



Eletromagnetismo - Lista de Exercícios I

Lei de Coulomb e Campo Elétrico

1. Duas cargas pontuais de 1 mC e -2 mC estão localizadas em (3, 2, -1) e (-1, -1, 4), respectivamente. Calcule a força elétrica e o campo elétrico sobre uma carga de 10 nC, localizada em (0, 3, 1).

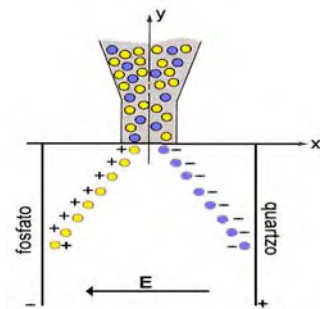
2. Duas cargas pontuais de mesma massa m e carga Q estão suspensas em um ponto comum por dois fios de massa desprezível e comprimento l . Demonstre que, na situação de equilíbrio, o ângulo de inclinação α de cada um dos fios em relação à vertical é dado por:

$$Q = \sqrt{16\pi\epsilon_0 mgl^2 \sin^2(\alpha) \tan(\alpha)}$$

Se α é muito pequeno, demonstre que:

$$\alpha = \sqrt[3]{\frac{Q^2}{16\pi\epsilon_0 mgl^2}}$$

3. Uma aplicação prática da eletrostática é na separação eletrostática de sólidos. Por exemplo, o minério de fosfato, que ao ser extraído é usualmente constituído por pequenos grãos de quartzo e de rocha de fosfato, pode ser separado em seus componentes aplicando um campo elétrico uniforme, tal como ilustrado ao lado. Supondo que a velocidade e deslocamento iniciais das partículas é zero, determine a separação entre elas após caírem 80 cm. Adote $E = 500$ kV/m e $Q/m = 9$ $\mu\text{C/kg}$ para ambos os tipos de partículas.



4. Demonstre que a força eletrostática que age sobre uma carga pontual localizada na origem devido a uma casca esférica uniformemente carregada de raio a centrada na origem é nula.

5. Um disco uniformemente carregado está no plano xy com seu eixo coincidindo com o eixo z . Sem usar resultados prévios, demonstre que o campo elétrico num ponto sobre o eixo z , a uma distância h do plano xy , é:

$$\vec{E} = \frac{\rho_s}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{h}{\sqrt{r^2 + h^2}} \right) \hat{z}$$

6. Um anel circular de raio a , uniformemente carregado, encontra-se no plano $z = 0$ centrado na origem. (a) Sem usar resultados prévios, demonstre que o campo elétrico em um ponto com coordenadas (0, 0, h) é dado por:

$$\vec{E} = \frac{\rho_L}{2\epsilon_0} \left(\frac{ah}{(a^2 + h^2)^{3/2}} \right) \hat{z}$$

(b) Para quais valores de h o vetor campo elétrico terá máxima intensidade. (c) Se a carga total do anel for Q , determine o vetor campo elétrico para $a \rightarrow 0$.

7. Dois anéis idênticos, uniformemente carregados com cargas iguais, estão alinhados no eixo z e distanciados por uma distância $2h$. Demonstre que o campo elétrico no centro de tal arranjo é nulo.
8. Uma lamina fina $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$, sobre o plano $z = 0$, tem uma densidade de carga dada por $\rho_s = xy(x^2 + y^2 + 25)^{3/2} \text{ nC/m}^2$. Determine: **(a)** a carga total da lamina; **(b)** o campo elétrico em $(0, 0, 5)$; **(c)** a força experimentada por uma carga de -1 mC localizada em $(0, 0, 5)$.
9. Os planos $x = 2$ e $y = -3$ estão carregados com 10 nC/m^2 e 15 nC/m^2 , respectivamente. Se a linha $x = 0$, $z = 2$ estiver carregada com $10\pi \text{ nC/m}$, determinar o campo elétrico em $(1, 1, -1)$ devido à tais distribuições de carga.

