

LEIS DO ELETROMAGNETISMO

Equações de Maxwell

J.R. Kaschny

(2011)

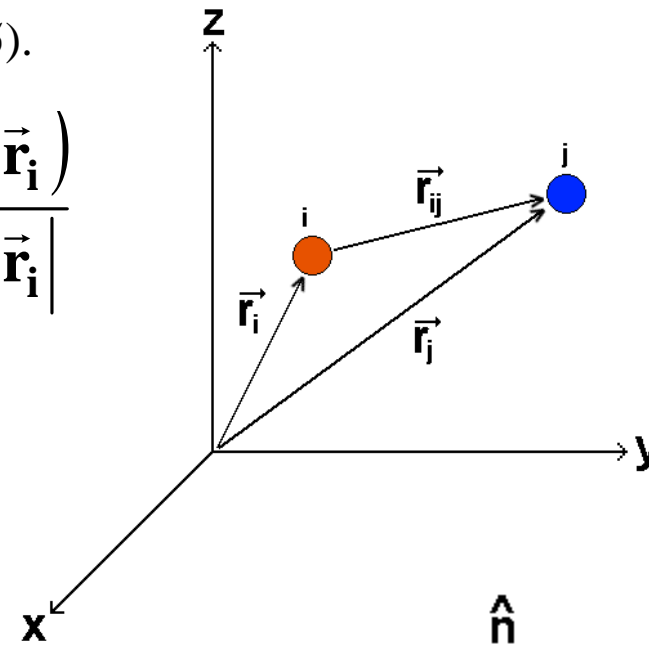
**Física Geral e Experimental III
Introdução ao Eletromagnetismo**

Lei de Coulomb

Charles Augustin de Coulomb (1785).

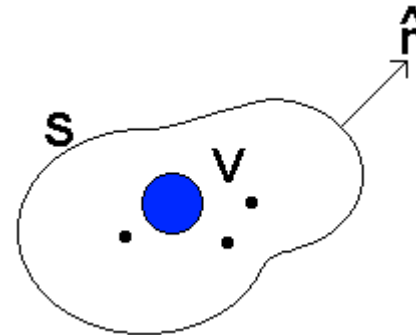
$$\vec{F}_{ji} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_i Q_j}{|\vec{r}_j - \vec{r}_i|^2} \frac{(\vec{r}_j - \vec{r}_i)}{|\vec{r}_j - \vec{r}_i|}$$

onde $\vec{r}_{ij} = \vec{r}_j - \vec{r}_i$

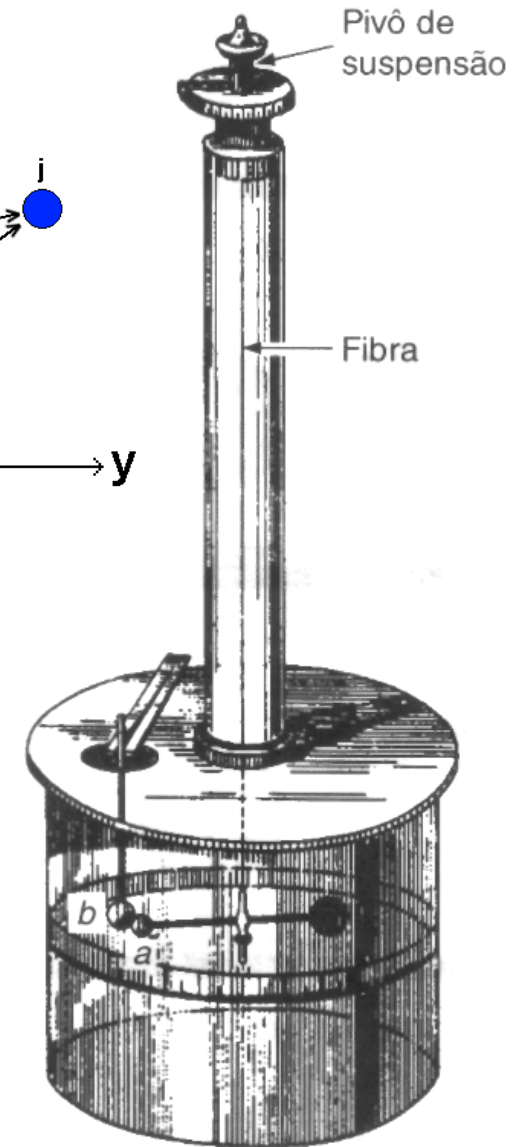


Lei de Gauss

$$\epsilon_0 \oint_S \vec{E} \cdot \hat{n} ds = Q_{\text{total}}$$



$$\epsilon_0 \oint_S \vec{E} \cdot \hat{n} ds = \epsilon_0 \int_V \nabla \cdot \vec{E} dv = \int_V \rho dv \Rightarrow \epsilon_0 \nabla \cdot \vec{E} = \rho$$



