nos capacitores e nas indutores que o constituem.

Ao contrário dos circuitos puramente resistivos, nos quais a ausência de fontes independentes determina o valor nulo das correntes e das tensões no mesmo, os circuitos RC , RL e RLC sem fontes independentes podem apresentar dinâmicas não nulas como resultado das energias elétrica e magnética inicialmente armazenadas nos condensadores e nas bobinas.

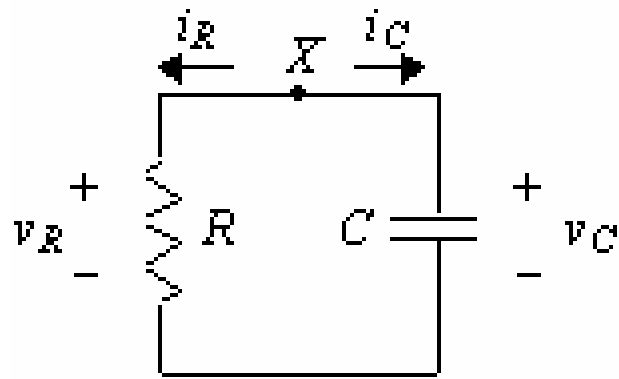
Consideremos os circuitos RC e RL ilustrados abaixo:



(a)



(b)

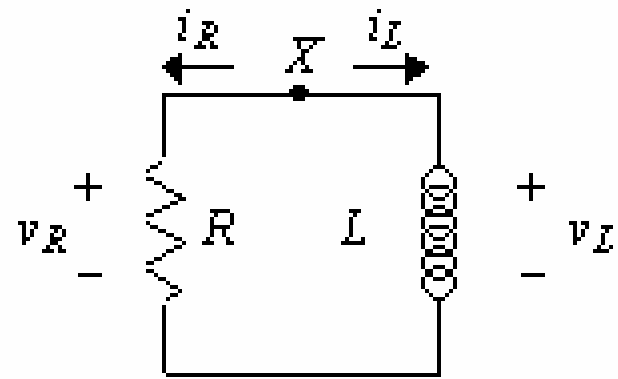


(a)

$$i_C(t) + i_R(t) = 0$$

$$i_R = v_R/R \text{ e } i_C = C \cdot dv_C/dt$$

$$\frac{dv_C(t)}{dt} + \frac{1}{RC} v_C(t) = 0$$



(b)

$$v_L(t) - v_R(t) = 0$$

$$v_R = Ri_R \text{ e } v_L = L \cdot di_L/dt$$

$$\frac{di_L(t)}{dt} + \frac{R}{L} i_L(t) = 0$$

ou seja, obtemos equações diferenciais do tipo:

$$\boxed{\frac{dx(t)}{dt} + \frac{1}{\tau} x(t) = 0} \rightarrow \begin{cases} \tau = RC \text{ (circuito RC)} \\ \tau = L/R \text{ (circuito RL)} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{dx(t)}{dt} = -\frac{1}{\tau} x(t) \quad \Rightarrow \quad \frac{dx(t)}{x(t)} = -\frac{1}{\tau} dt$$

$$\Rightarrow \int \frac{dx(t)}{x(t)} = -\frac{1}{\tau} \int dt \quad \Rightarrow \quad \ln[x(t)] = -\frac{1}{\tau} t + B$$

$$\Rightarrow \boxed{x(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau}}} \quad \text{ou seja} \quad \begin{cases} v_C(t) = Ae^{-\frac{t}{RC}} \\ i_L(t) = Ae^{-\frac{Rt}{L}} \end{cases}$$

A imposição da condição de continuidade da energia elétrica armazenada num capacitor, equivale a exigir a continuidade da tensão aos terminais respectivos, ou seja:

$$\frac{1}{2} C v_C^2(t^+) = \frac{1}{2} C v_C^2(t^-) \Rightarrow v_C(t^+) = v_C(t^-)$$

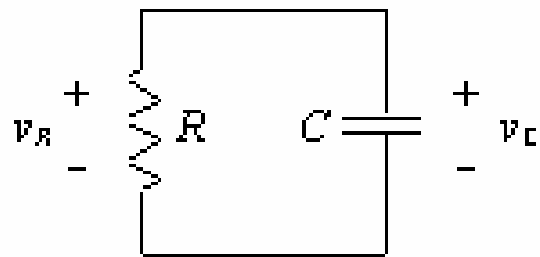
A continuidade da energia magnética armazenada num indutor, equivale a impor a continuidade da corrente, ou seja:

$$\frac{1}{2} L i_L^2(t^+) = \frac{1}{2} L i_L^2(t^-) \Rightarrow i_L(t^+) = i_L(t^-)$$

