ANALISE DE CIRCUITOS ELÉTRICOS

J.R. Kaschny

(2004)

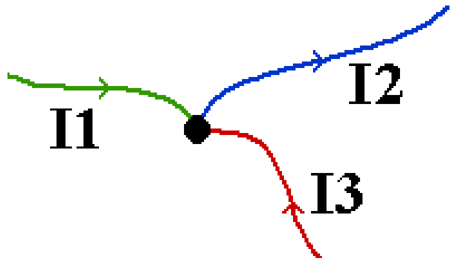
Leis de Kirchhoff

Lei dos Nós

O somatório de todas as correntes que entram e saem de um nó é nulo.

Nó em um circuito elétrico é qualquer ponto/junção por onde flui uma corrente elétrica.

Esta lei expressa a continuidade do fluxo de cargas elétricas!



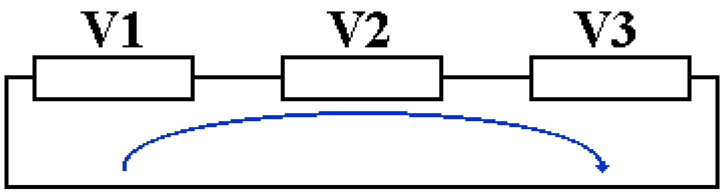
$$I_1 - I_2 + I_3 = 0$$

Lei das Malhas

O somatório de todas as quedas ou elevações de tensões em uma malha é nulo.

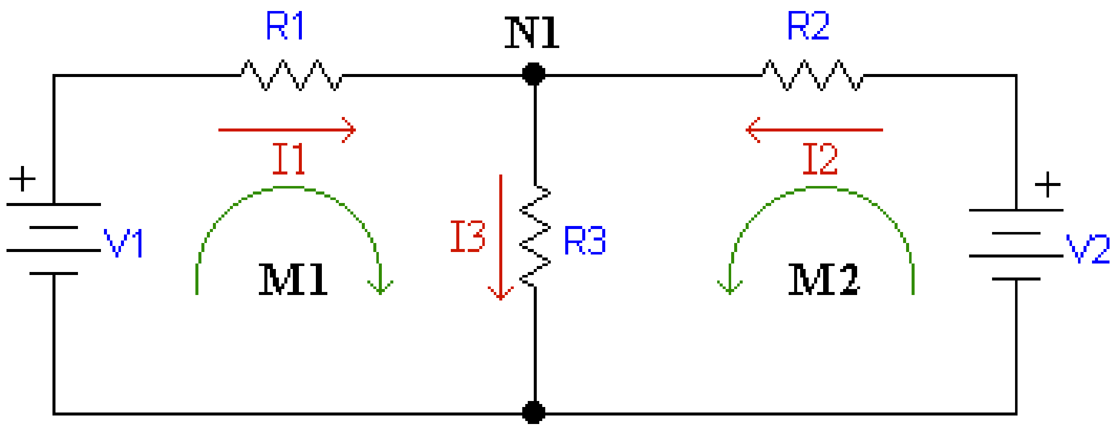
Malha ou laço em um circuito elétrico é qualquer caminho fechado por onde flui uma corrente.

Esta lei expressa a conservação de energia!



$$V_1 + V_2 + V_3 = 0$$

EXEMPLO:



$$\begin{cases} \text{N1:} \quad I_1 + I_2 - I_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad I_3 = I_1 + I_2 \\ \text{M1:} \quad V_1 - R_1 I_1 - R_3 I_3 = 0 \\ \text{M2:} \quad V_2 - R_2 I_2 - R_3 I_3 = 0 \end{cases}$$

com $V_{Rj} = R_j I_j \quad j \in \{1,2,3\}$

$$\boxed{\begin{array}{ccccc} (R_1 + R_2)I_1 & + & R_3 I_2 & = & V_1 \\ R_3 I_1 & + & (R_2 + R_3)I_2 & = & V_2 \end{array}}$$

como:

$$\mathbf{\Delta = \begin{vmatrix} (R_1 + R_3) & R_3 \\ R_3 & (R_2 + R_3) \end{vmatrix} = R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3}$$

$$\mathbf{\Delta_1 = \begin{vmatrix} V_1 & R_3 \\ V_2 & (R_2 + R_3) \end{vmatrix} = V_1(R_2 + R_3) - V_2R_3}$$

$$\mathbf{\Delta_2 = \begin{vmatrix} (R_1 + R_3) & V_1 \\ R_3 & V_2 \end{vmatrix} = V_2(R_1 + R_3) - V_1R_3}$$

portanto:

$$\boxed{\mathbf{I_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{V_1(R_2 + R_3) - V_2R_3}{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3}}} \qquad \boxed{\mathbf{I_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{V_2(R_1 + R_3) - V_1R_3}{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3}}}$$

$$\boxed{I_3 = \frac{V_1R_2 + V_2R_1}{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3}}$$

LINEARIDADE

Um elemento linear é aquele elemento passivo que apresenta uma relação tensão-corrente linear.

Um circuito linear é aquele circuito composto inteiramente de fontes independentes, fontes dependentes lineares e elementos lineares.

Entendemos como fonte dependente linear toda a fonte dependente cuja magnitude seja uma função linear de alguma quantidade mensurável no circuito considerado. Se o parâmetro de controle for externo, esta fonte constituíra uma variável independente.