Análogo Magnético da Lei de Gauss

Para uma carga q em movimento com velocidade $\mathbf{v} \rightarrow \vec{\mathbf{F}} = q\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{B}}$

Como não existe monopolos magnéticos (nunca detectado):

$$\oint_S \vec{\mathbf{B}} \cdot \hat{\mathbf{n}} ds = 0$$

$$\oint_S \vec{\mathbf{B}} \cdot \hat{\mathbf{n}} ds = \int_V \nabla \cdot \vec{\mathbf{B}} dv = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\nabla \cdot \vec{\mathbf{B}} = 0}$$

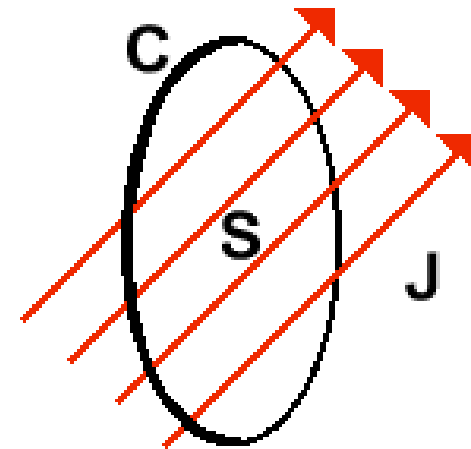
Lei de Ampère

André Marie Ampère (1820) motivado pelos resultados de Hans Cristian Oersted.

$$\oint_C \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\mathbf{l}} = \mu_0 \mathbf{i} \quad \text{onde} \quad \mathbf{i} = \int_S \vec{\mathbf{J}} \cdot \hat{\mathbf{n}} ds$$

como

$$\oint_C \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\mathbf{l}} = \int_S \nabla \times \vec{\mathbf{B}} \cdot \hat{\mathbf{n}} ds$$



$$\Rightarrow \int_S \nabla \times \vec{\mathbf{B}} \cdot \hat{\mathbf{n}} ds = \mu_0 \int_S \vec{\mathbf{J}} \cdot \hat{\mathbf{n}} ds \quad \Rightarrow \quad \boxed{\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \vec{\mathbf{J}}}$$

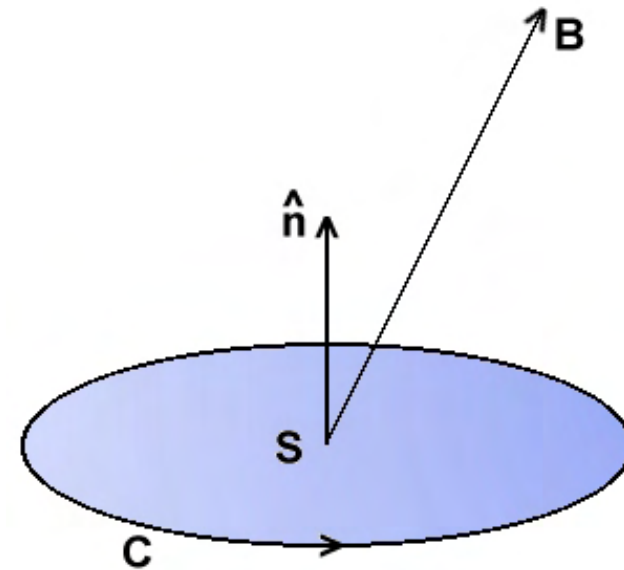
$$\nabla \cdot \nabla \times \vec{\mathbf{B}} = \mu_0 \nabla \cdot \vec{\mathbf{J}} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{\mathbf{J}} \text{ é estacionaria}$$

