

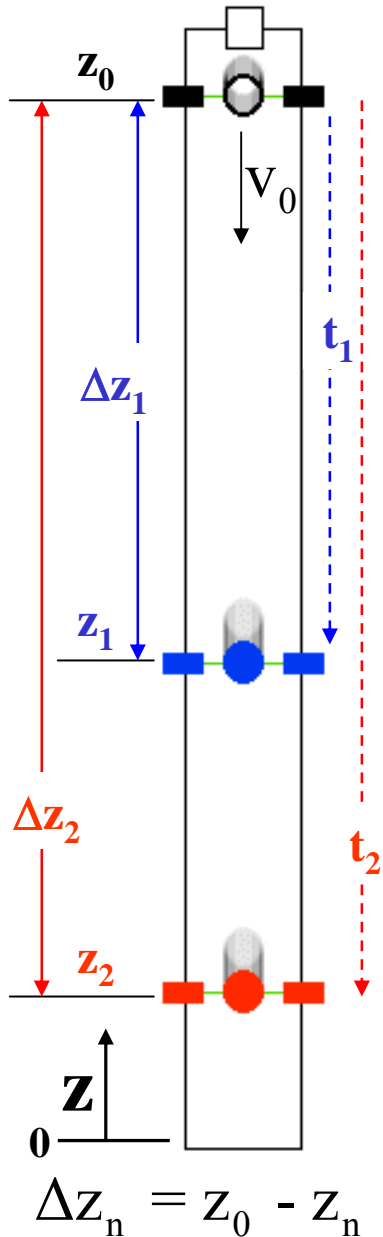


# **Trabalho e Energia**

**Curso de Física Básica - Mecânica**

**J.R. Kaschny (2005)**

# Lembrando nosso experimento de queda livre ...



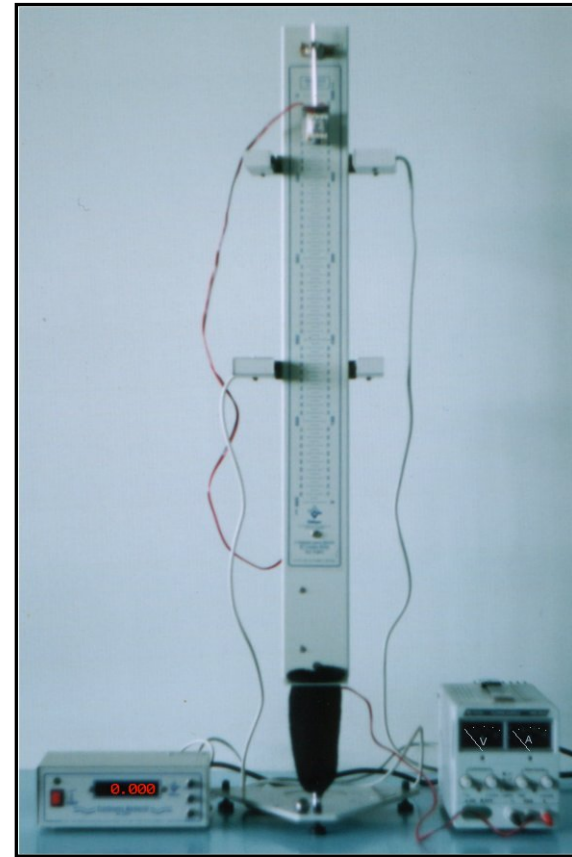
$$z = z_0 - v_0 t - \frac{gt^2}{2}$$

$$v_0 = 0 \Rightarrow g = \frac{2(z_0 - z)}{t^2} \quad \times$$

Contudo, se considerarmos  $v_0 \neq 0$  obtemos:

$$\begin{cases} z_1 = z_0 - v_0 t_1 - \frac{gt_1^2}{2} \\ z_2 = z_0 - v_0 t_2 - \frac{gt_2^2}{2} \end{cases} \quad \checkmark$$

$$\Rightarrow \begin{cases} v_1 = v_0 + gt_1 \\ v_2 = v_0 + gt_2 \end{cases}$$



- A partir dos dados experimentais obtidos, é fácil verificar que:

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + mgz_0 = \frac{1}{2}mv_1^2 + mgz_1 = \frac{1}{2}mv_2^2 + mgz_2$$

onde  $m$  é a massa da esfera.