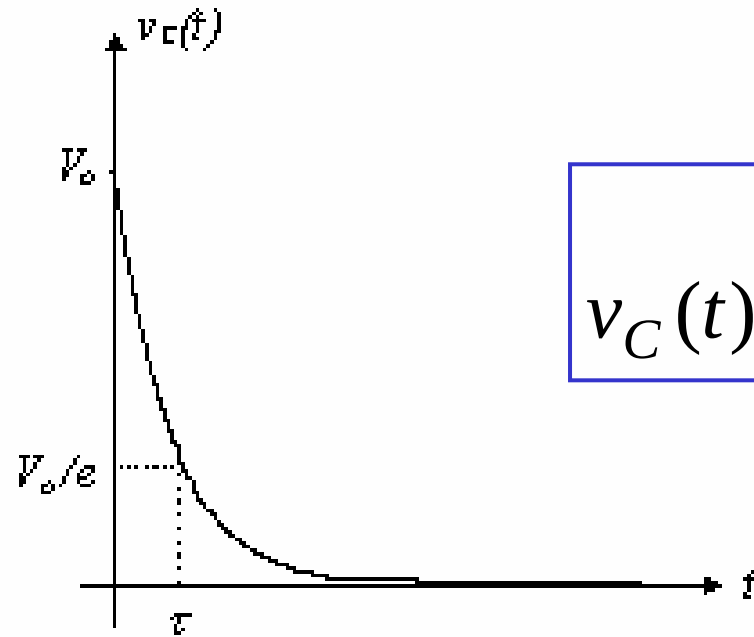
Com a finalidade de determinarmos a constante que surge na solução da equação diferencial, admitamos as condições iniciais:

$$t=0 \rightarrow v_C(t=0)=V_o \quad \text{e} \quad i_L(t=0)=I_o$$

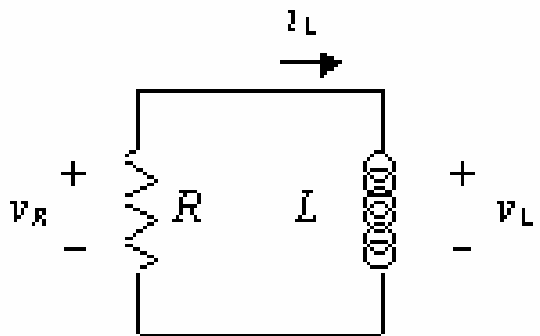
Assim obtemos:



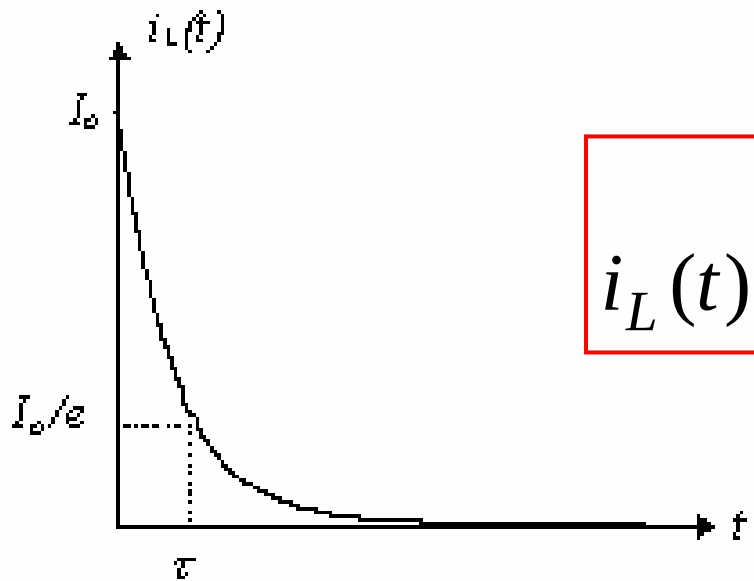
(a)