Lei de Faraday

Michael Faraday (1832)

$$\mathbf{i} = -\frac{1}{R} \frac{d\Phi}{dt} \quad \text{ou} \quad \varepsilon = R\mathbf{i} = -\frac{d\Phi}{dt}$$

onde $\Phi = \int_S \vec{\mathbf{B}} \cdot \hat{\mathbf{n}} ds$



Escrevendo a força eletromotriz (que implica em uma diferença de potencial), como:

$$\varepsilon = \oint_C \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{l}} \Rightarrow \oint_C \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{l}} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{\mathbf{B}} \cdot \hat{\mathbf{n}} ds$$

como $\oint_C \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{l}} = \int_S \nabla \times \vec{\mathbf{E}} \cdot \hat{\mathbf{n}} ds \Rightarrow \nabla \times \vec{\mathbf{E}} = -\frac{\partial \vec{\mathbf{B}}}{\partial t}$

Corrente de Deslocamento

James Clerk Maxwell (1864)

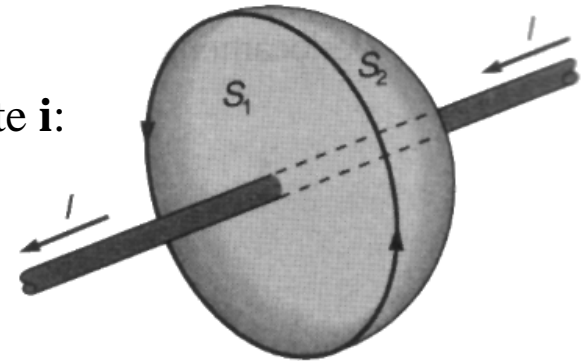
→ Consideremos um condutor percorrido por uma corrente \mathbf{i} :

$$\nabla \cdot \vec{\mathbf{J}} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

como $\nabla \times \vec{\mathbf{B}} = \mu_0 \vec{\mathbf{J}}$

$$\Rightarrow \nabla \cdot \nabla \times \vec{\mathbf{B}} = \mu_0 \nabla \cdot \vec{\mathbf{J}} = 0$$

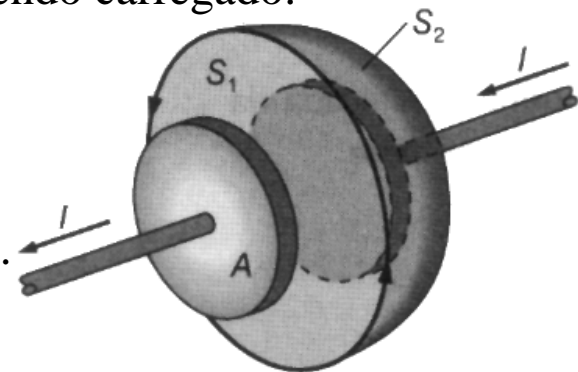
$$\Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$



ou seja, nenhuma carga é retida ou criada no volume delimitado por S_1 e S_2 .

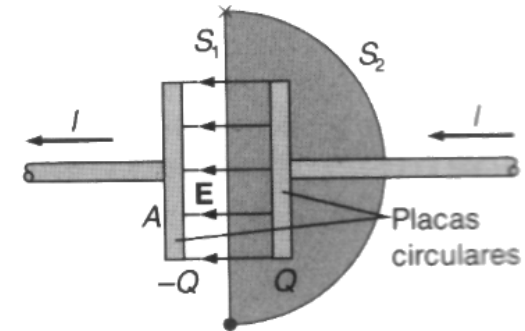
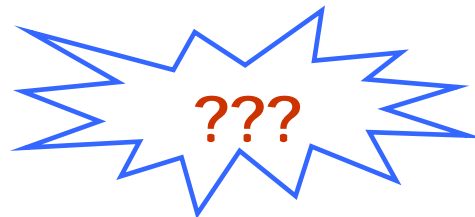
→ Consideremos agora, um capacitor de placas paralelas sendo carregado:

- S_2 é atravessada por \mathbf{i} mas S_1 não !!!
- $\mathbf{i} = \frac{dq}{dt}$ é a taxa com que a carga se acumula nas placas.
- De qualquer maneira, a continuidade de carga é garantida.



