ONDAS ELETROMAGNÉTICAS

J.R. Kaschny

(2011)

Física Geral e Experimental III
Introdução ao Eletromagnetismo

Introdução

Em 1864 James Clerk Maxwell publicou o trabalho “Teoria Dinâmica do Campo Eletro-magnético” (Dynamical Theory of the Electromagnetic Fields) no qual apresentou as equações que unificavam os campos elétrico e magnético.

$$\nabla \cdot \vec{\mathbf{E}} = \frac{\boldsymbol{\rho}}{\boldsymbol{\varepsilon}_0} \qquad \nabla \times \vec{\mathbf{E}} = -\frac{\partial \vec{\mathbf{B}}}{\partial \mathbf{t}} \qquad \nabla \cdot \vec{\mathbf{B}} = \mathbf{0} \qquad \nabla \times \vec{\mathbf{B}} = \boldsymbol{\mu}_0 \vec{\mathbf{J}} + \boldsymbol{\mu}_0 \boldsymbol{\varepsilon}_0 \frac{\partial \vec{\mathbf{E}}}{\partial \mathbf{t}}$$

Lei de Gauss — **Lei de Faraday** — **Lei de Gauss p/ B** — **Lei de Ampere/Maxwell**

Mostrou, além disso, que tais equações prediziam a existência de ondas naqueles campos, ou seja, as ondas eletromagnéticas. Maxwell também identificou essas ondas como luz. Sendo assim, as equações de Maxwell não somente unificam os fenômenos elétricos e magnéticos, como também os óticos.

Então, partindo das equações de Maxwell, vamos aqui obter as correspondentes equações de onda para os campos **E** e **B** e analisar, brevemente, algumas de suas propriedades.

Equação de Ondas para os Campos $\vec{E}$ e $\vec{B}$

Suponhamos a situação onde:

$$\vec{E} = \vec{E}(z,t), \quad \vec{B} = \vec{B}(z,t), \quad \rho = 0 \quad \text{e} \quad \vec{J} = 0$$

que corresponde ao caso simplificado onde imaginamos estar longe das fontes de campo, tal que eles dependem somente de uma coordenada espacial e do tempo, numa região sem cargas nem correntes. Calculando o divergente destes campos, temos:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \underbrace{\cancel{\frac{\partial E_x}{\partial x}}}_{=0} + \underbrace{\cancel{\frac{\partial E_y}{\partial y}}}_{=0} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{\partial E_z}{\partial z} \qquad \text{e} \qquad \nabla \cdot \vec{B} = \underbrace{\cancel{\frac{\partial B_x}{\partial x}}}_{=0} + \underbrace{\cancel{\frac{\partial B_y}{\partial y}}}_{=0} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = \frac{\partial B_z}{\partial z}$$

Calculando o rotacional, temos:

$$\nabla \times \vec{E} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = -\frac{\partial E_y}{\partial z}\hat{x} + \frac{\partial E_x}{\partial z}\hat{y} \qquad \text{e} \qquad \nabla \times \vec{B} = -\frac{\partial B_y}{\partial z}\hat{x} + \frac{\partial B_x}{\partial z}\hat{y}$$

Aplicando estes resultados nas equações de Maxwell, obtemos:

(1) Lei de Gauss

$$\nabla \cdot \vec{\mathbf{E}} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \Rightarrow \frac{\partial \mathbf{E_z}}{\partial \mathbf{z}} = \mathbf{0}$$

(2) Lei de Gauss para o campo magnético

(não existência de monopolo magnético)

$$\nabla \cdot \vec{\mathbf{B}} = \mathbf{0} \Rightarrow \frac{\partial \mathbf{B_z}}{\partial \mathbf{z}} = \mathbf{0}$$

(3) Lei de Faraday

$$\frac{\partial \mathbf{B_z}}{\partial \mathbf{t}} = \mathbf{0}$$

$$\nabla \times \vec{\mathbf{E}} = -\frac{\partial \vec{\mathbf{B}}}{\partial \mathbf{t}} \Rightarrow -\frac{\partial \mathbf{E_y}}{\partial \mathbf{z}}\hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial \mathbf{E_x}}{\partial \mathbf{z}}\hat{\mathbf{y}} = -\frac{\partial \mathbf{B_x}}{\partial \mathbf{t}}\hat{\mathbf{x}} - \frac{\partial \mathbf{B_y}}{\partial \mathbf{t}}\hat{\mathbf{y}} - \frac{\partial \mathbf{B_z}}{\partial \mathbf{t}}\hat{\mathbf{z}}$$