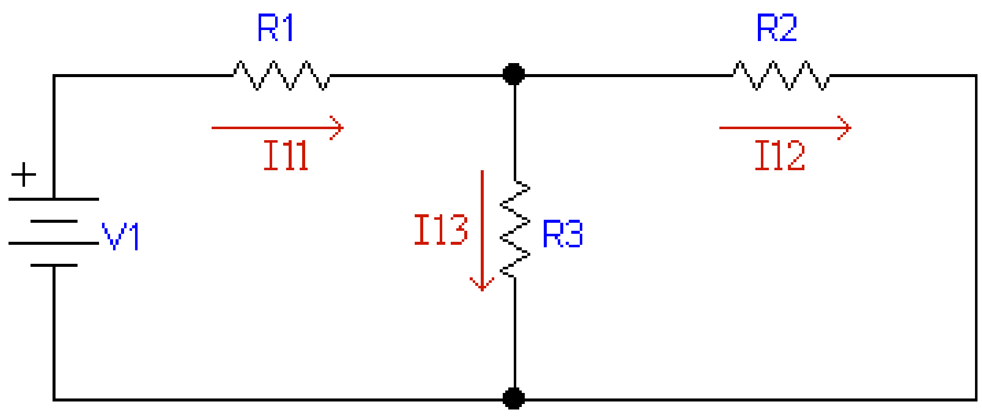
Exemplo: .... um resistor, onde V = R.I (Lei de Ohm)

SUPERPOSIÇÃO

A corrente em qualquer elemento linear, ou a tensão através de qualquer elemento linear, de um circuito linear, é a soma das correntes ou tensões produzidas separadamente por cada fonte de energia (fonte de corrente ou tensão).

EXEMPLO: Considerando o circuito anterior, vamos novamente determinar as correntes.

1º Passo: Substituindo V_2 por um curto circuito!



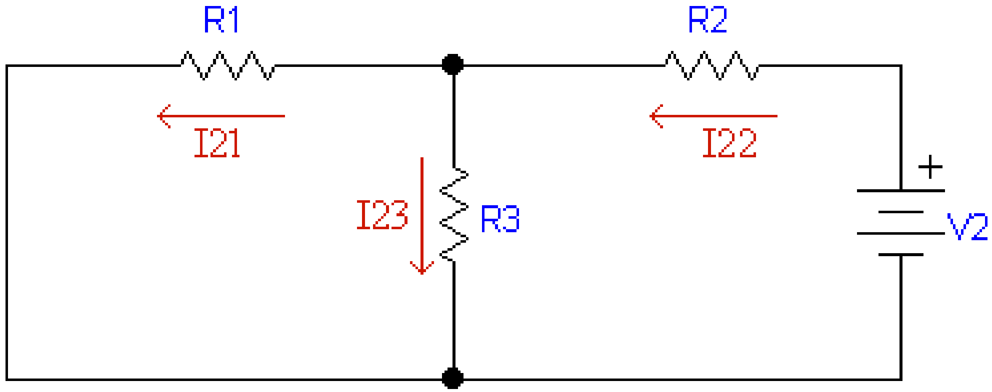
$$\mathbf{I_{11} = V_1 / \left(R_1 + R_2 // R_3\right)}$$

$$\mathbf{I_{12} = \left[R_3 / \left(R_2 + R_3\right)\right] \cdot I_{11}}$$

$$\mathbf{I_{13} = \left[R_2 / \left(R_2 + R_3\right)\right] \cdot I_{11}}$$

onde: $$\mathbf{R_2 // R_3 = \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}}$$

2º Passo: Substituindo V_1 por um curto circuito!



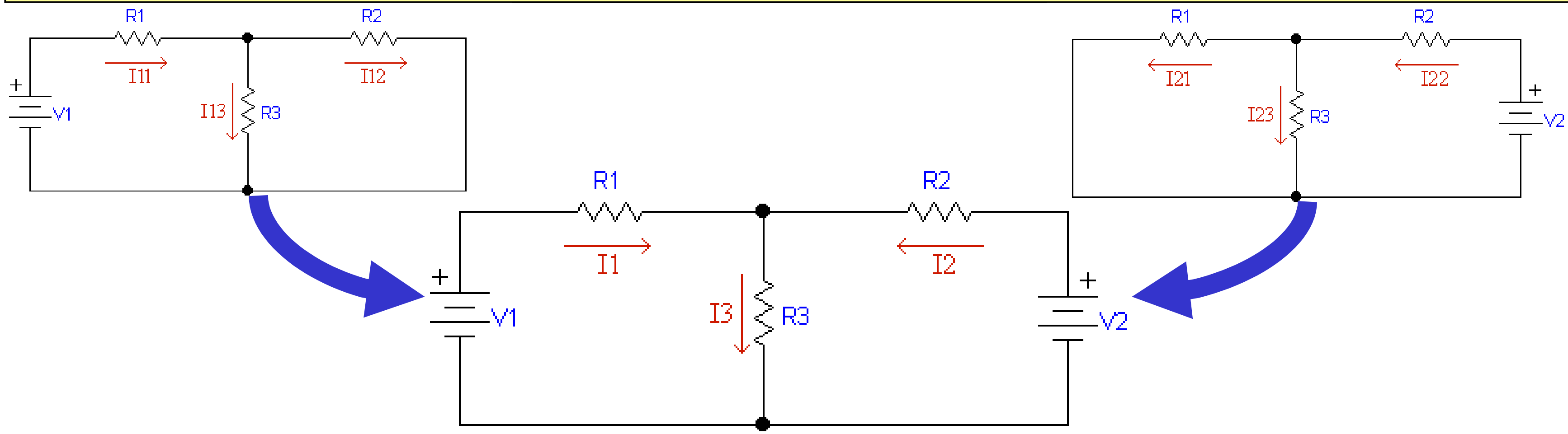
$$I_{22} = V_2 / (R_2 + R_1 // R_3)$$

$$I_{21} = [R_3 / (R_1 + R_3)] \cdot I_{22}$$

$$I_{23} = [R_1 / (R_1 + R_3)] \cdot I_{22}$$

onde: $R_1 // R_3 = \dfrac{R_1 R_3}{R_1 + R_3}$

3º Passo: Aplicando a superposição!