Contudo, pela lei de Ampère

$$\nabla \cdot \nabla \times \vec{\mathbf{B}} = \mu_0 \nabla \cdot \vec{\mathbf{J}} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$



Olhando novamente para a equação de continuidade

$$\nabla \cdot \vec{\mathbf{J}} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

e considerando a lei de Gauss

$$\rho = \epsilon_0 \nabla \cdot \vec{\mathbf{E}} \Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} = \nabla \cdot \left(\epsilon_0 \frac{\partial \vec{\mathbf{E}}}{\partial t} \right)$$

temos:

$$\nabla \cdot \left(\vec{\mathbf{J}} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{\mathbf{E}}}{\partial t} \right) = \mathbf{0}$$

Corrente de Deslocamento

Logo, teremos consistência da lei de Ampère com a continuidade de cargas se:

$$\nabla \times \vec{\mathbf{B}} = \mu_0 \vec{\mathbf{J}} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{\mathbf{E}}}{\partial t}$$

Lei de Ampère/Maxwell

Equações de Maxwell

Reunindo todas estas leis na forma diferencial, temos:

Lei de Gauss	$\nabla \cdot \vec{\mathbf{E}} = \frac{\rho}{\epsilon}$
Lei de Faraday	$\nabla \times \vec{\mathbf{E}} = -\frac{\partial \vec{\mathbf{B}}}{\partial t}$
Lei de Gauss para B	$\nabla \cdot \vec{\mathbf{B}} = 0$
Lei de Ampere/Maxwell	$\nabla \times \vec{\mathbf{B}} = \mu \vec{\mathbf{J}} + \mu \epsilon \frac{\partial \vec{\mathbf{E}}}{\partial t}$

onde, para manter a generalidade, toma-se o cuidado de usar ϵ e μ no lugar de ϵ_0 e μ_0 , com:

$\vec{\mathbf{D}} = \epsilon \vec{\mathbf{E}} = \epsilon_0 \vec{\mathbf{E}} + \vec{\mathbf{P}}$	D = densidade de fluxo elétrico, P = polarização do meio
$\vec{\mathbf{B}} = \mu \vec{\mathbf{H}} = \mu_0 (\vec{\mathbf{H}} + \vec{\mathbf{M}})$	H = intensidade de campo magnético, M = magnetização do meio
$\vec{\mathbf{J}} = \sigma \vec{\mathbf{E}} + \rho \vec{\mathbf{v}}$	J = densidade de corrente, σ = condutividade, v = velocidade de cargas livres

Correspondentemente, na forma integral, temos:

Lei de Gauss

$$\epsilon \oint_S \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{s}} = \int_V \rho dv$$

Lei de Faraday

$$\oint_L \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{l}} = - \frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\mathbf{s}}$$

Lei de Gauss para B

$$\oint_S \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\mathbf{s}} = 0$$

Lei de Ampere/Maxwell

$$\oint_L \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\mathbf{l}} = \int_S \left(\mu \vec{\mathbf{J}} + \mu \epsilon \frac{\partial \vec{\mathbf{E}}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{\mathbf{s}}$$

onde, toma-se o cuidado de usar novamente ϵ e μ no lugar de ϵ_0 e μ_0 , respectivamente.

Equação de Ondas para os Campos \vec{E} e \vec{B}

Suponhamos a situação onde:

$$\vec{E} = \vec{E}(z, t), \quad \vec{B} = \vec{B}(z, t), \quad \rho = 0 \quad \text{e} \quad \vec{J} = 0$$

que corresponde ao caso simplificado onde imaginamos estar longe das fontes de campo, tal que eles dependem somente de uma coordenada espacial e do tempo, numa região sem cargas nem correntes. Calculando o divergente destes campos, temos:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\partial \mathbf{E}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{E}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{E}_z}{\partial z} = \frac{\partial \mathbf{E}_z}{\partial z} \quad \text{e} \quad \nabla \cdot \vec{B} = \frac{\partial \mathbf{B}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{B}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{B}_z}{\partial z} = \frac{\partial \mathbf{B}_z}{\partial z}$$

$\begin{matrix} \searrow & \searrow \\ = 0 & = 0 \end{matrix}$

Calculando o rotacional, temos:

$$\nabla \times \vec{E} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \mathbf{E}_x & \mathbf{E}_y & \mathbf{E}_z \end{vmatrix} = -\frac{\partial \mathbf{E}_y}{\partial z} \hat{x} + \frac{\partial \mathbf{E}_x}{\partial z} \hat{y} \quad \text{e} \quad \nabla \times \vec{B} = -\frac{\partial \mathbf{B}_y}{\partial z} \hat{x} + \frac{\partial \mathbf{B}_x}{\partial z} \hat{y}$$