Densidade de Fluxo e Lei de Gauss

10. Determine $\mathbf{D}$ em $(4, 0, 3)$ se houver uma carga pontual de $-5\pi \text{ mC}$ em $(4, 0, 0)$ e uma linha de cargas de $3\pi \text{ mC/m}$ ao longo do eixo y .
11. Sabendo que $\vec{\mathbf{D}} = z\rho\cos^2(\varphi)\hat{\mathbf{z}}$, calcule a densidade de cargas em $(1, \pi/4, 3)$ e a carga total encerrada no cilindro de raio 1 m com $-2 \leq z \leq 2 \text{ m}$.
12. Sabendo que uma distribuição de cargas, com simetria esférica, tem densidade de cargas dada pela expressão abaixo, determine $\mathbf{E}$ em um ponto qualquer.

$$\rho_v = \begin{cases} \frac{\rho_0 r}{R} & 0 \leq r \leq R \\ 0 & r > R \end{cases}$$

13. Usando a lei de Gauss determine o campo elétrico devido a um cilindro metálico de raio R carregado para qualquer distância medida a partir do eixo de tal cilindro. Use inicialmente o fato de que tal cilindro encontra-se carregado homogeneamente com densidade superficial de cargas ρ_s . Após isso redefina a densidade de cargas de forma a obter uma densidade linear de cargas $\rho_L = 2\pi R\rho_s$ de maneira que seja possível obter a quantidade de carga por unidade de comprimento no cilindro, algo que é útil em vários casos de interesse.
14. Aplicando a lei de Gauss, demonstre que a força eletrostática que agiria sobre uma carga pontual localizada no interior de uma casca esférica uniformemente carregada de raio a é nula. Compare tal resultado com o obtido na questão 4.
15. Um cubo é definido por $1 < x, y, z < 1.2$. Se $\vec{\mathbf{D}} = 2x^2y\hat{\mathbf{x}} + 3x^2y^2\hat{\mathbf{y}} \text{ C/m}^2$. **(a)** Aplique a lei de Gauss para calcular o fluxo total que deixa a superfície fechada do cubo. **(b)** Calcule o divergente de $\mathbf{D}$ no centro do cubo. **(c)** Estime a carga total dentro do cubo.

Energia e Potencial

16. Duas cargas pontuais de $-4 \mu\text{C}$ e $5 \mu\text{C}$ estão localizadas em $(2, -1, 3)$ e em $(0, 4, -2)$, respectivamente. Determine o potencial em $(1, 0, 1)$ considerando potencial nulo no infinito.
17. Uma carga pontual de 5 nC está localizada em $(-3, 4, 0)$, enquanto que uma linha em $(y = 1, z = 1)$ esta carregada uniformemente com 2 nC/m . **(a)** Se $V = 0 \text{ V}$ em $(0, 0, 0)$, determine V em $(5, 0, 1)$. **(b)** Se $V = 100 \text{ V}$ em $(1, 2, 1)$, determine V em $(-2, 5, 3)$. **(c)** Se $V = -5 \text{ V}$ em $(0, 0, 0)$, determine a diferença de potencial entre o ponto $(1, 2, 1)$ com relação ao ponto $(-2, 5, 3)$.

18. Dado o potencial $V = (10/r^2)\sin(\theta)\cos(\phi)$, **(a)** Determine a densidade de fluxo elétrico em $(2, \pi/2, 0)$; **(b)** Calcule o trabalho realizado ao se movimentar uma carga de $10 \mu\text{C}$ do ponto $(1, 30^\circ, 120^\circ)$ até o ponto $(4, 90^\circ, 60^\circ)$.

19. Sem usar resultados prévios determine o potencial em qualquer um ponto P do espaço devido a um dipolo elétrico formado por duas cargas pontuais, $+Q$ e $-Q$, espaçadas por um distancia d e localizadas nas coordenadas $z = d/2$ e $z = -d/2$. Considere a distancia r do ponto P até a origem como sendo muito maior que d ($r \gg d$) e expresse o potencial em termos do momentum de dipolo elétrico $\vec{p} = Q\vec{d}$.

20. Obtenha a equação do conjunto de linhas equipotenciais devido a uma carga pontual localizada na origem de um sistema de coordenadas cartesianas.

21. Determine o potencial elétrico devido a uma linha de cargas infinita homogênea para qualquer ponto do espaço localizado a uma distancia r desta linha, tomando como referencia $V = 0$ a distancia $r = r_0$. Obtenha a equação das respectivas superfícies equipotenciais. Seria possível adotar $V = 0$ no infinito? Porque?