$$v_C(t) = V_0 e^{-\frac{t}{RC}}$$

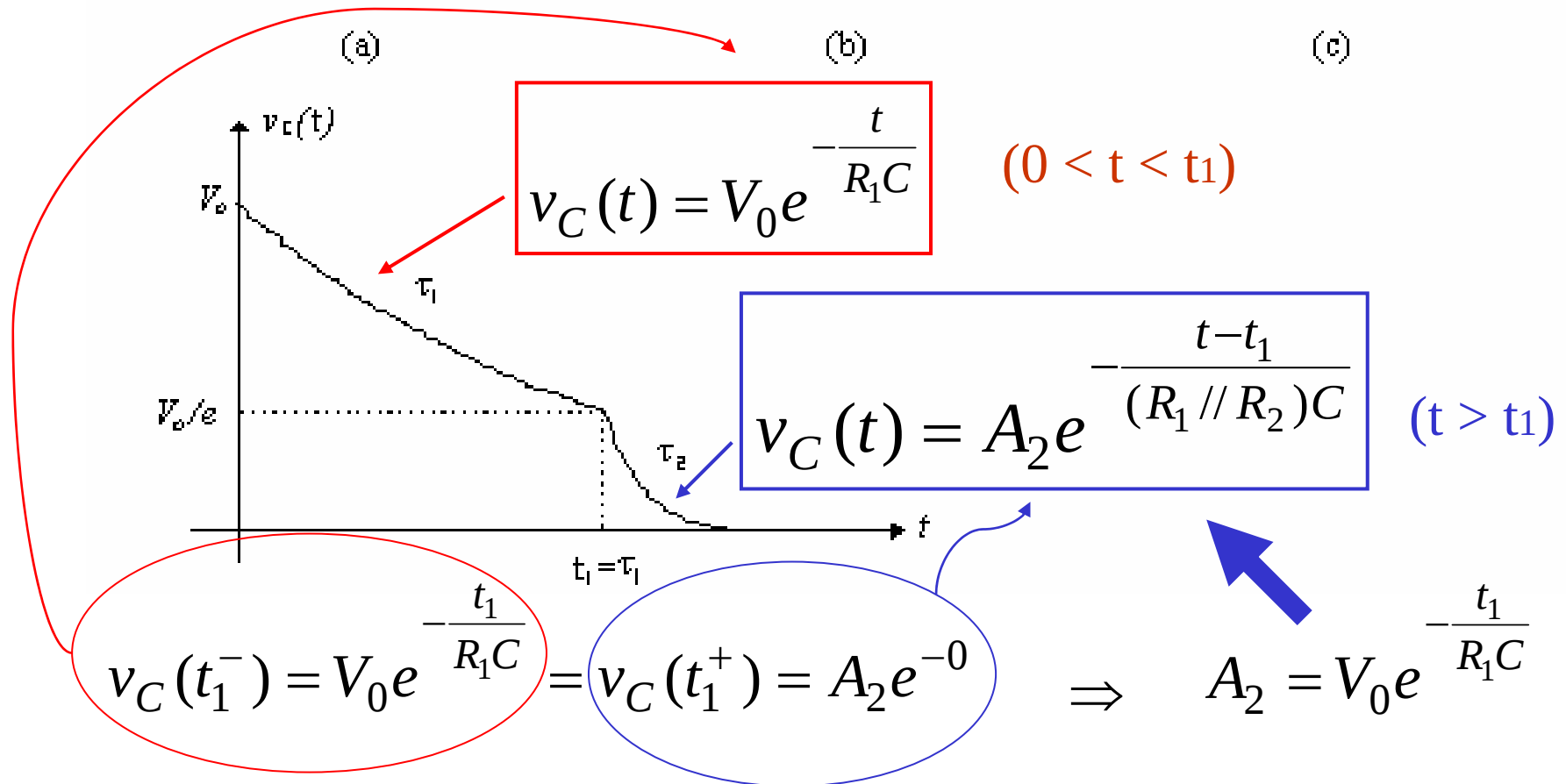
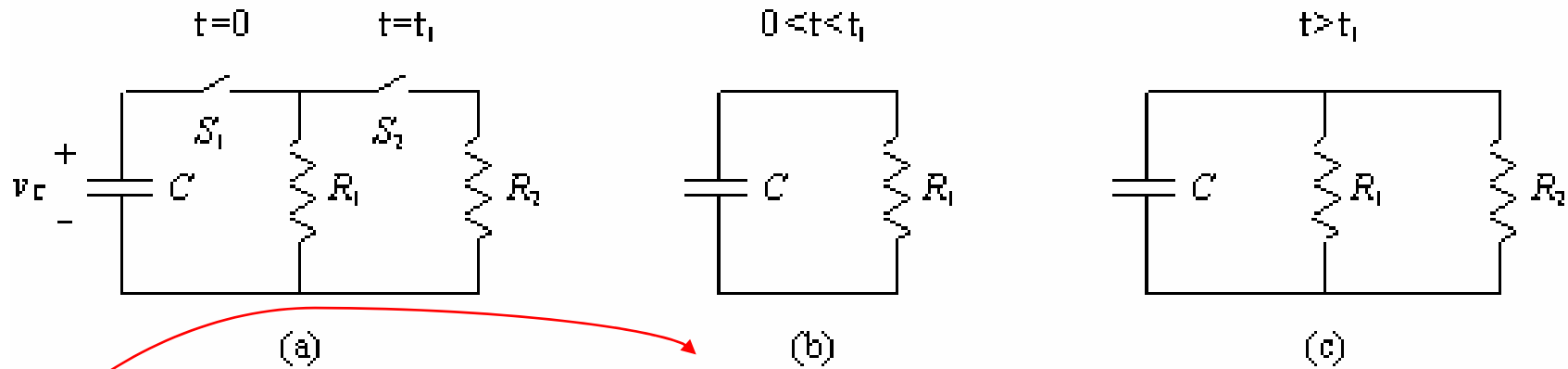