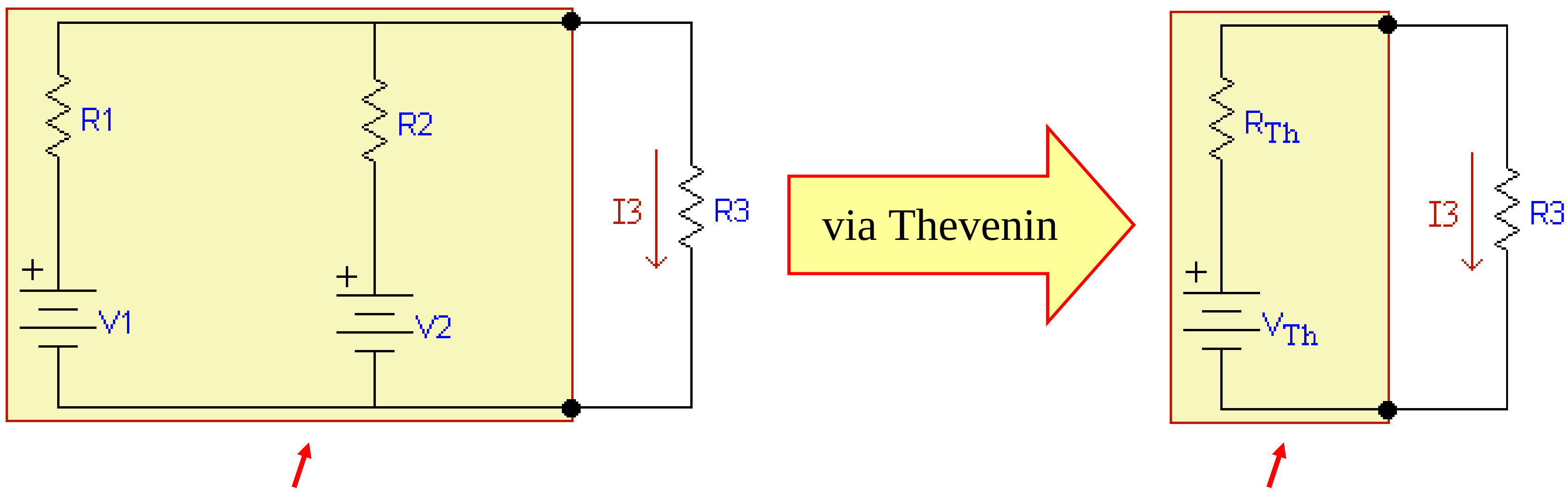


$$I_1 = I_{11} - I_{21} \qquad I_2 = I_{22} - I_{12} \qquad I_3 = I_{13} + I_{23}$$

TEOREMA DE THEVENIN

Qualquer circuito linear de dois terminais, ou seja, um circuito que pode ser reduzido a um dipolo, contendo fontes de tensão e/ou corrente, pode ser representado por um circuito equivalente composto por uma fonte de tensão, com tensão igual a do circuito em aberto, em serie com uma resistência de valor igual a resistência equivalente medida no circuito original.

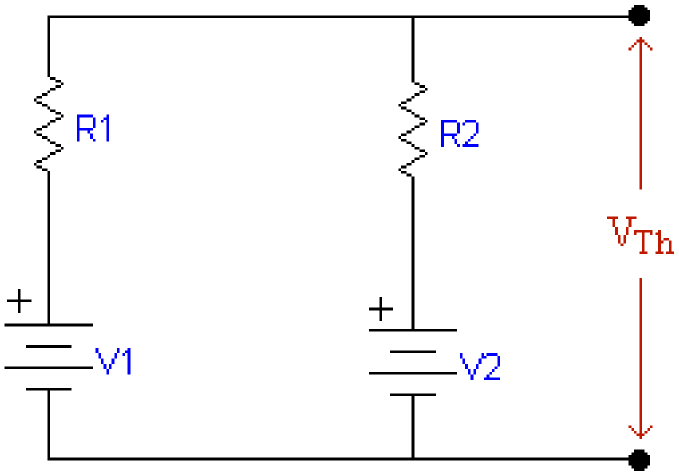
EXEMPLO: Considerando o circuito original, vamos determinar a corrente I_3.



Rede de 2 terminais

Circuito equivalente

1º Passo: Calculando V_{Th}!



$$V_{Th} = V_2 + R_2 I'_{R2}$$

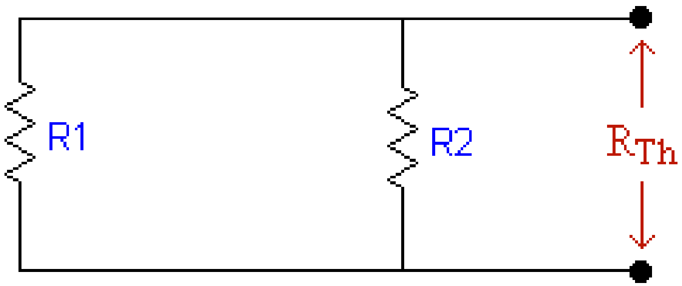
$$V_1 - R_1 I'_{R1} - R_2 I'_{R2} - V_2 = 0$$

com $I'_{R1} = I'_{R2} = I'$

$$V_1 - V_2 = (R_1 + R_2) \cdot I' \quad \Rightarrow \quad I' = \frac{V_1 - V_2}{R_1 + R_2}$$

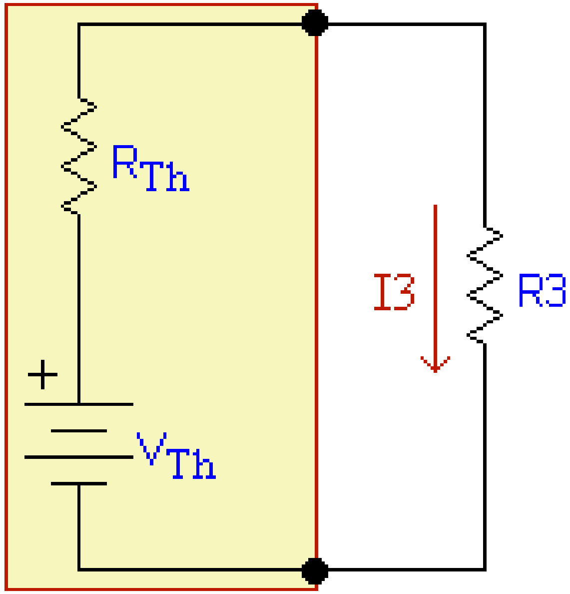
$$\Rightarrow \quad V_{Th} = V_2 + R_2 \cdot \frac{V_1 - V_2}{R_1 + R_2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{V_{Th} = \frac{V_2 R_1 + V_1 R_2}{R_1 + R_2}}$$