22. Determine o potencial elétrico em qualquer ponto P sobre o eixo z devido a um anel de raio R , uniformemente carregado, localizado no plano xy e centrado na origem.

23. Repita o problema anterior considerando agora um disco homogeneamente carregado.

24. Três cargas pontuais -1 nC , 4 nC e 3 nC estão localizadas em $(0, 0, 0)$, $(0, 0, 1)$ e $(1, 0, 0)$, respectivamente. Determine a energia interna do sistema.

25. Uma distribuição de carga com simetria esférica tem densidade de cargas dada por:

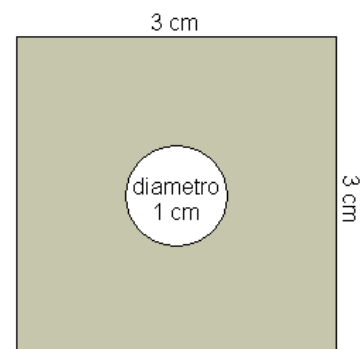
$$\rho_v = \begin{cases} \rho_0 & 0 \leq r \leq R \\ 0 & r > R \end{cases}$$

Obtenha o campo elétrico via a Lei de Gauss e a partir disto determine o potencial V em qualquer ponto do espaço e a energia armazenada na região $r < R$. Feito isso, reconstitua o vetor campo elétrico originalmente calculado a partir das expressões obtidas para o potencial.

Corrente e Condutores

26. Se $\vec{J} = [2\cos(\theta)\hat{r} + \sin(\theta)\hat{\theta}]/r^3 \text{ A/m}^2$, calcule a corrente que passa através de: **(a)** uma casca hemisférica de raio de 20 cm e **(b)** uma casca esférica de raio 10 cm .

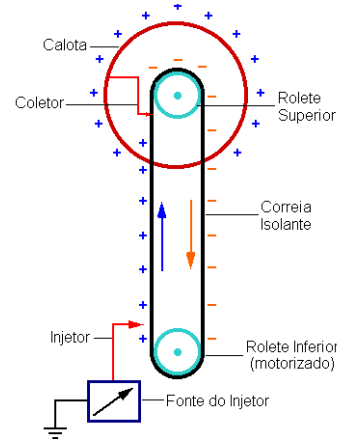
27. Uma barra de chumbo ($\sigma = 5 \times 10^6 \text{ S/m}$), de seção reta quadrada, tem um furo ao longo de seus 4 m de comprimentos, cuja seção reta é mostrada na figura ao lado. Determine a resistência entre as extremidades da barra.



28. Um fio de 1 mm de diâmetro e com $\sigma = 5 \times 10^7 \text{ S/m}$ tem 10^{29} elétrons livres por m^3 quando um campo elétrico de 10 mV/m é aplicado. Determine: **(a)** a densidade de cargas dos elétrons livres, **(b)** a densidade de corrente no fio, **(c)** a corrente e a velocidade de deriva dos elétrons.

29. Um exemplo prático de transporte convectivo de cargas é encontrado no gerador Van de Graaff, no qual cargas são transportadas sobre uma correia que se movimenta da base até a calota esférica, tal como ilustrado na figura ao lado. Se uma densidade superficial de cargas de 10^{-7} C/m^2 é transportada a uma velocidade de 2 m/s, calcule a carga coletada em 5s. Considere a largura da correia como sendo igual a 10 cm.

30. Determine a expressão da resistência equivalente a uma associação de N resistores ligados (a) em paralelo e (b) em série.



Dielétricos e Capacitância

31. Um cubo dielétrico de aresta L e centro na origem tem polarização radial dada por $\vec{P} = a\vec{r}$, onde a é uma constante e $\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$. Determine todas as densidades de cargas ligadas e demonstre que a carga ligada total se anula.

32. Calcule a capacitância de um capacitor de (a) placas paralelas de área A distanciados por d , (b) placas cilíndricas concêntricas, ou seja, um cabo coaxial, com comprimento L e raios a e b e (c) placas esféricas concêntricas de raios a e b . Qual é o ponto falho no cálculo dos itens a e b?