(4) Lei de Ampere/Maxwell

$$\frac{\partial \mathbf{E_z}}{\partial \mathbf{t}} = \mathbf{0}$$

$$\nabla \times \vec{\mathbf{B}} = \mu_0 \vec{\mathbf{J}} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{\mathbf{E}}}{\partial \mathbf{t}} \Rightarrow -\frac{\partial \mathbf{B_y}}{\partial \mathbf{z}}\hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial \mathbf{B_x}}{\partial \mathbf{z}}\hat{\mathbf{y}} = \mu_0 \varepsilon_0 \left(\frac{\partial \mathbf{E_x}}{\partial \mathbf{t}}\hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial \mathbf{E_y}}{\partial \mathbf{t}}\hat{\mathbf{y}} + \frac{\partial \mathbf{E_z}}{\partial \mathbf{t}}\hat{\mathbf{z}} \right)$$

Então podemos concluir imediatamente que $\mathbf{E_z}$ e $\mathbf{B_z}$ são constantes, ou seja, a componente **z** dos campos elétrico e magnético não dependem da posição nem variam com o tempo. Estas constantes são normalmente adotadas como nulas!

Das outras duas relações ....

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial \mathbf{E_y}}{\partial \mathbf{z}}\hat{\mathbf{x}} + \dfrac{\partial \mathbf{E_x}}{\partial \mathbf{z}}\hat{\mathbf{y}} = -\dfrac{\partial \mathbf{B_x}}{\partial \mathbf{t}}\hat{\mathbf{x}} - \dfrac{\partial \mathbf{B_y}}{\partial \mathbf{t}}\hat{\mathbf{y}} \\[2ex] -\dfrac{\partial \mathbf{B_y}}{\partial \mathbf{z}}\hat{\mathbf{x}} + \dfrac{\partial \mathbf{B_x}}{\partial \mathbf{z}}\hat{\mathbf{y}} = \mu_0\varepsilon_0\left(\dfrac{\partial \mathbf{E_x}}{\partial \mathbf{t}}\hat{\mathbf{x}} + \dfrac{\partial \mathbf{E_y}}{\partial \mathbf{t}}\hat{\mathbf{y}}\right) \end{cases}$$

.... obtemos:

$$\frac{\partial \mathbf{E_y}}{\partial \mathbf{z}} = \frac{\partial \mathbf{B_x}}{\partial \mathbf{t}} \qquad \frac{\partial \mathbf{B_x}}{\partial \mathbf{z}} = +\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial \mathbf{E_y}}{\partial \mathbf{t}}$$

relação entre $\mathbf{E_y}$ e $\mathbf{B_x}$

$$\frac{\partial \mathbf{E_x}}{\partial \mathbf{z}} = -\frac{\partial \mathbf{B_y}}{\partial \mathbf{t}} \qquad \frac{\partial \mathbf{B_y}}{\partial \mathbf{z}} = -\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial \mathbf{E_x}}{\partial \mathbf{t}}$$

relação entre $\mathbf{E_x}$ e $\mathbf{B_y}$

que diferem, somente, pelas substituições $\mathbf{E_x} \rightarrow \mathbf{E_y}$ e $\mathbf{B_y} \rightarrow \mathbf{-B_x}$

$$\frac{\partial E_y}{\partial z} = \frac{\partial B_x}{\partial t} \qquad \frac{\partial B_x}{\partial z} = +\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t}$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} = -\frac{\partial B_y}{\partial t} \qquad \frac{\partial B_y}{\partial z} = -\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial E_x}{\partial t}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial E_x}{\partial z}\right) = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial B_y}{\partial t}\right)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\partial^2 E_x}{\partial t \partial z}\right) = -\left(\frac{\partial^2 B_y}{\partial t^2}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial B_y}{\partial z}\right) = -\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial E_x}{\partial t}\right)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\partial^2 B_y}{\partial z^2}\right) = -\mu_0 \varepsilon_0 \left(\frac{\partial^2 E_x}{\partial z \partial t}\right)$$

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial t \partial z} = \frac{\partial^2 E_x}{\partial z \partial t} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{\partial^2 B_y}{\partial t^2} - \frac{1}{\mu_0 \varepsilon_0}\frac{\partial^2 B_y}{\partial z^2} = 0}$$

$$\frac{\partial \mathbf{E_y}}{\partial \mathbf{z}} = \frac{\partial \mathbf{B_x}}{\partial \mathbf{t}} \qquad \frac{\partial \mathbf{B_x}}{\partial \mathbf{z}} = +\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E_y}}{\partial \mathbf{t}}$$

$$\frac{\partial \mathbf{E_x}}{\partial \mathbf{z}} = -\frac{\partial \mathbf{B_y}}{\partial \mathbf{t}} \qquad \frac{\partial \mathbf{B_y}}{\partial \mathbf{z}} = -\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E_x}}{\partial \mathbf{t}}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial E_x}{\partial z}\right) = -\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial B_y}{\partial t}\right)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2}\right) = -\left(\frac{\partial^2 B_y}{\partial z \partial t}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial B_y}{\partial z}\right) = -\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial E_x}{\partial t}\right)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\partial^2 B_y}{\partial t \partial z}\right) = -\mu_0 \varepsilon_0 \left(\frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2}\right)$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{B_y}}{\partial \mathbf{t} \partial \mathbf{z}} = \frac{\partial^2 \mathbf{B_y}}{\partial \mathbf{z} \partial \mathbf{t}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{\partial^2 \mathbf{E_x}}{\partial \mathbf{t}^2} - \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{\mu_0 \varepsilon_0}} \frac{\partial^2 \mathbf{E_x}}{\partial \mathbf{z}^2} = \mathbf{0}}$$