2º Passo: Calculando R_{Th}!



$$\boxed{R_{Th} = R_1 // R_2 = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}}$$

3º Passo: Calculando I_3!



$$V_{Th} - R_{Th} I_3 - R_3 I_3 = 0$$

$$\left[\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + R_3\right] \cdot I_3 = \frac{V_2 R_1 + V_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

$$\left[\frac{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}{R_1 + R_2}\right] \cdot I_3 = \frac{V_2 R_1 + V_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

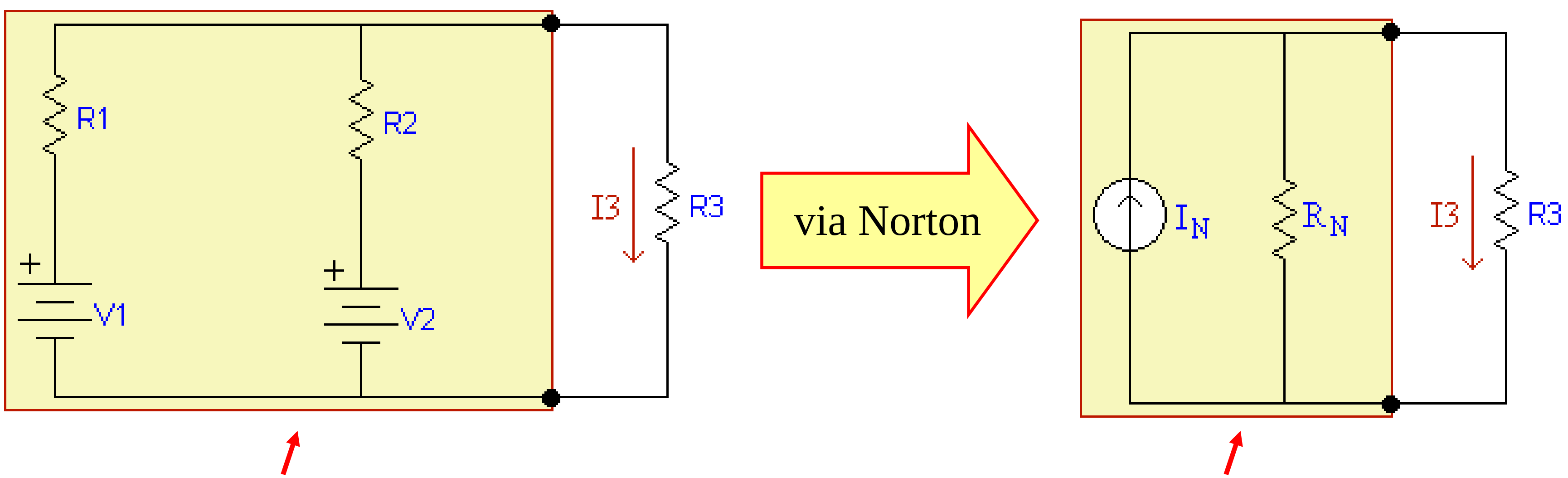
$$\Rightarrow \quad \boxed{I_3 = \frac{V_2 R_1 + V_1 R_2}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}}$$

Que constitui o mesmo resultado obtido inicialmente!

TEOREMA DE NORTON

Qualquer circuito linear de dois terminais, ou seja, um circuito que pode ser reduzido a um dipolo, contendo fontes de tensão e/ou corrente, pode ser representado por um circuito equivalente composto por uma fonte de corrente, com corrente igual a corrente de curto circuito, em paralelo com uma resistência de valor igual a resistência equivalente medida no circuito original.

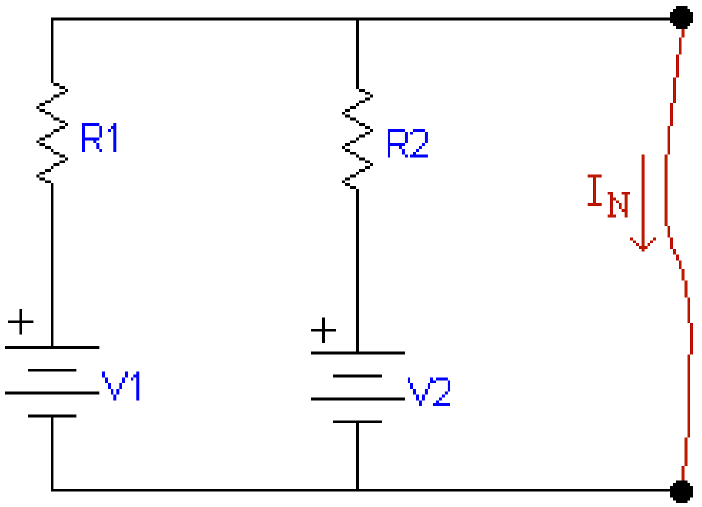
EXEMPLO: Considerando o circuito original, vamos novamente determinar a corrente I_3.