33. Determine a expressão da capacitância equivalente a uma associação de N capacitores ligados (a) em paralelo e (b) em série.

34. A intensidade do campo elétrico em uma amostra de poliestireno ($\epsilon_r = 2.55$), que preenche o espaço entre duas placas de um capacitor de placas paralelas, é 10 kV/m. A distância entre as placas é de 1.5 mm. Calcule: (a) D , (b) P , (c) a densidade superficial de cargas livres nas placas, (d) a densidade superficial de cargas livres de polarização e (e) a diferença de potencial entre as placas.

35. Uma esfera dielétrica ($\epsilon_r = 5.7$), de raio 10 cm, tem uma carga pontual de 2 pC colocada em seu centro. Calcule: (a) a densidade superficial de cargas de polarização sobre a superfície da esfera e (b) a força exercida pela carga sobre uma carga pontual de -4 pC localizada sobre a esfera.

36. Determine a força de atração entre as placas de um capacitor de placas paralelas. Determine também a pressão sobre a superfície de cada placa devido ao campo.

37. Dois dielétricos isotrópicos homogêneos muito extensos são justapostos de modo que sua interface se encontra no plano $z = 0$. Para $0 \leq z$ temos $\epsilon_{r1} = 4$ e para $z \leq 0$ temos $\epsilon_{r2} = 3$. Um campo elétrico uniforme $\vec{E}_1 = 5\hat{x} - 2\hat{y} + 3\hat{z}$ kV/m existe para $0 \leq z$. Determine: (a) o campo elétrico para $z \leq 0$ e (b) os ângulos que os campos nos meios 1 e 2 fazem com a interface.

38. A região $y \leq 0$ consiste de um condutor perfeito, enquanto a região $y \geq 0$ é um dielétrico com constante dielétrica igual a 2. Se existe uma carga superficial de 2 nC/m^2 no condutor, determine o campo elétrico nos pontos (3, -2, 2) e (-4, 1, 5).

39. O hidrogênio atômico contém 5.5×10^{25} átomos/ m^3 em uma certa temperatura e pressão. Quando um campo elétrico de 4 kV/m é aplicado, cada dipolo formado pelo elétron e o próton possuirá um comprimento efetivo $7.1 \times 10^{-19} \text{ m}$. Calcule a polarização e a constante dielétrica.

40. No poliestireno (C_8H_8) temos: $\epsilon_r = 2.56$ e $\rho = 1050 \text{ kg/m}^3$. Calcule o comprimento efetivo dos dipolos para um campo elétrico aplicado de 2 kV/m.

Respostas dos problemas propostos:

1. $\mathbf{F} = -6.507\mathbf{x} - 3.817\mathbf{y} + 7.506\mathbf{z}$ mN; $\mathbf{E} = -650,7\mathbf{x} - 381,7\mathbf{y} + 750,6\mathbf{z}$ kV/m
3. $2x = 73,47$ cm
6. $h = \pm a/\sqrt{2}$ $\vec{\mathbf{E}} = (Q/4\pi\epsilon_0 r^2)\hat{\mathbf{p}}$
8. $Q = 33,15$ nC $\vec{\mathbf{E}} = -1,5\hat{\mathbf{x}} - 1,5\hat{\mathbf{y}} + 11,25\hat{\mathbf{z}}$ V/m $\vec{\mathbf{F}} = 1,5\hat{\mathbf{x}} + 1,5\hat{\mathbf{y}} - 11,25\hat{\mathbf{z}}$ mN
9. $\vec{\mathbf{E}} = -162\pi\hat{\mathbf{x}} + 270\pi\hat{\mathbf{y}} - 54\pi\hat{\mathbf{z}}$ V/m
10. $\vec{\mathbf{D}} = 240\hat{\mathbf{x}} + 42\hat{\mathbf{z}}$ $\mu\text{C}/\text{m}^2$
11. $Q = 4\pi/3$ C
12. $\vec{\mathbf{E}} = (\rho_0 R^3 / 4\epsilon_0 r^2)\hat{\mathbf{r}}$
13. Dentro do cilindro $\vec{\mathbf{E}} = 0$; Fora do cilindro $\vec{\mathbf{E}} = (\rho_L / 2\pi\epsilon_0 r)\hat{\mathbf{p}}$
15. (a) $\Phi = 0,1028$ C (b) $\nabla \cdot \vec{\mathbf{D}} = 12,83$ (c) $Q = 0,1026$ C
16. $V = -5,872$ kV
17. $V = 8,477$ V $V = 49,825$ V $\Delta V = -50,175$ V
18. $\vec{\mathbf{D}} = 22,1\hat{\mathbf{p}}$ pC/m² $W = 28,125$ μJ
19. $V = \vec{\mathbf{p}} \cdot \hat{\mathbf{p}} / 4\pi\epsilon_0 r^2$
20. As equações fornecerão esferas concêntricas centradas na origem.
21. $V = (\rho_L / 2\pi\epsilon_0) \ln(r_0/r)$ As equipotenciais serão cilindros concêntricos centrados na linha.
Não será possível colocar a referencia de potencial no infinito, pois
recaímos em uma divergência. Em termos práticos, não há linha infinita. Isso é só uma idealização.
22. $V = (\rho_L / 2\epsilon_0) \left(R / \sqrt{z^2 + R^2} \right)$
23. $V = (\rho_s / 2\epsilon_0) \left(\sqrt{z^2 + R^2} - z \right)$
24. $W_e = 13,37$ nJ
25. $V = \begin{cases} \frac{\rho_0 R^3}{3\epsilon_0 r} & r \geq R \\ \frac{\rho_0 (3R^2 - r^2)}{6\epsilon_0} & r \leq R \end{cases} \quad W_e = \frac{2\pi\rho_0^2 R^5}{45\epsilon_0}$
26. $I = 31,4$ A e $I = 0$
27. $R = 974$ $\mu\Omega$
28. $\rho_V = -1,6 \times 10^{10}$ C/m² $J = 500$ A/m² $0,393$ A $v_d = 3,125 \times 10^{-5}$ m/s
29. $Q = 100$ nC

$$30. R_{eq}^{-1} = \sum_{i=1}^N R_i^{-1} \quad R_{eq} = \sum_{i=1}^N R_i$$

31. Para cada face temos $\rho_s = aL/2$. Então, a carga superficial ligada é $Q_s = 3aL^3$. A densidade volumetrica de carga ligada é $\rho_v = 3a$, como um total $Q_v = -3aL^3$. Então a carga total $Q_T = 0$.

$$32. C = \epsilon A / d, \quad C = 2\pi\epsilon L / \ln(a/b) \quad \text{e} \quad C = 4\pi\epsilon / (a^{-1} + b^{-1})$$

$$33. C_{eq} = \sum_{i=1}^N C_i \quad C_{eq}^{-1} = \sum_{i=1}^N C_i^{-1}$$

$$34. D = 225.4 \text{ nC/m}^2, P = 137 \text{ nC/m}^2, \rho_s = 225.4 \text{ nC/m}^2, \rho_{Ps} = 137 \text{ nC/m}^2, V = 15 \text{ V}$$

$$35. \rho_{Ps} = 13.12 \text{ pC/m}^2, \vec{F} = -1.263\hat{p} \text{ pN}$$

$$36. F = Q^2/2\epsilon S \text{ sendo a pressão } p = F/S$$

$$37. \vec{E}_2 = 5\hat{x} - 2\hat{y} + 4\hat{z} \text{ kV/m} \quad 29.1^\circ \text{ e } 36.6^\circ \text{ respectivamente aos meios 1 e 2}$$

$$38. \vec{E} = 0 \text{ e } \vec{E} = 113.1\hat{y} \text{ V/m respectivamente}$$

$$39. P = 6.26 \text{ pC/m}^2 \text{ e } \epsilon_r = 1.000176$$

$$40. d = 2.84 \times 10^{-17} \text{ m}$$

Para consultar e encontrar problemas suplementares veja as referencias:

- [1] Elementos de Eletromagnetismo, M.N.O. Sadiku, 3ª edição, Editora Bookman.
- [2] Eletromagnetismo, W.H. Hayt Jr e J.A. Buck, 6ª edição, Editora LTC.
- [3] Teoria do Eletromagnetismo, K.D. Machado, Vol. 1, Editora UEPG.