(b)

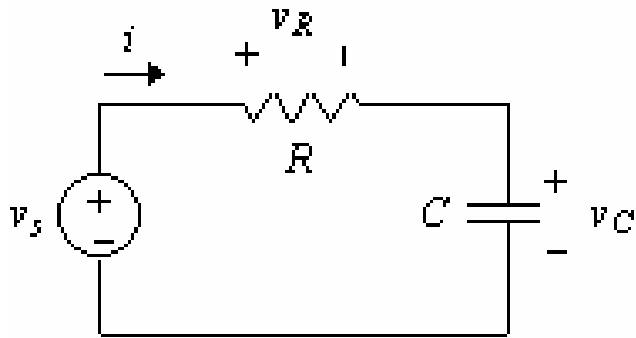


$$i_L(t) = I_0 e^{-\frac{R}{L}t}$$

SOLUÇÃO NATURAL COMUTADA



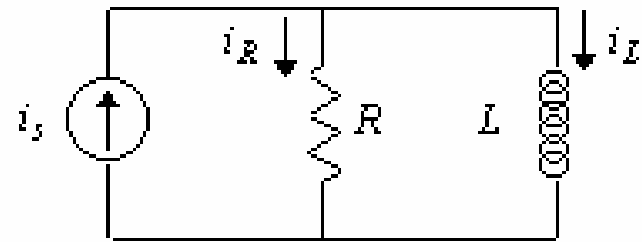
SOLUÇÃO FORÇADA



(a)

$$v_R(t) + v_C(t) = v_s(t)$$

$$\frac{dv_C(t)}{dt} + \frac{1}{RC}v_C(t) = \frac{1}{RC}v_s(t)$$



(b)

$$i_R(t) + i_L(t) = i_s(t)$$

$$\frac{di_L(t)}{dt} + \frac{R}{L}i_L(t) = \frac{R}{L}i_s(t)$$

$$\frac{dx(t)}{dt} + \frac{1}{\tau}x(t) = \frac{1}{\tau}y(t)$$

$$\frac{dx(t)}{dt} + \frac{1}{\tau} x(t) = \frac{1}{\tau} y(t) \quad \left[\times \mathbf{e}^{t/\tau} \right]$$

$$\Rightarrow \left[\frac{dx(t)}{dt} + \frac{1}{\tau} x(t) \right] e^{t/\tau} = \frac{1}{\tau} y(t) e^{t/\tau}$$

$$\text{como} \quad \left[\frac{dx(t)}{dt} + \frac{1}{\tau} x(t) \right] e^{t/\tau} = \frac{d}{dt} \left[x(t) e^{t/\tau} \right]$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \left[x(t) e^{t/\tau} \right] = \frac{1}{\tau} y(t) e^{t/\tau}$$

$$\Rightarrow x(t) e^{t/\tau} = \frac{1}{\tau} \int y(t) e^{t/\tau} dt + A$$

$$\Rightarrow x(t)e^{t/\tau} = \frac{1}{\tau} \int y(t)e^{t/\tau} dt + A$$

$$x(t) = \frac{e^{-t/\tau}}{\tau} \int y(t)e^{t/\tau} dt + Ae^{-t/\tau}$$

Solução Particular da Equação não Homogênea

($y(t)$ é usualmente chamada excitação)

Solução Geral da Equação Homogênea Associada

Por exemplo, consideremos um excitação senoidal,
ou seja:

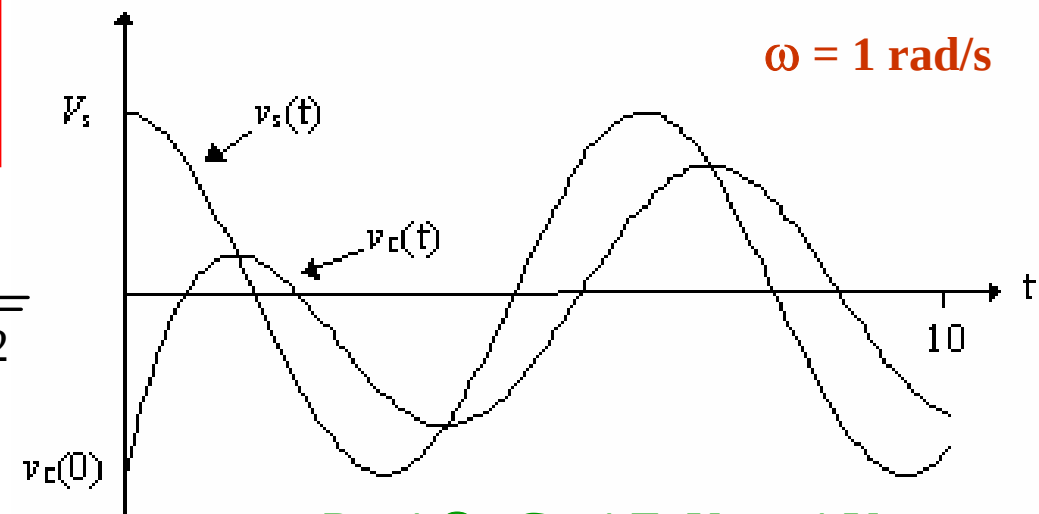
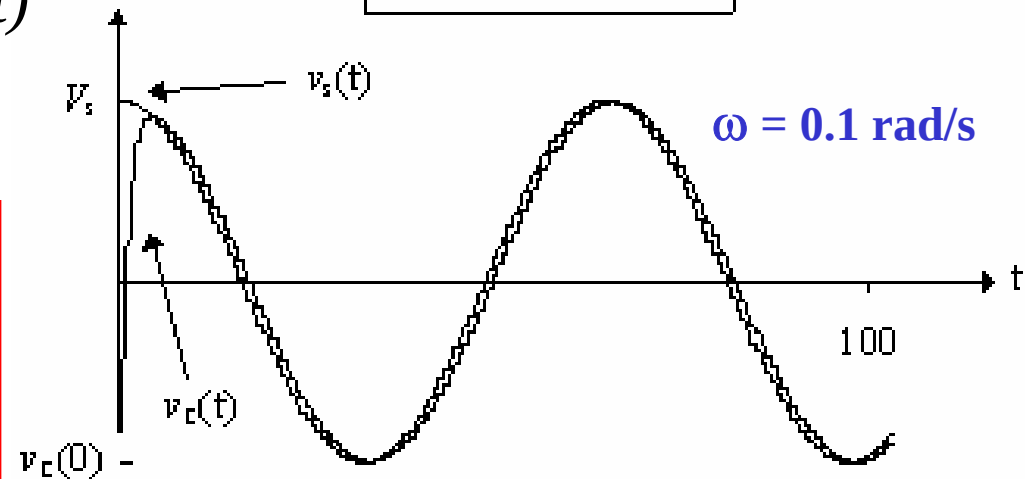
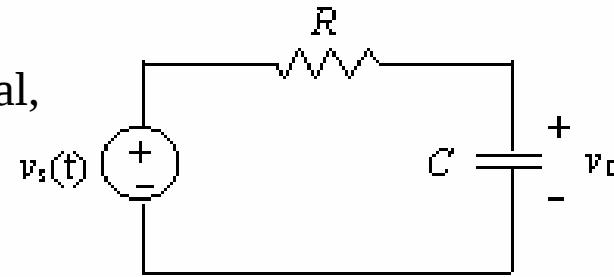
$$y(t) \rightarrow v_s(t) = V_s \cdot u(t) \cdot \cos(\omega \cdot t)$$

$$C. Inicial \rightarrow v_c(t=0) = V_0$$

$$v_C(t) = Ae^{-t/RC} + \frac{V_s \cos(\omega t - \phi)}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}}$$

onde $A = V_0 - \frac{\cos(\phi)}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}}$

$$\phi = \arctg(\omega RC)$$



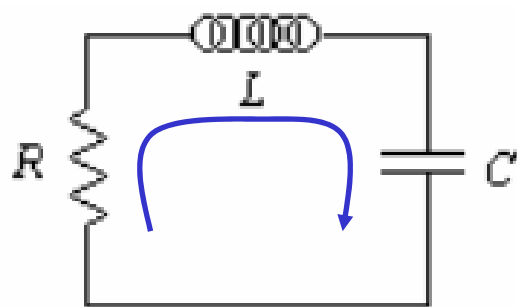
$$R = 1 \Omega \quad C = 1 \text{ F} \quad V_0 = -1 \text{ V}$$

Circuitos de 2ª ordem

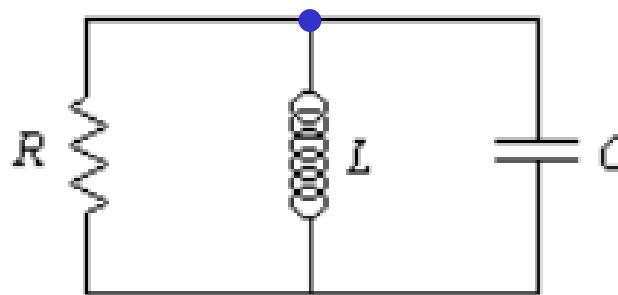
Um circuito é dito de 2.ª ordem quando ele contém dois elementos capazes de armazenar energia e que são irreduzíveis entre si (Ex. dois capacitores, dois indutores ou um capacitor e um indutor).