Aplicando estes resultados nas equações de Maxwell, obtemos:

(1) **Lei de Gauss** $\nabla \cdot \vec{\mathbf{E}} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \Rightarrow \frac{\partial \mathbf{E}_z}{\partial z} = 0$

(2) **Lei de Gauss para o campo magnético**
(não existência de monopolo magnético) $\nabla \cdot \vec{\mathbf{B}} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \mathbf{B}_z}{\partial z} = 0$

(3) **Lei de Faraday** $\frac{\partial \mathbf{B}_z}{\partial t} = 0$

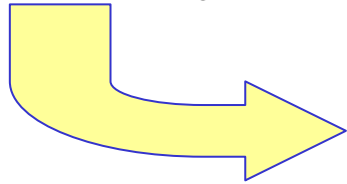
$$\nabla \times \vec{\mathbf{E}} = -\frac{\partial \vec{\mathbf{B}}}{\partial t} \Rightarrow -\frac{\partial \mathbf{E}_y}{\partial z} \hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial \mathbf{E}_x}{\partial z} \hat{\mathbf{y}} = -\frac{\partial \mathbf{B}_x}{\partial t} \hat{\mathbf{x}} - \frac{\partial \mathbf{B}_y}{\partial t} \hat{\mathbf{y}} - \frac{\partial \mathbf{B}_z}{\partial t} \hat{\mathbf{z}}$$

(4) **Lei de Ampere/Maxwell**

$$\nabla \times \vec{\mathbf{B}} = \mu_0 \vec{\mathbf{J}} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{\mathbf{E}}}{\partial t} \Rightarrow -\frac{\partial \mathbf{B}_y}{\partial z} \hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial \mathbf{B}_x}{\partial z} \hat{\mathbf{y}} = \mu_0 \epsilon_0 \left(\frac{\partial \mathbf{E}_x}{\partial t} \hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial \mathbf{E}_y}{\partial t} \hat{\mathbf{y}} + \frac{\partial \mathbf{E}_z}{\partial t} \hat{\mathbf{z}} \right)$$

Então podemos concluir imediatamente que \mathbf{E}_z e \mathbf{B}_z são constantes, ou seja, a componente z dos campos elétrico e magnético não dependem da posição nem variam com o tempo. Estas constantes são normalmente adotadas como nulas!

Das outras duas relações



$$-\frac{\partial \mathbf{E}_y}{\partial z} \hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial \mathbf{E}_x}{\partial z} \hat{\mathbf{y}} = -\frac{\partial \mathbf{B}_x}{\partial t} \hat{\mathbf{x}} - \frac{\partial \mathbf{B}_y}{\partial t} \hat{\mathbf{y}}$$

$$-\frac{\partial \mathbf{B}_y}{\partial z} \hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial \mathbf{B}_x}{\partial z} \hat{\mathbf{y}} = \mu_0 \varepsilon_0 \left(\frac{\partial \mathbf{E}_x}{\partial t} \hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial \mathbf{E}_y}{\partial t} \hat{\mathbf{y}} \right)$$

.... obtemos:

$$\frac{\partial \mathbf{E}_y}{\partial z} = \frac{\partial \mathbf{B}_x}{\partial t}$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}_x}{\partial z} = +\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}_y}{\partial t}$$

relação entre \mathbf{E}_y e \mathbf{B}_x

$$\frac{\partial \mathbf{E}_x}{\partial z} = -\frac{\partial \mathbf{B}_y}{\partial t}$$

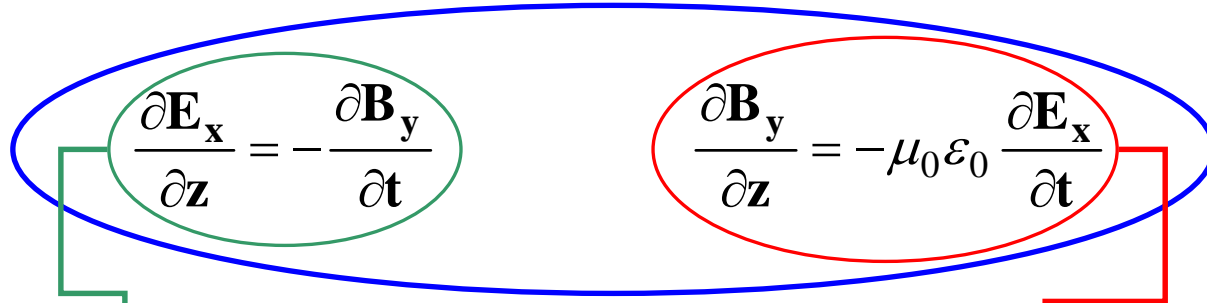
$$\frac{\partial \mathbf{B}_y}{\partial z} = -\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}_x}{\partial t}$$