$$\frac{\partial \mathbf{E_y}}{\partial \mathbf{z}} = \frac{\partial \mathbf{B_x}}{\partial \mathbf{t}} \qquad \frac{\partial \mathbf{B_x}}{\partial \mathbf{z}} = +\mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E_y}}{\partial \mathbf{t}}$$

$$\frac{\partial \mathbf{E_x}}{\partial \mathbf{z}} = -\frac{\partial \mathbf{B_y}}{\partial \mathbf{t}} \qquad \frac{\partial \mathbf{B_y}}{\partial \mathbf{z}} = -\mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E_x}}{\partial \mathbf{t}}$$

Usando o mesmo tipo de procedimento que o adotado anteriormente com:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{B_x}}{\partial \mathbf{t}\partial \mathbf{z}} = \frac{\partial^2 \mathbf{B_x}}{\partial \mathbf{z}\partial \mathbf{t}} \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 \mathbf{E_y}}{\partial \mathbf{t}\partial \mathbf{z}} = \frac{\partial^2 \mathbf{E_y}}{\partial \mathbf{z}\partial \mathbf{t}}$$

Obtemos o par de equações:

$$\boxed{\frac{\partial^2 \mathbf{B_x}}{\partial \mathbf{t}^2} - \frac{\mathbf{1}}{\mu_0\varepsilon_0}\frac{\partial^2 \mathbf{B_x}}{\partial \mathbf{z}^2} = \mathbf{0}} \qquad \boxed{\frac{\partial^2 \mathbf{E_y}}{\partial \mathbf{t}^2} - \frac{\mathbf{1}}{\mu_0\varepsilon_0}\frac{\partial^2 \mathbf{E_y}}{\partial \mathbf{z}^2} = \mathbf{0}}$$

Então, partindo das equações de Maxwell e das suposições feitas inicialmente, ou seja,

$$\vec{\mathbf{E}} = \vec{\mathbf{E}}(\mathbf{z},\mathbf{t})\,, \quad \vec{\mathbf{B}} = \vec{\mathbf{B}}(\mathbf{z},\mathbf{t})\,, \quad \boldsymbol{\rho} = \mathbf{0} \quad \text{e} \quad \vec{\mathbf{J}} = \mathbf{0}$$

obtemos:

	$\vec{\mathbf{E}}$	$\vec{\mathbf{B}}$
$\hat{\mathbf{x}}$	$\dfrac{\partial^2 \mathbf{E_x}}{\partial \mathbf{t}^2} - \dfrac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{\mu_0 \varepsilon_0}} \dfrac{\partial^2 \mathbf{E_x}}{\partial \mathbf{z}^2} = \mathbf{0}$	$\dfrac{\partial^2 \mathbf{B_x}}{\partial \mathbf{t}^2} - \dfrac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{\mu_0 \varepsilon_0}} \dfrac{\partial^2 \mathbf{B_x}}{\partial \mathbf{z}^2} = \mathbf{0}$
$\hat{\mathbf{y}}$	$\dfrac{\partial^2 \mathbf{E_y}}{\partial \mathbf{t}^2} - \dfrac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{\mu_0 \varepsilon_0}} \dfrac{\partial^2 \mathbf{E_y}}{\partial \mathbf{z}^2} = \mathbf{0}$	$\dfrac{\partial^2 \mathbf{B_y}}{\partial \mathbf{t}^2} - \dfrac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{\mu_0 \varepsilon_0}} \dfrac{\partial^2 \mathbf{B_y}}{\partial \mathbf{z}^2} = \mathbf{0}$
$\hat{\mathbf{z}}$	$\mathbf{E_z} = \textbf{Const.}$	$\mathbf{B_z} = \textbf{Const.}$

Resumidamente, temos para as componentes **x** e **y** dos campos, equações do tipo:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - \frac{1}{\vartheta^2}\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0$$

Equação da Onda

que corresponde a uma onda se propagando na direção **z** com velocidade

$$\vartheta = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}$$

Velocidade de Propagação

Na direção de propagação teremos campos constantes, via de regra considerados nulos.

Cabe salientar as relação entre os pares (E_x,B_y) e (E_y,B_x), perpendiculares entre si e também a direção de propagação.