Dois elementos são considerados irreduzíveis entre si quando não é possível reduzir os mesmos a um único elemento via associação série ou paralelo.

Um dos exemplos mais notáveis são os circuitos RLC série e paralelo, ou seja:



RLC-série



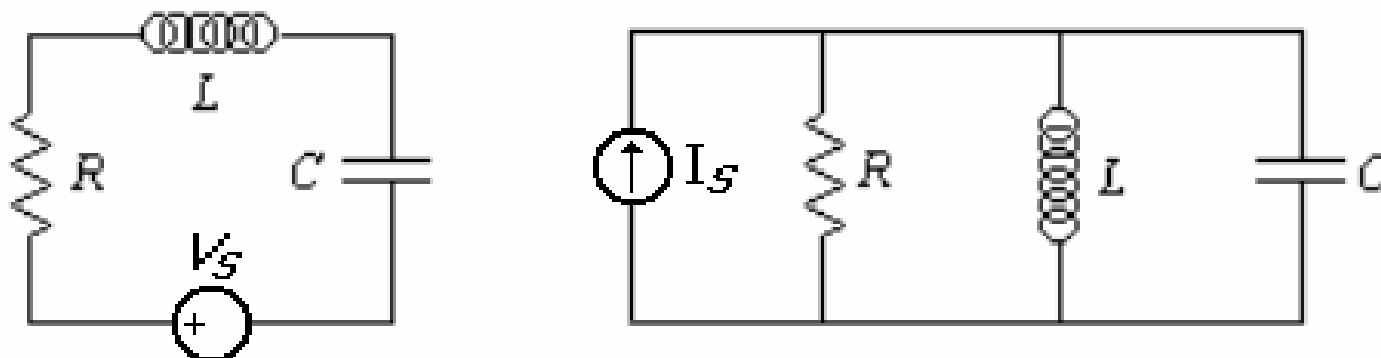
RLC-paralelo

$$\frac{d^2 V_C(t)}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dV_C(t)}{dt} + \frac{1}{LC} V_C(t) = 0 \quad \frac{d^2 V_C(t)}{dt^2} + \frac{1}{RC} \frac{dV_C(t)}{dt} + \frac{1}{LC} V_C(t) = 0$$

Em ambos os casos é obtido uma equação diferencial linear de 2ª ordem, do tipo:

$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} + 2\alpha \cdot \frac{dx(t)}{dt} + \omega \cdot x(t) = 0$$

No caso onde exista uma fonte de excitação, teremos:



A equação permanece com a mesma forma, incluindo agora uma não homogeneidade:

$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} + 2\alpha \cdot \frac{dx(t)}{dt} + \omega^2 \cdot x(t) = y(t)$$

Existe diversos métodos para encontrar a solução deste tipo de equação diferencial. A escolha do método mais adequado irá, em princípio, depender da forma da função $y(t)$. Por exemplo, podemos empregar as transformadas de Laplace, onde:

$$\begin{aligned} f(s) &= \mathcal{L}[x(t)] & \mathcal{L}[dx(t)/dt] &= s.f(s) - x_0 \\ g(s) &= \mathcal{L}[y(t)] & \mathcal{L}[d^2x(t)/dt^2] &= s^2.f(s) - s.x_0 - x_1 \end{aligned}$$

$$\text{onde: } x_0 = x(t=0) \text{ e } x_1 = (dx(t)/dt)_{t=0}$$

Assim obtemos uma equação algébrica para $f(s)$, do tipo:

$$s^2.f(s) + s.[2\alpha.f(s)] + \omega^2.f(s) - [(2\alpha + s).x_0 + x_1] = g(s)$$

cuja solução é:

$$f(s) = \frac{g(s) + (2\alpha + s).x_0 + x_1}{s^2 + 2\alpha.s + \omega^2} \Rightarrow x(t) = \mathcal{L}^{-1}[f(s)]$$

(adicionar condições iniciais e de contorno adequadas)