Rede de 2 terminais

Circuito equivalente

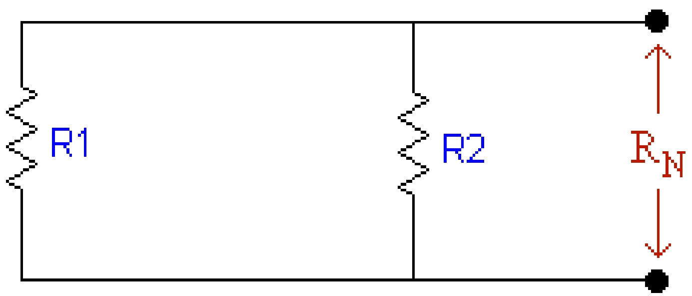
1º Passo: Calculando V_N!



$$I_N = I'_{R1} + I'_{R2} = \frac{V_1}{R_1} + \frac{V_2}{R_2}$$

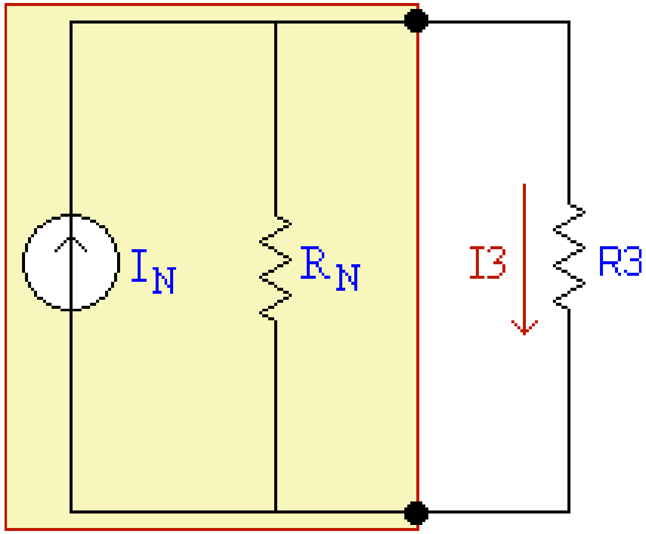
$$\Rightarrow \boxed{I_N = \frac{V_1R_2 + V_2R_1}{R_1R_2}}$$

2º Passo: Calculando R_N!



$$\boxed{\mathbf{R_N = R_1//R_2 = \frac{R_1R_2}{R_1 + R_2}}}$$

3º Passo: Calculando I_3!



$$\mathbf{I_3 = \frac{R_N}{R_N + R_3} I_N}$$

$$I_3 = \left[\frac{\left(\dfrac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \right)}{\left(\dfrac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \right) + R_3} \right] \cdot \left(\frac{V_1 R_2 + V_2 R_1}{R_1 R_2} \right)$$

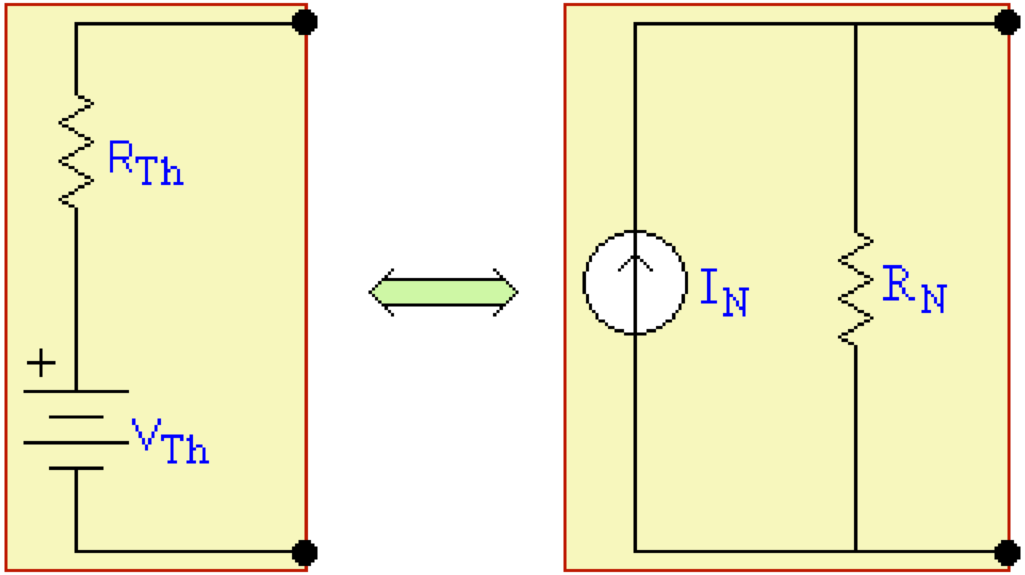
$$\Rightarrow \quad \boxed{\mathbf{I_3 = \frac{V_2 R_1 + V_1 R_2}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}}}$$

Que também constitui o mesmo resultado obtido inicialmente!

EQUIVALÊNCIA ENTRE THEVENIN E NORTON

Via as definições de V_{Th}, R_{Th}, I_N e R_N, é possível constatar facilmente a intima relação entre ambos os teoremas, onde:

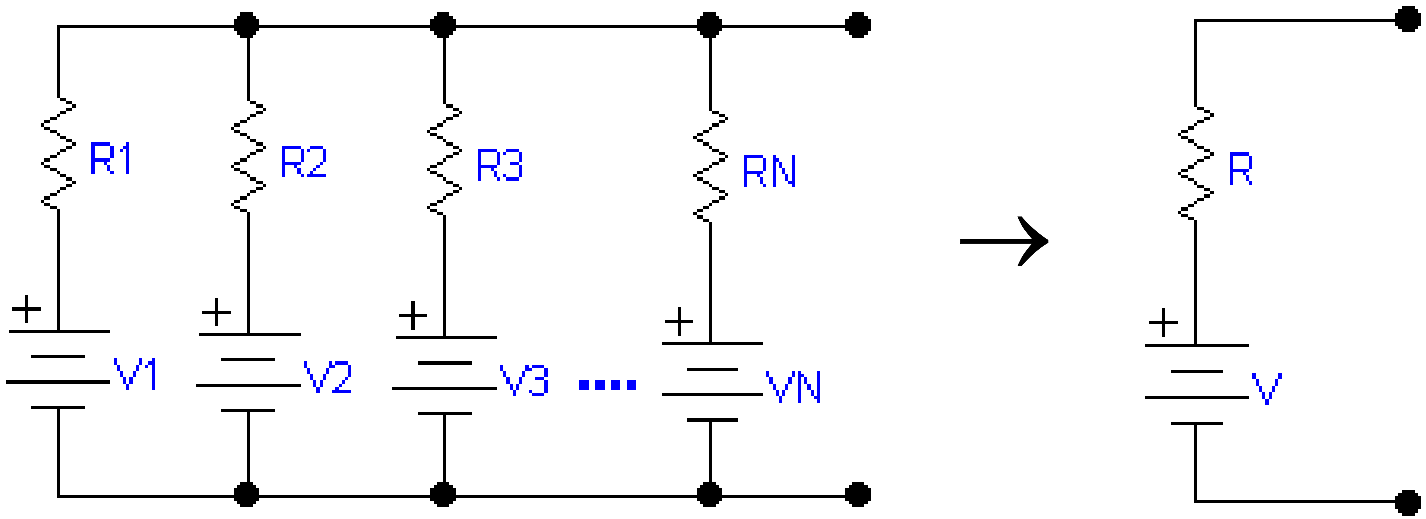
$$\mathbf{R_{Th} = R_N = R} \quad \text{e} \quad \mathbf{I_N = \frac{V_{Th}}{R}}$$



TEOREMA DE MILLMAN

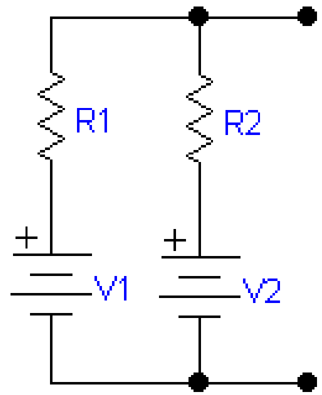
Um conjunto de N fontes de tensão, V_n (n=1,2,3, ..., N), associadas em paralelo, cada qual com uma resistência interna R_n, pode ser representado por uma única fonte de tensão V em serie com um resistor R, tal que:

$$\mathbf{V} = \frac{\sum_{n=1}^{N} \mathbf{V_n / R_n}}{\mathbf{1/R}} \qquad \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{R}} = \sum_{n=1}^{N} \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{R_n}}$$



Demonstrando este teorema via indução, temos:

(i) Já que N = 1 é obviamente valido, vamos demonstrar o caso N = 2!

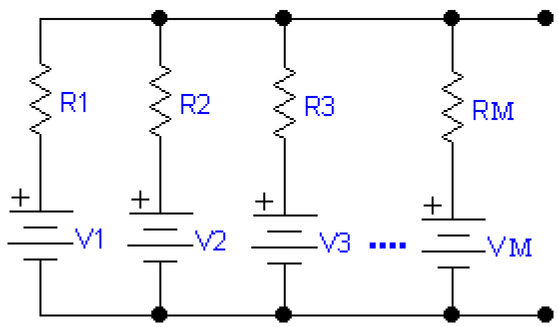


Determinando o circuito equivalente Thevenin, temos:

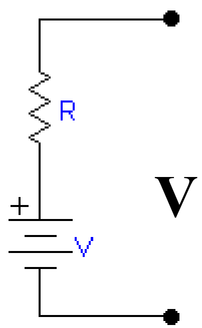
$$\mathbf{R_{Th} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = R} \quad \text{e} \quad \mathbf{V_{Th} = \frac{V_1 R_2 + V_2 R_1}{R_1 + R_2} = V}$$

$$\Rightarrow \mathbf{V = \left(\frac{V_1 R_2 + V_2 R_1}{R_1 + R_2}\right) \cdot \left(\frac{1/R_1 R_2}{1/R_1 R_2}\right) = \frac{V_1/R_1 + V_2/R_2}{1/R}} \quad \checkmark \text{OK!}$$

(ii) Supondo que para N = M o teorema é valido .....

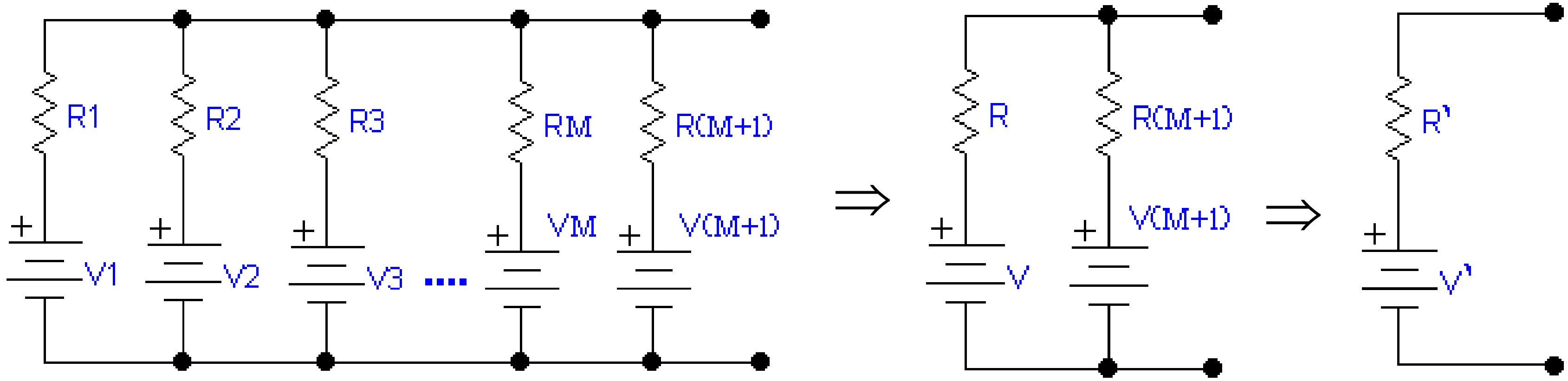


$\Rightarrow$



$$\mathbf{V = \frac{\sum_{n=1}^{M} V_n/R_n}{1/R}} \qquad \mathbf{\frac{1}{R} = \sum_{n=1}^{M} \frac{1}{R_n}}$$

(iii) Vamos mostrar que para N = M+1 o teorema também é valido .....