- Uma conclusão similar é obtida a partir da equação:

$$v^2 = v_0^2 + 2g(z_0 - z)$$

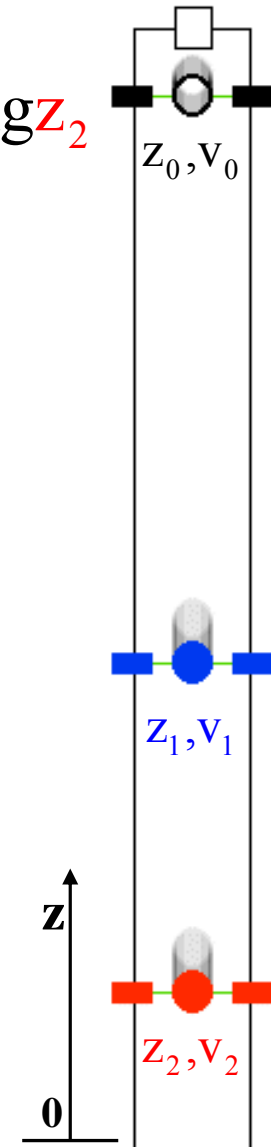
de onde podemos deduzir que:

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + mgz_0 = \frac{1}{2}mv^2 + mgz$$

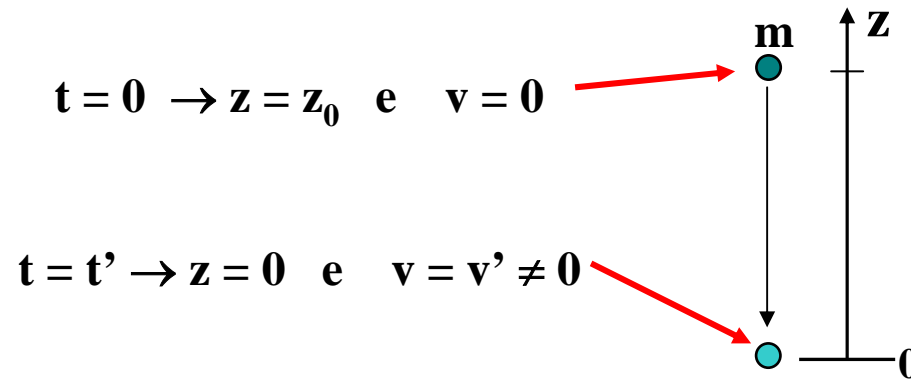
- Sendo assim, podemos concluir que a grandeza

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + mgz$$

é uma constante de movimento, ou seja, é uma grandeza conservada.



Considerando ainda a queda livre de um corpo de massa  $m$ , tal que:



obtemos, ao calcularmos  $E = \frac{1}{2}mv^2 + mgz$ , os resultados:

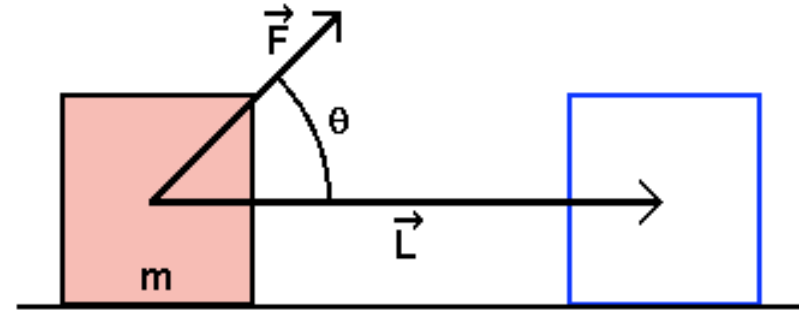
(a)  $t = 0 \rightarrow E = mgz_0$  que dependerá exclusivamente da posição  $z_0$

(b)  $t = t' \rightarrow E = \frac{1}{2}mv'^2$  que dependerá exclusivamente da velocidade  $v'$

Isto nos fornece um indicativo de que cada termo da soma, que compõe a grandeza  $E$ , na realidade “**traduzem**” coisas diferentes.