NOTA:

Usando os valores numéricos de μ_0 e ε_0 obtemos ϑ **= 2.99792×10^8 m/s = c !!!!**

Ondas Eletromagnéticas Planas

Considerando as expressões obtidas na seção anterior, ou seja,

	$\vec{E}$	$\vec{B}$
$\hat{x}$	$\frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = 0$	$\frac{\partial^2 B_x}{\partial t^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 B_x}{\partial z^2} = 0$
$\hat{y}$	$\frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} = 0$	$\frac{\partial^2 B_y}{\partial t^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 B_y}{\partial z^2} = 0$
$\hat{z}$	$E_z = \text{Const.}$	$B_z = \text{Const.}$

onde:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}$$

•Somente $\mathbf{E_x}$ e $\mathbf{B_y}$ são de interesse.

(As demais componentes são consideradas nulas.)

vamos supor, no presente contexto, que:

$$E_x(z,t) = E_x(z-ct) \qquad \text{e} \qquad B_y(z,t) = B_y(z-ct)$$

Sendo $\alpha = \mathbf{z - ct}$, temos:

$$\frac{\partial \mathbf{E_x}}{\partial \mathbf{z}} = \frac{\partial \mathbf{E_x}}{\partial \boldsymbol{\alpha}} \frac{\partial \boldsymbol{\alpha}}{\partial \mathbf{z}} = \frac{\partial \mathbf{E_x}}{\partial \boldsymbol{\alpha}}$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 \mathbf{E_x}}{\partial \mathbf{z}^2} = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\alpha}}\left(\frac{\partial \mathbf{E_x}}{\partial \mathbf{z}}\right) = \frac{\partial^2 \mathbf{E_x}}{\partial \boldsymbol{\alpha}^2}}$$

$$\frac{\partial \mathbf{E_x}}{\partial \mathbf{t}} = \frac{\partial \mathbf{E_x}}{\partial \boldsymbol{\alpha}} \frac{\partial \boldsymbol{\alpha}}{\partial \mathbf{t}} = -\mathbf{c}\frac{\partial \mathbf{E_x}}{\partial \boldsymbol{\alpha}}$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 \mathbf{E_x}}{\partial \mathbf{t}^2} = -\mathbf{c}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\alpha}}\left(\frac{\partial \mathbf{E_x}}{\partial \mathbf{t}}\right) = \mathbf{c}^2 \frac{\partial^2 \mathbf{E_x}}{\partial \boldsymbol{\alpha}^2}}$$

Levando estes resultados na respectiva equação da onda, obtemos:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E_x}}{\partial \boldsymbol{\alpha}^2} - \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{c}^2}\left(\boxed{\mathbf{c}^2 \frac{\partial^2 \mathbf{E_x}}{\partial \boldsymbol{\alpha}^2}}\right) = \mathbf{0}$$

Portanto **Ex(z,t) = Ex(z-ct)** é uma solução da equação da onda.

Isto também é valido para **By(z,t) = By(z-ct)** e sua equação de onda.

Das relações entre $\mathbf{E_x}$ e $\mathbf{B_y}$, obtidas no inicio da seção anterior,

$$\frac{\partial \mathbf{B_y}}{\partial \mathbf{t}} = -\frac{\partial \mathbf{E_x}}{\partial \mathbf{z}} \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial \mathbf{B_y}}{\partial \mathbf{z}} = -\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E_x}}{\partial \mathbf{t}} = -\frac{1}{\mathbf{c}^2} \frac{\partial \mathbf{E_x}}{\partial \mathbf{t}}$$

obtemos:

$$\frac{\partial \mathbf{B_y}}{\partial \mathbf{t}} = -\frac{\partial \mathbf{E_x}}{\partial \boldsymbol{\alpha}} \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial \mathbf{B_y}}{\partial \mathbf{z}} = -\frac{1}{\mathbf{c}^2}\left(-\mathbf{c}\frac{\partial \mathbf{E_x}}{\partial \boldsymbol{\alpha}}\right) = \frac{1}{\mathbf{c}} \frac{\partial \mathbf{E_x}}{\partial \boldsymbol{\alpha}}$$

Como **By(z,t) = By(z-ct)** também é solução da equação de onda, temos :

$$\frac{\partial \mathbf{B_y}}{\partial \mathbf{t}} = -\mathbf{c}\frac{\partial \mathbf{B_y}}{\partial \boldsymbol{\alpha}} \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial \mathbf{B_y}}{\partial \mathbf{z}} = \frac{\partial \mathbf{B_y}}{\partial \boldsymbol{\alpha}}$$

Portanto, aplicando estes resultados nas relações obtidas acima, obtemos:

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\alpha}}\left(\mathbf{B_y} - \frac{1}{\mathbf{c}}\mathbf{E_x}\right) = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{B_y} - \frac{1}{\mathbf{c}}\mathbf{E_x} = \mathbf{k_0} \quad \text{onde} \quad \mathbf{k_0} = \mathbf{const.}}$$