Aplicando novamente o teorema de Thevenin, temos:

$$\mathbf{R_{Th}} = \frac{\mathbf{R R_{M+1}}}{\mathbf{R + R_{M+1}}} = \left(\sum_{\mathbf{n=1}}^{\mathbf{M+1}} \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{R_n}} \right)^{-1} = \mathbf{R'} \quad \text{e} \quad \mathbf{V_{Th}} = \frac{\mathbf{V R_{M+1} + V_{M+1} R}}{\mathbf{R + R_{M+1}}} = \mathbf{V'}$$

$$\Rightarrow \mathbf{V'} = \left(\frac{\mathbf{V R_{M+1} + V_{M+1} R}}{\mathbf{R + R_{M+1}}} \right) \cdot \left(\frac{\mathbf{1/R R_{M+1}}}{\mathbf{1/R R_{M+1}}} \right) = \frac{\mathbf{V/R + V_{M+1}/R_{M+1}}}{\mathbf{1/R'}}$$

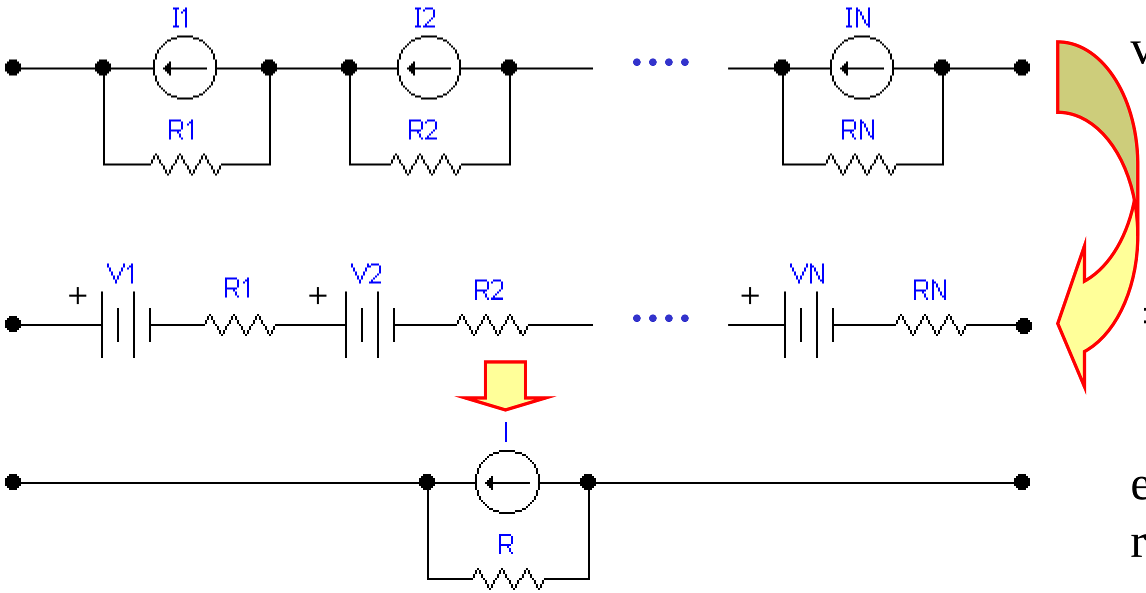
$$\Rightarrow \mathbf{V'} = \frac{\sum_{\mathbf{n=1}}^{\mathbf{M+1}} \mathbf{V_n / R_n}}{\mathbf{1/R'}}$$

$\surd$ **OK!**

DUAL DO TEOREMA DE MILLMAN

Um conjunto de N fontes de tensão, I_n (n=1,2,3, ..., N), associadas em serie, cada qual com uma resistência interna R_n, pode ser representado por uma única fonte de corrente I em paralelo com um resistor R, tal que:

$$\boxed{\mathbf{I} = \frac{\sum_{n=1}^{N} \mathbf{I_n R_n}}{\mathbf{R}} \qquad \mathbf{R} = \sum_{n=1}^{N} \mathbf{R_n}}$$



via o teorema de Thevenin ....

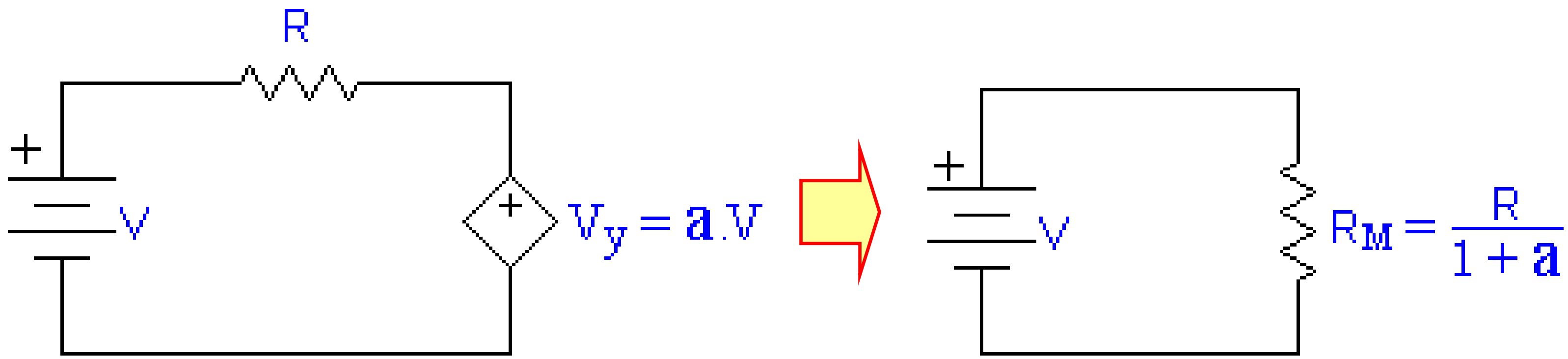
$$\mathbf{V_n = I_n.R_n} \qquad \mathbf{n \in \{1,\ 2,\ ....\ N\}}$$

$$\Rightarrow \mathbf{V} = \sum_{n=1}^{N} \mathbf{I_n \cdot R_n} \qquad \mathbf{R} = \sum_{n=1}^{N} \mathbf{R_n}$$

e via o teorema de Norton obtemos o resultado final, tal como anunciado.