# Trabalho

Consideremos um bloco de massa  $m$ , que graças a ação de uma força constante,  $F$ , desloca-se uma distancia  $L$ , tal como ilustrado na figura:



Define-se o trabalho realizado sobre o bloco como:

$$W = F L \cos \theta \quad \text{que em termos vetoriais fornece} \quad W = \vec{F} \cdot \vec{L}$$

cuja unidade SI é o newton-metro (N.m), sendo denominado “joule” (J) em homenagem a James Prescott Joule 1818-1889. Portanto:

O trabalho realizado por um agente, que exerce uma força constante sobre um objeto, é igual ao produto do modulo da distancia percorrida pelo modulo da força aplicada na direção do respectivo deslocamento.

Em termos vetoriais isto é o produto escalar entre os vetores força e deslocamento. Assim, o trabalho realizado por uma força perpendicular ao deslocamento é nula.

**NOTA:** *A noção de trabalho esta relacionada com a idéia de “esforço útil para produzir um determinado deslocamento”!*

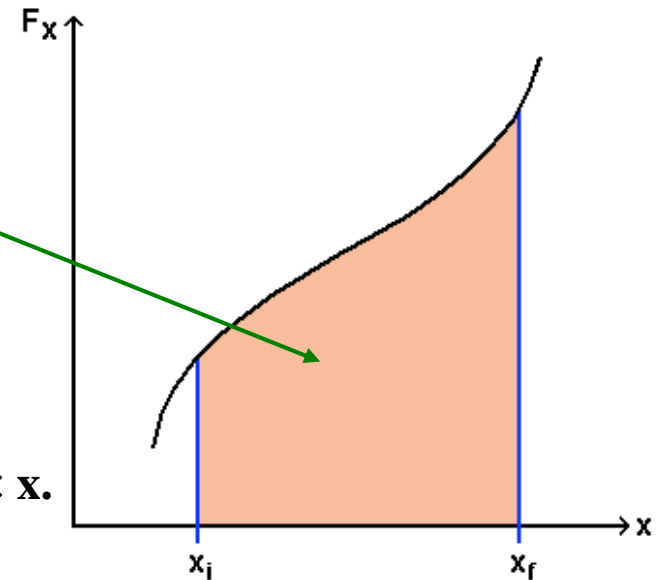
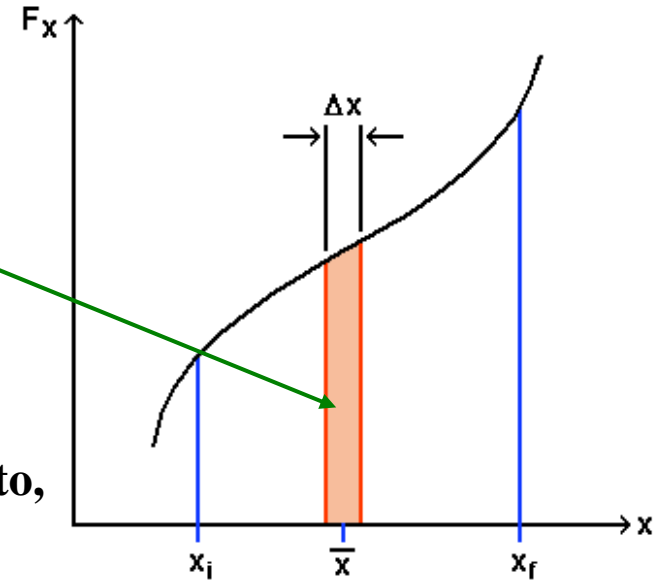
Considerando por simplicidade um sistema unidimensional, teremos, no caso de uma força variável, que o trabalho total,  $W$ , será o somatório de contribuições  $\Delta W_n$  tal que:

$$W \approx \sum_n \Delta W_n = \sum_n F_x(\bar{x}_n) \Delta x$$

No limite ao numero de subintervalos tender ao infinito, ou seja, ao  $\Delta x \rightarrow 0$ , obtemos:

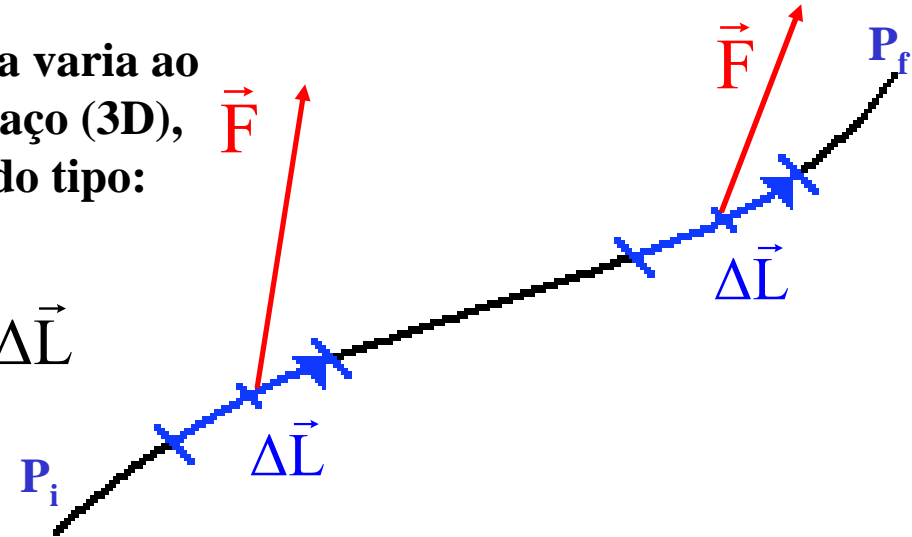
$$W = \int_{x_i}^{x_f} F_x(x) dx$$

lembrando que isto representa a área sub a curva  $F_x \times x$ .



Em termos mais gerais, onde o vetor força varia ao longo de uma trajetória curvilínea no espaço (3D), calculamos o trabalho via um somatório do tipo:

$$W \approx \sum_n \Delta W_n = \sum_n \vec{F}(\vec{L}_n) \cdot \Delta \vec{L}$$



No limite ao numero de subintervalos tender ao infinito, ou seja, ao  $\Delta L \rightarrow 0$ , obtemos a integral de linha ao longo da trajetória:

$$W = \int_{P_i}^{P_f} \vec{F} \cdot d\vec{L}$$

O trabalho realizado por um agente, que exerce uma força sobre um objeto, é igual à integral de linha da força ao longo da trajetória percorrida no espaço por tal objeto.

## Energia Cinética

A energia cinética,  $K$ , de uma partícula de massa  $m$  que se move com velocidade  $v$  é dada por:

$$K = \frac{1}{2} m v^2$$

onde  $v^2 = \vec{v} \cdot \vec{v}$

**[K] = Joule**

Lembrando de nossa discussão prévia, sobre queda livre, isto corresponde ao primeiro termo do somatório que compõem a grandeza  $E$  que experimentalmente constatamos que é conservada.

Obviamente a energia cinética de uma partícula em repouso será nula ( $v^2 = 0$ ).

Portanto  $K$  representa algo devido unicamente ao estado de movimento de um corpo de massa  $m$ .