relação entre \mathbf{E}_x e \mathbf{B}_y

que diferem, somente, pelas substituições $\mathbf{E}_x \rightarrow \mathbf{E}_y$ e $\mathbf{B}_y \rightarrow -\mathbf{B}_x$

$$\frac{\partial \mathbf{E}_y}{\partial z} = \frac{\partial \mathbf{B}_x}{\partial t}$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}_x}{\partial z} = +\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}_y}{\partial t}$$



$$\frac{\partial \mathbf{E}_x}{\partial z} = -\frac{\partial \mathbf{B}_y}{\partial t}$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}_y}{\partial z} = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}_x}{\partial t}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathbf{E}_x}{\partial z} \right) = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathbf{B}_y}{\partial t} \right)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\partial^2 \mathbf{E}_x}{\partial t \partial z} \right) = - \left(\frac{\partial^2 \mathbf{B}_y}{\partial t^2} \right)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \mathbf{B}_y}{\partial z} \right) = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \mathbf{E}_x}{\partial t} \right)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\partial^2 \mathbf{B}_y}{\partial z^2} \right) = -\mu_0 \epsilon_0 \left(\frac{\partial^2 \mathbf{E}_x}{\partial z \partial t} \right)$$

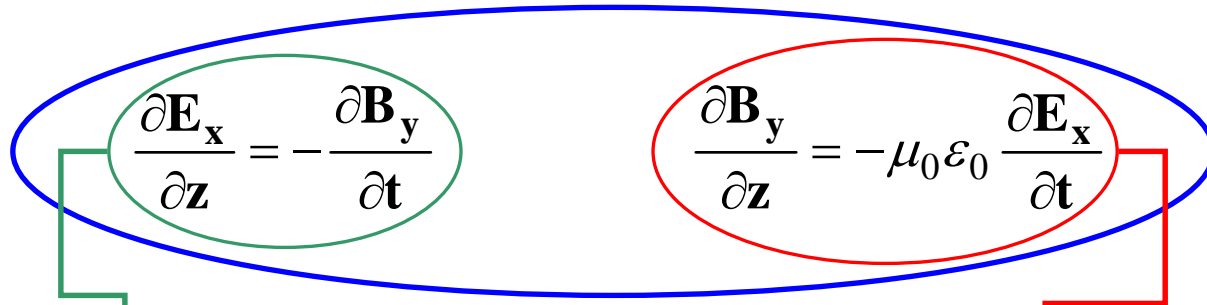
$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}_x}{\partial t \partial z} = \frac{\partial^2 \mathbf{E}_x}{\partial z \partial t}$$

⇒

$$\frac{\partial^2 \mathbf{B}_y}{\partial t^2} - \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0} \frac{\partial^2 \mathbf{B}_y}{\partial z^2} = \mathbf{0}$$

$$\frac{\partial \mathbf{E}_y}{\partial z} = \frac{\partial \mathbf{B}_x}{\partial t}$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}_x}{\partial z} = +\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}_y}{\partial t}$$



$$\frac{\partial \mathbf{E}_x}{\partial z} = -\frac{\partial \mathbf{B}_y}{\partial t}$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}_y}{\partial z} = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}_x}{\partial t}$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \mathbf{E}_x}{\partial z} \right) = -\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \mathbf{B}_y}{\partial t} \right)$$
$$\Rightarrow \left(\frac{\partial^2 \mathbf{E}_x}{\partial z^2} \right) = -\left(\frac{\partial^2 \mathbf{B}_y}{\partial z \partial t} \right)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathbf{B}_y}{\partial z} \right) = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathbf{E}_x}{\partial t} \right)$$
$$\Rightarrow \left(\frac{\partial^2 \mathbf{B}_y}{\partial t \partial z} \right) = -\mu_0 \epsilon_0 \left(\frac{\partial^2 \mathbf{E}_x}{\partial t^2} \right)$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{B}_y}{\partial t \partial z} = \frac{\partial^2 \mathbf{B}_y}{\partial z \partial t}$$