TEOREMA DE MILLER

O teorema de Miller estabelece que, analisando o circuito abaixo (esq.), obteremos:



Analisando o circuito original, temos:

$$V = R.I - V_y = R.I - a.V \quad \Rightarrow \quad V.(1 + a) = R.I$$

$$\Rightarrow \quad V/I = R_M \quad \text{com} \quad R_M = R/(1 + a)$$

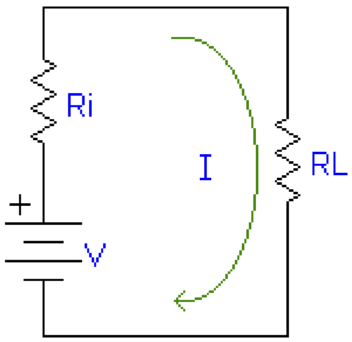
ou seja:

“A resistência aparente de circuito, olhado sob o ponto de vista da fonte V, é (1 + a) vezes menor que o valor do elemento resistivo realmente presente.”

- Este é o chamado Efeito Miller -

MÁXIMA TRANFERENCIA DE POTÊNCIA

A máxima potência é transferida de uma fonte quando a resistência de carga, R_L, é igual a resistência interna, R_i, da fonte.



$$I = \frac{V}{R_i + R_L} \qquad V_{RL} = \frac{V.R_L}{(R_i + R_L)^2}$$

$$\Rightarrow \quad P_{RL} = I.V_{RL} = V^2.\frac{R_L}{R_i + R_L}$$

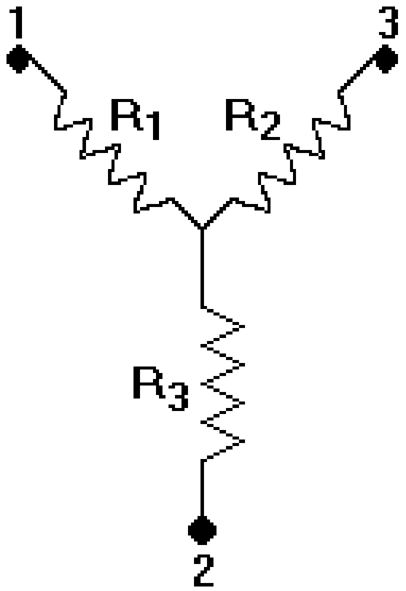
$$\frac{dP_{RL}}{dR_L} = \frac{V^2}{\left(R_i + R_L\right)^2} \cdot \left[1 - \frac{2R_L}{R_i + R_L}\right] = 0 \quad \text{quando} \quad R_L = R_i$$

$$\left.\frac{\mathbf{d^2P_{RL}}}{\mathbf{dR_L{}^2}}\right|_{\mathbf{R_L = R_i}} = \frac{\mathbf{V^2}}{\mathbf{R_i{}^3}} \cdot \left[\frac{\mathbf{6}}{\mathbf{16}} - \frac{\mathbf{4}}{\mathbf{8}}\right] < \mathbf{0} \qquad \Rightarrow R_L = R_i \text{ é de fato um máximo!}$$

No presente caso, teremos ainda: $P_{RL} = V^2/4.R_i$ e $P_{fonte} = V^2/2.R_i$

Portanto o rendimento será $\eta = P_{RL}/P_{fonte} = 50\%$

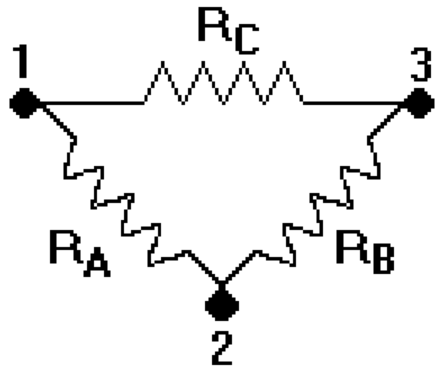
Transformação Y ↔ Δ



$$R_{12} = R_1 + R_3 = \frac{R_A(R_B + R_C)}{R_A + R_B + R_C}$$

$$R_{13} = R_1 + R_2 = \frac{R_C(R_A + R_B)}{R_A + R_B + R_C}$$

$$R_{23} = R_2 + R_3 = \frac{R_B(R_A + R_C)}{R_A + R_B + R_C}$$



$$\Delta \rightarrow Y \quad \begin{cases} R_1 = \dfrac{R_A R_C}{R_A + R_B + R_C} \\ R_2 = \dfrac{R_B R_C}{R_A + R_B + R_C} \\ R_3 = \dfrac{R_A R_B}{R_A + R_B + R_C} \end{cases}$$

$$Y \rightarrow \Delta \quad \begin{cases} R_A = \dfrac{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}{R_2} \\ R_B = \dfrac{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}{R_1} \\ R_C = \dfrac{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}{R_3} \end{cases}$$

Referencias bibliográficas

- Analise de Circuitos em Engenharia, William H. Hayt e Jack E. Kemmerly, editora McGraw-Hill do Brasil (1973).

- Circuitos Elétricos, Robert A. Bartkowiak, Makron Books do Brasil, Brasil (1999).

- Analise de Circuitos Elétricos, Victor da Fonte Dias, Instituto Superior Técnico - IFR, disponível em http://www.estg.ipleiria.pt/~lneves/ce_eic/capa.htm, Portugal (1996/97).