Escolhendo **k₀ = 0**, podemos escrever:

$$B_y = \frac{1}{c}E_x \quad \Rightarrow \quad \left|\vec{B}\right| = \frac{\left|\vec{E}\right|}{c}$$

e finalmente:

$$\boxed{\vec{E}(z,t) = E_x(z-ct)\hat{x}}$$

$$\boxed{\vec{B}(z,t) = B_y(z-ct)\hat{y} = \frac{1}{c}E_x(z-ct)\hat{x} = \frac{1}{c}\hat{z}\times\vec{E}(z,t)}$$

NOTA

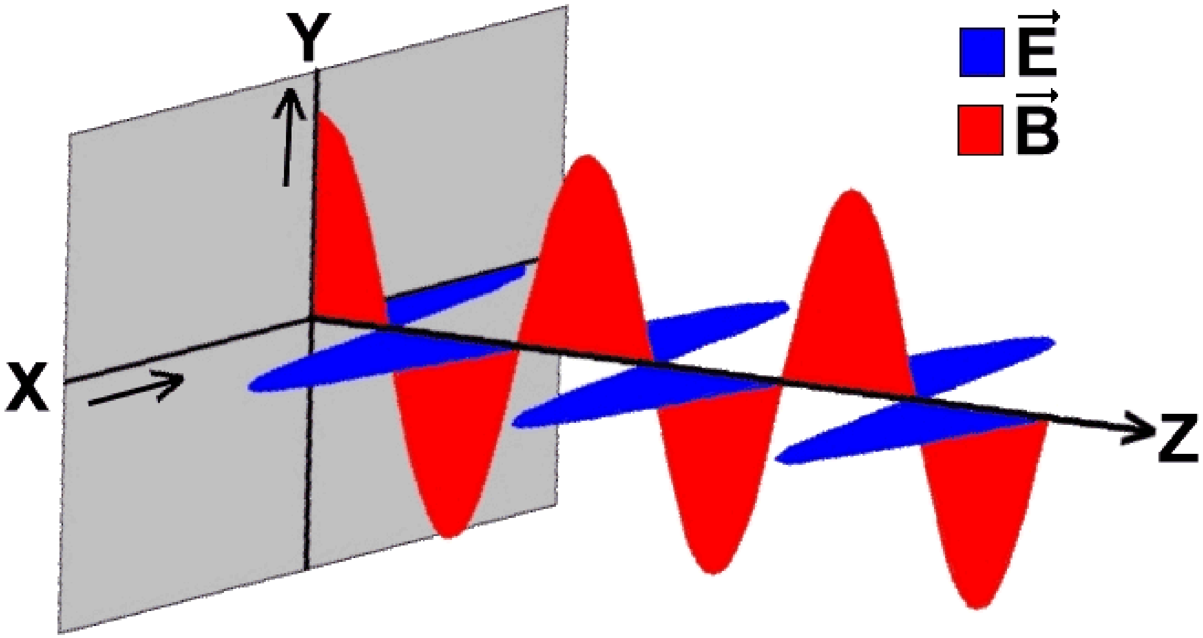
Rigorosamente falando, $\mathbf{E_x(z,t)=E_x(z-ct+k_1)+k_2}$ e $\mathbf{B_y(z,t)=B_y(z-ct+k_3)+k_4}$ (k_n = const.) também são soluções da equação da onda. Contudo, estas constantes foram igualmente consideradas como nulas.

Escolhendo a forma mais simples para a solução, temos:

$$\vec{\mathbf{E}} = \mathbf{A}\cos(\mathbf{kz} - \boldsymbol{\omega}\mathbf{t} + \boldsymbol{\varphi})\hat{\mathbf{x}} \quad \Rightarrow \quad \vec{\mathbf{B}} = \frac{\mathbf{A}}{\mathbf{c}}\cos(\mathbf{kz} - \boldsymbol{\omega}\mathbf{t} + \boldsymbol{\varphi})\hat{\mathbf{y}}$$

onde **A** é a amplitude ou intensidade da onda, **f** a freqüência, **T = 1/f** o período, ω **= 2πf**, φ uma constante de fase (φ=0), **k =** ω**/c** o numero de onda e λ **= 2π/k** o comprimento de onda. Evidentemente a relação **c =** λ**f** é obtida facilmente.

Visualizando isto, temos:



Equação de Ondas não Homogênea para os Campos

Lembrando da relação matemática, $\nabla \times \nabla \times \vec{\mathbf{f}} = -\nabla^2 \vec{\mathbf{f}} + \nabla\left(\nabla \cdot \vec{\mathbf{f}}\right)$ e tomando o rotacional de ambos os lados da equação (Maxwell)

$$\nabla \times \vec{\mathbf{E}} = -\frac{\partial \vec{\mathbf{B}}}{\partial \mathbf{t}}$$

temos: $\nabla \times \left(\nabla \times \vec{\mathbf{E}}\right) = -\nabla \times \left(\frac{\partial \vec{\mathbf{B}}}{\partial \mathbf{t}}\right) \Rightarrow \nabla^2 \vec{\mathbf{E}} - \nabla\left(\nabla \cdot \vec{\mathbf{E}}\right) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{t}}\left(\nabla \times \vec{\mathbf{B}}\right)$