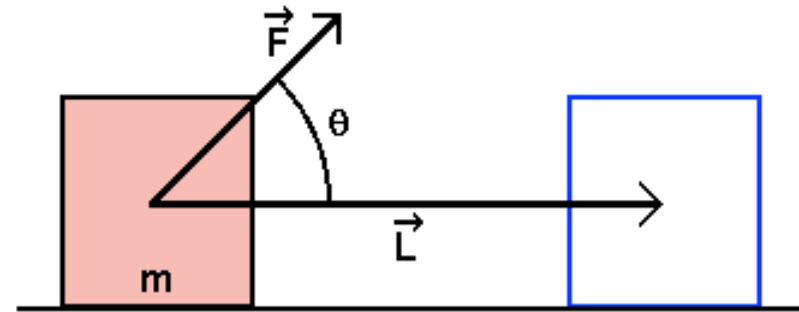
A quantidade  $2K = mv^2$ , era chamada por Leibnitz (sec.17) como “força viva” e era por ele encarada como a “verdadeira medida de uma força”. Ao contrario, Descartes pensava que tal medida seria dada pelo produto  $m|v|$ , gerando uma enorme controvérsia na época. Vemos que ambas estas grandezas são importantes, contudo traduzem coisas diferentes que não são exatamente a “medida de uma força”.

**É importante compreendermos que, na física de hoje, não temos nenhum conhecimento do que seja energia.**

*Richard Feynman (1918-1988)*

## O Teorema Trabalho-Energia

Consideremos novamente o caso unidimensional de um bloco de massa  $m$ , que graças a ação de uma força constante,  $F$ , desloca-se uma distancia  $L$ , partindo de  $x_i$  até  $x_f$  com velocidades  $v_i$  e  $v_f$ , respectivamente.



Assim temos:  $F_x = F \cos \theta \Rightarrow a_x = F_x / m$

como  $v_f^2 = v_i^2 + 2 a_x (x_f - x_i) \Rightarrow \frac{1}{2} v_f^2 - \frac{1}{2} v_i^2 = a_x (x_f - x_i)$

$$\Rightarrow W = F_x (x_f - x_i) = m a_x (x_f - x_i) = m \left( \frac{1}{2} v_f^2 - \frac{1}{2} v_i^2 \right)$$

Portanto:

$$W = \frac{1}{2} m v_f^2 - \frac{1}{2} m v_i^2 = K_f - K_i = \Delta K$$

**Teorema Trabalho-Energia: O trabalho realizado pela força resultante sobre um objeto é igual á variação da energia cinética do objeto.**

**De uma forma mais geral, podemos demonstrar este teorema da seguinte maneira:**

$$\frac{dK}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} m v^2 \right) = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} m \vec{v} \cdot \vec{v} \right) = \frac{1}{2} m \left( \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} \right)$$

como  $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$  e  $\vec{v} = \frac{d\vec{L}}{dt}$  temos:

$$\left( \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} \right) = 2 \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} = 2 \vec{a} \cdot \vec{v} = 2 \vec{a} \cdot \frac{d\vec{L}}{dt}$$

$$\frac{dK}{dt} = \frac{1}{2} m \left( 2 \vec{a} \cdot \frac{d\vec{L}}{dt} \right) = m \vec{a} \cdot \frac{d\vec{L}}{dt} \quad \Rightarrow \quad dK = m \vec{a} \cdot d\vec{L} = \vec{F} \cdot d\vec{L}$$

**e então, obtemos finalmente:**

$$W = \int_{P_i}^{P_f} \vec{F} \cdot d\vec{L} = \int_{P_i}^{P_f} dK = K(P_f) - K(P_i) = K_f - K_i = \Delta K$$

# Potência

Potência, por definição, é a taxa instantânea á qual o trabalho é realizado, ou seja:

$$P = \frac{dW}{dt}$$

$$[P] = \text{J/s} = \text{Watt}$$

James Watt (1735-1819)

Pode-se dar uma expressão alternativa para a potência em termos da força que realiza o trabalho e da velocidade do objeto. Suponhamos que, em um pequeno intervalo de tempo  $\Delta t$ , uma força  $F$  atue sobre um objeto quando este se desloca de  $\Delta L$ . Como  $\Delta W = F \cdot \Delta L$ , a potência média é dada por:

$$P = \frac{\vec{F} \cdot \Delta \vec{L}}{\Delta t} = \vec{F} \cdot \frac{\Delta \vec{L}}{\Delta t}$$