Restringindo nossa análise para o caso onde $y(t) = 0$ (eq. homogêneas $\rightarrow$ sol. natural), com as condições iniciais x_0 e x_1 , obtemos:

$$f(s) = \frac{(2\alpha + s)x_0 + x_1}{(s - s^+)(s - s^-)} \quad \text{onde} \quad s^\pm = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega^2}$$

Surge então quatro situações distintas:

1º CASO: Comportamento Sobre-Amortecido

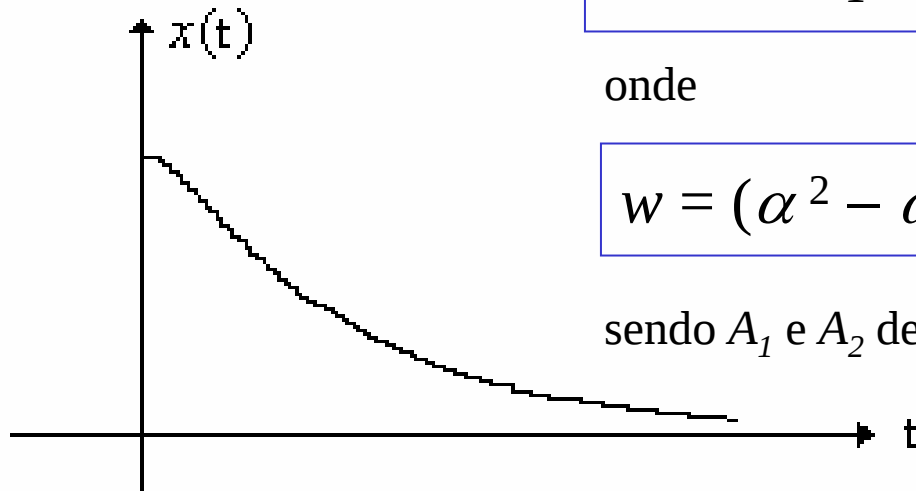
Neste caso temos $\alpha > \omega \Rightarrow s^+$ e s^- são raízes distintas e reais.

$$x(t) = \{ A_1 \cdot e^{+w \cdot t} + A_2 \cdot e^{-w \cdot t} \} \cdot e^{-\alpha \cdot t}$$

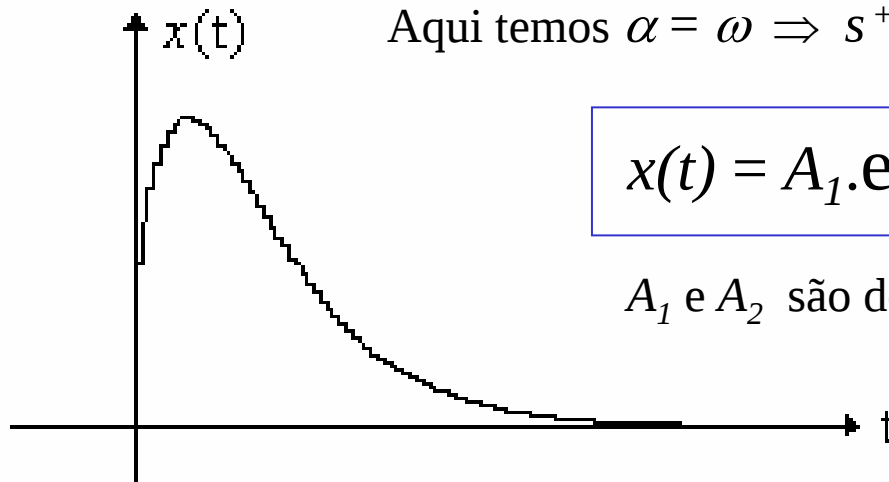
onde

$$w = (\alpha^2 - \omega^2)^{1/2} \quad \text{é um numero real}$$

sendo A_1 e A_2 determinadas a partir das condições iniciais.