como $\nabla \times \vec{\mathbf{B}} = \boldsymbol{\mu}_0 \vec{\mathbf{J}} + \mathbf{c}^2 \frac{\partial \vec{\mathbf{E}}}{\partial \mathbf{t}}$ e $\nabla \cdot \vec{\mathbf{E}} = \frac{\boldsymbol{\rho}}{\boldsymbol{\varepsilon}_0}$ (eq.'s Maxwell), obtemos:

$$\nabla^2 \vec{\mathbf{E}} - \nabla\left(\frac{\boldsymbol{\rho}}{\boldsymbol{\varepsilon}_0}\right) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{t}}\left(\boldsymbol{\mu}_0 \vec{\mathbf{J}} + \mathbf{c}^2 \frac{\partial \vec{\mathbf{E}}}{\partial \mathbf{t}}\right) \Rightarrow \boxed{\nabla^2 \vec{\mathbf{E}} - \mathbf{c}^2 \frac{\partial^2 \vec{\mathbf{E}}}{\partial \mathbf{t}^2} = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{\varepsilon}_0} \nabla \boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{\mu}_0 \frac{\partial \vec{\mathbf{J}}}{\partial \mathbf{t}}}$$

Equação de onda não homogênea

De maneira análoga, obtemos a equação de onda não homogênea correspondente ao campo magnético. Então, finalmente, temos:

$$\nabla^2\vec{\mathbf{E}} - \mathbf{c}^2\frac{\partial^2\vec{\mathbf{E}}}{\partial \mathbf{t}^2} = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{\varepsilon}_0}\nabla\boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{\mu}_0\frac{\partial\vec{\mathbf{J}}}{\partial \mathbf{t}} \quad \text{e} \quad \nabla^2\vec{\mathbf{B}} - \mathbf{c}^2\frac{\partial^2\vec{\mathbf{B}}}{\partial \mathbf{t}^2} = \boldsymbol{\mu}_0\nabla\times\vec{\mathbf{J}}$$

No caso estático, onde ambos campos, correntes e distribuição de cargas não variam com o tempo, obtemos as equações de Poisson para os campos (estáticos):

$$\nabla^2\vec{\mathbf{E}} = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{\varepsilon}_0}\nabla\boldsymbol{\rho} \quad \text{e} \quad \nabla^2\vec{\mathbf{B}} = \boldsymbol{\mu}_0\nabla\times\vec{\mathbf{J}}$$

Na ausência de cargas e correntes, obtemos as equações tridimensionais, similares ao caso unidimensional que analisamos previamente.

Obter soluções tipo ondas planas, nesta situação (em coordenadas cartesianas) não é demasiadamente difícil. Mas, não se obtém informações alem do visto anteriormente.

Seria muito interessante obter soluções tipo ondas esféricas. Contudo, ao escrevermos as equações acima em coordenadas esféricas o panorama fica muito complicado!

Equação de Ondas para os Potenciais

Relembrando as equações de Maxwell

$$\nabla \cdot \vec{\mathbf{E}} = \frac{\boldsymbol{\rho}}{\boldsymbol{\varepsilon_0}} \qquad \nabla \times \vec{\mathbf{E}} + \frac{\partial \vec{\mathbf{B}}}{\partial \mathbf{t}} = 0 \qquad \nabla \cdot \vec{\mathbf{B}} = \mathbf{0} \qquad \nabla \times \vec{\mathbf{B}} - \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{c}^2}\frac{\partial \vec{\mathbf{E}}}{\partial \mathbf{t}} = \boldsymbol{\mu_0}\vec{\mathbf{J}}$$

sendo **J** e ρ são dados e satisfazem a equação da continuidade $\nabla \cdot \vec{\mathbf{J}} + \partial \boldsymbol{\rho} / \partial \mathbf{t} = \mathbf{0}$, temos:

$$\nabla \cdot \vec{\mathbf{B}} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{\mathbf{B}} = \nabla \times \vec{\mathbf{A}}$$

$$\nabla \times \vec{\mathbf{E}} + \frac{\partial \vec{\mathbf{B}}}{\partial \mathbf{t}} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \nabla \times \left(\vec{\mathbf{E}} + \frac{\partial \vec{\mathbf{A}}}{\partial \mathbf{t}} \right) = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{\mathbf{E}} + \frac{\partial \vec{\mathbf{A}}}{\partial \mathbf{t}} = -\nabla \boldsymbol{\varphi}$$

onde A e φ são os potenciais vetor e escalar, respectivamente. Aplicando estes resultados nas outras duas equações, obtemos:

$$\nabla \times \nabla \times \vec{\mathbf{A}} - \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{c}^2}\frac{\partial}{\partial \mathbf{t}}\left(-\nabla \boldsymbol{\varphi} - \frac{\partial \vec{\mathbf{A}}}{\partial \mathbf{t}} \right) = \boldsymbol{\mu_0}\vec{\mathbf{J}} \qquad \text{e} \qquad -\nabla \cdot \left(\nabla \boldsymbol{\varphi} + \frac{\partial \vec{\mathbf{A}}}{\partial \mathbf{t}} \right) = \frac{\boldsymbol{\rho}}{\boldsymbol{\varepsilon_0}}$$