\Rightarrow

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}_x}{\partial t^2} - \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0} \frac{\partial^2 \mathbf{E}_x}{\partial z^2} = 0$$

$$\frac{\partial \mathbf{E}_y}{\partial z} = \frac{\partial \mathbf{B}_x}{\partial t}$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}_x}{\partial z} = +\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}_y}{\partial t}$$

$$\frac{\partial \mathbf{E}_x}{\partial z} = -\frac{\partial \mathbf{B}_y}{\partial t}$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}_y}{\partial z} = -\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}_x}{\partial t}$$

Usando o mesmo tipo de procedimento que o adotado anteriormente com:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{B}_x}{\partial t \partial z} = \frac{\partial^2 \mathbf{B}_x}{\partial z \partial t} \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 \mathbf{E}_y}{\partial t \partial z} = \frac{\partial^2 \mathbf{E}_y}{\partial z \partial t}$$

Obtemos o par de equações:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{B}_x}{\partial t^2} - \frac{1}{\mu_0 \varepsilon_0} \frac{\partial^2 \mathbf{B}_x}{\partial z^2} = \mathbf{0}$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}_y}{\partial t^2} - \frac{1}{\mu_0 \varepsilon_0} \frac{\partial^2 \mathbf{E}_y}{\partial z^2} = \mathbf{0}$$

Então, partindo das equações de Maxwell e das suposições feitas inicialmente, ou seja,

$$\vec{\mathbf{E}} = \vec{\mathbf{E}}(\mathbf{z}, t), \quad \vec{\mathbf{B}} = \vec{\mathbf{B}}(\mathbf{z}, t), \quad \rho = 0 \quad \text{e} \quad \vec{\mathbf{J}} = 0$$

obtemos:

	$\vec{\mathbf{E}}$	$\vec{\mathbf{B}}$
$\hat{\mathbf{x}}$	$\frac{\partial^2 \mathbf{E}_x}{\partial t^2} - \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0} \frac{\partial^2 \mathbf{E}_x}{\partial z^2} = 0$	$\frac{\partial^2 \mathbf{B}_x}{\partial t^2} - \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0} \frac{\partial^2 \mathbf{B}_x}{\partial z^2} = 0$
$\hat{\mathbf{y}}$	$\frac{\partial^2 \mathbf{E}_y}{\partial t^2} - \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0} \frac{\partial^2 \mathbf{E}_y}{\partial z^2} = 0$	$\frac{\partial^2 \mathbf{B}_y}{\partial t^2} - \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0} \frac{\partial^2 \mathbf{B}_y}{\partial z^2} = 0$
$\hat{\mathbf{z}}$	$\mathbf{E}_z = \text{Const.}$	$\mathbf{B}_z = \text{Const.}$

Resumidamente, temos para as componentes x e y dos campos, equações do tipo:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{f}}{\partial t^2} - \frac{1}{\mathcal{G}^2} \frac{\partial^2 \mathbf{f}}{\partial z^2} = \mathbf{0} \quad \text{Equação da Onda}$$

que corresponde a uma onda se propagando na direção z com velocidade

$$\mathcal{G} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} \quad \text{Velocidade de Propagação}$$

Na direção de propagação teremos campos constantes, via de regra considerados nulos.

Cabe salientar a relação entre os pares (E_x, B_y) e (E_y, B_x) , perpendiculares entre si e também a direção de propagação.

NOTA:

Usando os valores numéricos de μ_0 e ϵ_0 obtemos $\mathcal{G} = 2.99792 \times 10^8 \text{ m/s} = \mathbf{c} \text{ !!!!}$

Referencias Bibliográficas

- Curso de Física Básica, Vol. 3 Eletromagnetismo, H.M. Nussenzveig, cap. 12.
- Física, Vol. 2, F.J. Kelly, W.E. Gettys e M.J. Skove, cap. 34.
- Fundamentos da Teoria Eletromagnética, J.R. Reitz, F.J. Milford e R.W. Christy.
- Electromagnetic Field and Waves, P. Lorrain and D.R. Corson