2º CASO: Comportamento Criticamente-Amortecido

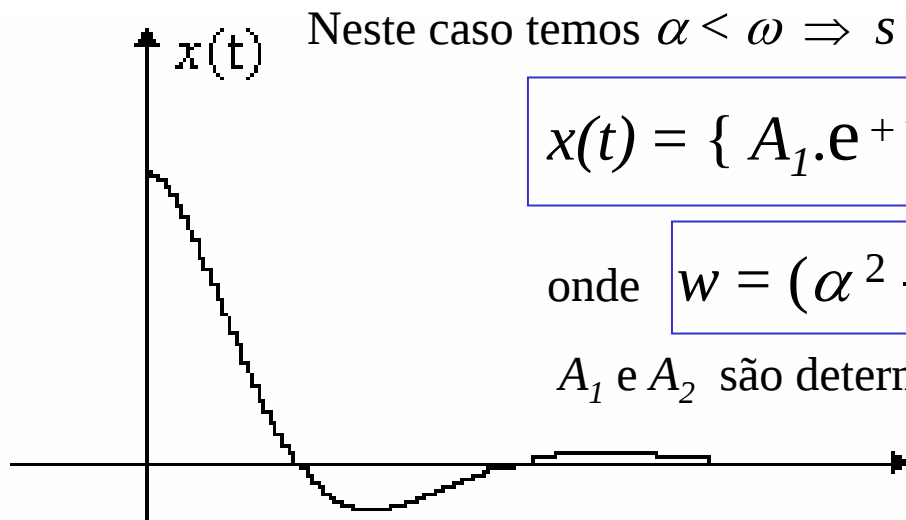


Aqui temos $\alpha = \omega \Rightarrow s^+ = s^- = -\alpha$ são raízes idênticas e reais.

$$x(t) = A_1 \cdot e^{-\alpha \cdot t} + A_2 \cdot t \cdot e^{-\alpha \cdot t}$$

A_1 e A_2 são determinadas a partir das condições iniciais.

3º CASO: Comportamento Sub-Amortecido



Neste caso temos $\alpha < \omega \Rightarrow s^+$ e s^- são raízes distintas e complexas.

$$x(t) = \{ A_1 \cdot e^{+w \cdot t} + A_2 \cdot e^{-w \cdot t} \} \cdot e^{-\alpha \cdot t}$$

onde $w = (\alpha^2 - \omega^2)^{1/2}$ é um numero complexo puro.

A_1 e A_2 são determinadas a partir das condições iniciais.

(s^+ e s^- são complexos conjugados)

4º CASO: Comportamento Oscilatório

Neste caso temos $\alpha = 0 \Rightarrow s^+$ e s^- são raízes distintas e complexas (puras).

$$x(t) = A_1 \cdot e^{+w \cdot t} + A_2 \cdot e^{-w \cdot t} \quad \text{onde} \quad w = (-\omega^2)^{1/2} \quad \text{é um número}$$

complexo puro, sendo A_1 e A_2 determinadas a partir das condições iniciais.

Escolhendo um Parâmetro Único ...

$$Q = \frac{\omega}{2\alpha}$$

(i) sobre-amortecida:

$$\alpha > \omega \Leftrightarrow 0 < Q < 0.5$$

(ii) criticamente-amortecida:

$$\alpha = \omega \Leftrightarrow Q = 0.5$$

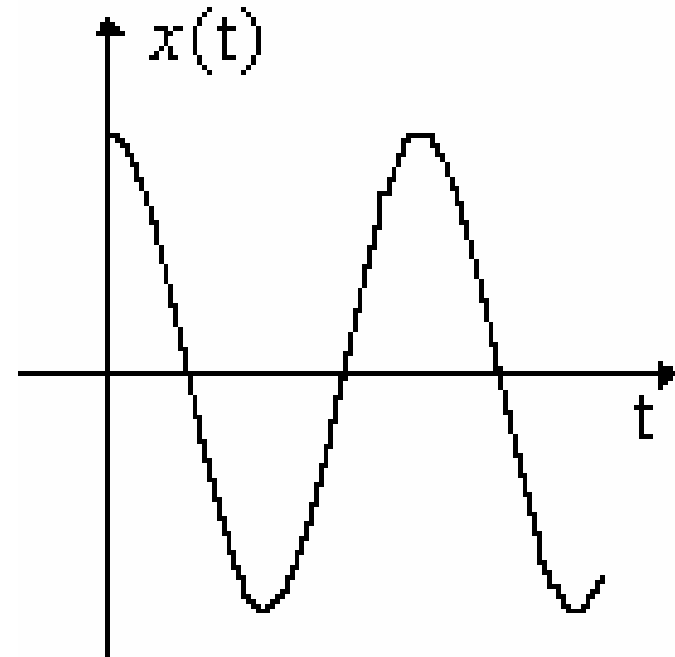
(iii) sub-amortecida:

$$\alpha < \omega \Leftrightarrow Q > 0.5;$$

(iv) oscilatória:

$$\alpha = 0 \Leftrightarrow Q = \infty$$

(s^+ e s^- são complexos conjugados)



Referencias bibliográficas

- Analise de Circuitos em Engenharia, William H. Hayt e Jack E. Kemmerly, editora McGraw-Hill do Brasil (1973).
- Analise de Circuitos Elétricos, Victor da Fonte Dias, Instituto Superior Técnico - IFR, disponível em http://www.estg.ipleiria.pt/~lneves/ce_eic/capa.htm, Portugal (1996/97).