$$\boxed{\nabla\times\nabla\times\vec{\mathbf{A}}-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{c}^2}\frac{\partial}{\partial\mathbf{t}}\left(-\nabla\boldsymbol{\varphi}-\frac{\partial\vec{\mathbf{A}}}{\partial\mathbf{t}}\right)=\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{0}}\vec{\mathbf{J}} \qquad \text{e} \qquad -\nabla\cdot\left(\nabla\boldsymbol{\varphi}+\frac{\partial\vec{\mathbf{A}}}{\partial\mathbf{t}}\right)=\frac{\boldsymbol{\rho}}{\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{0}}}}$$

Usando novamente a relação $\nabla\times\nabla\times\vec{\mathbf{f}}=-\nabla^{2}\vec{\mathbf{f}}+\nabla\left(\nabla\cdot\vec{\mathbf{f}}\right)$, obtemos:

$$\nabla\cdot\left(\nabla\cdot\vec{\mathbf{A}}+\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{c}^2}\frac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial\mathbf{t}}\right)-\nabla^2\vec{\mathbf{A}}+\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{c}^2}\frac{\partial^2\vec{\mathbf{A}}}{\partial\mathbf{t}^2}=\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{0}}\vec{\mathbf{J}}$$

e

$$-\nabla^2\boldsymbol{\varphi}+\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{c}^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{\varphi}}{\partial\mathbf{t}^2}-\frac{\partial}{\partial\mathbf{t}}\left(\nabla\cdot\vec{\mathbf{A}}+\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{c}^2}\frac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial\mathbf{t}}\right)=\frac{\boldsymbol{\rho}}{\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{0}}}$$

Tais equações sofrem uma significativa simplificação ao impor a condição de Lorentz

$$\boxed{\nabla\cdot\vec{\mathbf{A}}+\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{c}^2}\frac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial\mathbf{t}}=0}$$

resultando, finalmente, nas equações de onda não homogêneas:

$$\nabla^2\vec{\mathbf{A}} - \frac{1}{\mathbf{c}^2}\frac{\partial^2\vec{\mathbf{A}}}{\partial \mathbf{t}^2} = -\mu_0\vec{\mathbf{J}} \quad \text{e} \quad \nabla^2\varphi - \frac{1}{\mathbf{c}^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial \mathbf{t}^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Sendo **A** e φ os potenciais que fornecem os campos **E** e **B**, é fácil demonstrar que qualquer escolha **A'** e **φ'** do tipo

$$\vec{\mathbf{A}}' = \vec{\mathbf{A}} + \nabla\gamma \quad \text{e} \quad \varphi' = \varphi - \frac{\partial\gamma}{\partial \mathbf{t}}$$

onde γ é uma função escalar, obtemos o mesmo resultado para os campos **E** e **B**. Assim, sendo

$$-\left(\nabla\cdot\vec{\mathbf{A}} + \frac{1}{\mathbf{c}^2}\frac{\partial\varphi}{\partial \mathbf{t}}\right) = \nabla^2\gamma - \frac{1}{\mathbf{c}^2}\frac{\partial^2\gamma}{\partial \mathbf{t}^2}$$

Então, se **A** e φ satisfazem a condição de Lorentz, **A'** e **φ'** também o farão desde que γ satisfaça a equação da onda. Se por exemplo **A** e φ não satisfizerem a condição de Lorentz, poderemos ainda escolher novos potenciais (**A'** e **φ'**) que o fazem escolhendo um γ conveniente que seja solução da equação de onda não homogênea mostrada acima!

Supondo que φ **=** $\boldsymbol{\varphi}$**(r,t)** e ρ **= 0**, a respectiva equação de onda (coord. esféricas) fica:

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=0$$

Multiplicando ambos os membros por **r**, e chamando **r**$\boldsymbol{\varphi}$**(r,t) = F(r,t),** obtemos:

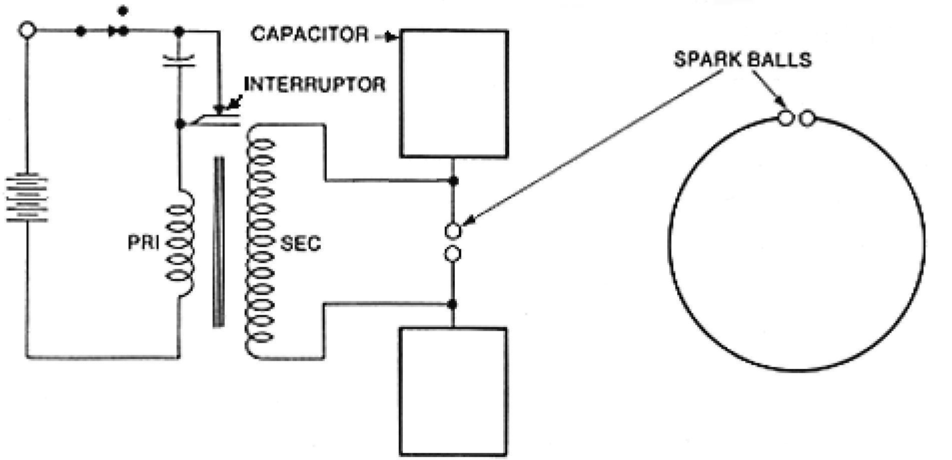
$$\nabla^2 F-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 F}{\partial t^2}=0$$

Cuja solução geral é do tipo **F(r,t) = F(r-ct) + F(r-ct),** fornecendo finalmente:

$$\varphi=\frac{F(r-ct)}{r}+\frac{F(r+ct)}{r}$$

O primeiro termo representa uma **onda esférica** divergente (fonte) e o segundo uma onda esférica convergente (sumidouro), se propagando com velocidade **c**.

Verificação Experimental de Hertz

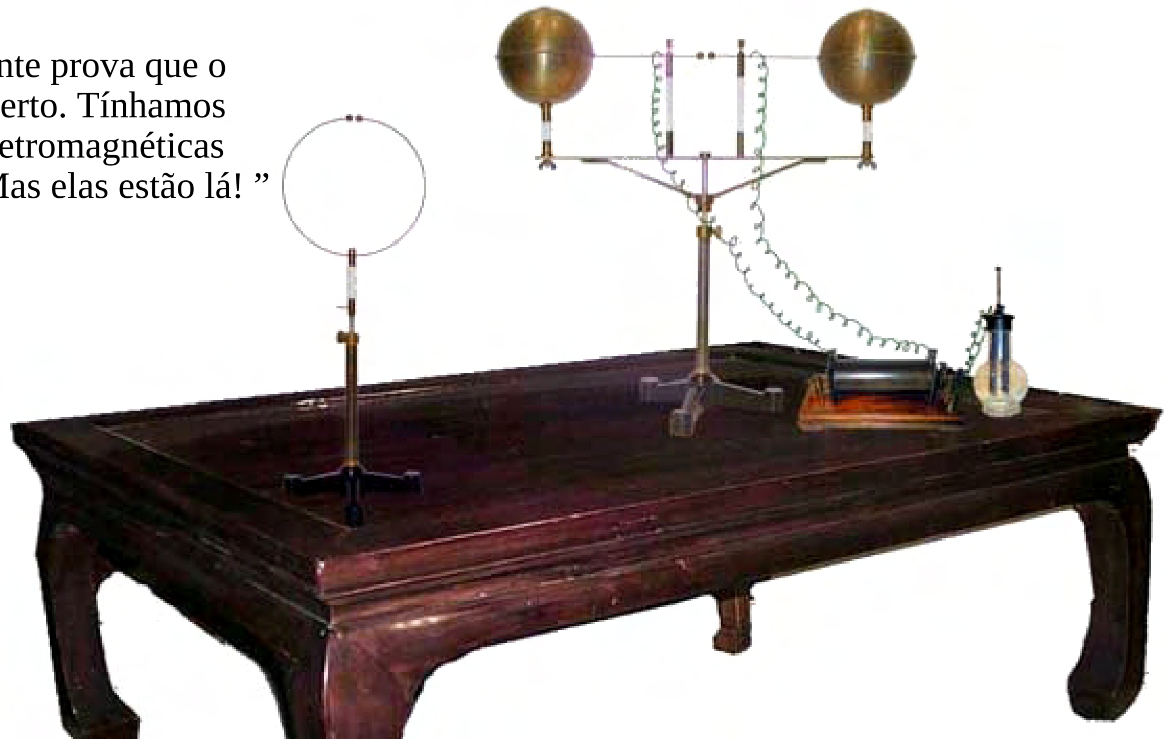


Heinrich Hertz
1888
Untersuchungen Ueber Die Ausbreitung Der Elektrischen Kraft
(Investigations on the Propagation of Electrical Energy)

Hertz: “Isto não tem uso. Somente prova que o mestre Maxwell estava certo. Tínhamos estas misteriosas onda eletromagnéticas que não podíamos ver. Mas elas estão lá! ”

Estudante: “E o que vem a seguir ?"

Hertz: ”Nada! Eu acho."



Referencias Bibliográficas

- Curso de Física Básica, Vol. 3 Eletromagnetismo, H.M. Nussenzveig, cap. 12.
- Física, Vol. 2, F.J. Kelly, W.E. Gettys e M.J. Skove, cap. 34.
- Fundamentos da Teoria Eletromagnetica, J.R. Reitz, F.J. Milford e R.W. Christy.
- Electromagnetic Field and Waves, P. Lorrain and D.R. Corson