Tomando o limite  $\Delta t \rightarrow 0$  e observando que  $\Delta L/\Delta t \rightarrow v$ , obtemos:

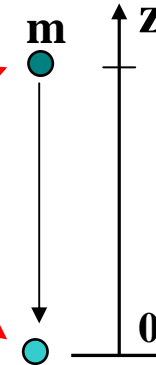
$$P = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

# Energia Potencial

Voltando a considerar a queda livre de um corpo de massa  $m$ , temos:

$$t = 0 \rightarrow z = z_0 \text{ e } v = 0$$

$$t = t' \rightarrow z = 0 \text{ e } v = v' \neq 0$$



onde  $E = mv^2 / 2 + mgz = \text{constante}$ .

Portanto, pelo que já foi visto, em  $t = t'$  teremos  $E = m v'^2 / 2 = K'$  e  $K_0 = 0$ , em  $t = 0$ .

Então o trabalho realizado pela força gravitacional, que age sobre o corpo, será:

$$W = \Delta K = K' - K_0 = K'$$

Como  $E$  é conservada, teremos então que:  $W = K' = E(t = t') = E(t = 0) = m g z_0$

Enquanto o corpo for mantido em repouso, a uma altura  $z_0$ , podemos dizer que ele armazena uma “**certa capacidade**” que pode ser convertida em energia cinética, ou seja, o corpo suspenso possui uma **energia potencial**,  $U$ , que neste caso é dada por:

$$U = m g z_0$$

$$[U] = \text{Joule}$$

## Energia Mecânica ou Total

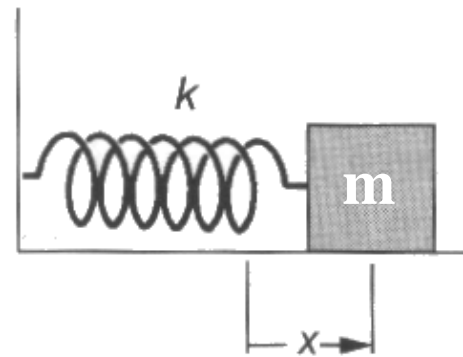
De uma maneira geral, podemos escrever:

$$E = K + U$$

que é denominada, **energia mecânica (total)** do sistema, sendo evidente  $[E] = \text{Joule}$ . Logo, a energia total de um corpo é a soma de sua energia cinética com sua energia potencial.

No exemplo anterior **U** representa o potencial gravitacional, contudo a energia potencial pode assumir qualquer outra forma, dependendo intimamente do sistema considerado e que encontra-se sob análise. Como por exemplo, no caso de um sistema massa-mola, teríamos:

$$U = \frac{1}{2} k x^2$$



Em outras palavras, **U** depende intimamente das forças presentes e de suas naturezas.

## Conservação da Energia

Dizemos que uma dado sistema é um **sistema conservativo** se a energia mecânica for uma grandeza conservada. Isto ocorrerá somente se sobre o sistema agirem forças tais que mantenham a função energia total ( $E$ ) constante. Tais forças são denominadas **forças conservativas**.

Então, para um sistema conservativo temos:

$$\Delta E = 0 \Rightarrow \Delta K = - \Delta U \Rightarrow W = - \Delta U$$

Portanto, o negativo da variação da energia potencial, em um sistema conservativo, corresponde ao trabalho realizado pela força resultante (conservativa) que age sobre o corpo. Neste caso teremos ainda, considerando um sistema unidimensional, que:

$$W = \int_{x_i}^x F(x) dx = -(U(x) - U(x_i)) = - \Delta U$$

Adotando arbitrariamente  $U(x_i) = 0$ , obtemos:

$$\text{Na forma geral } \vec{F} = - \nabla U$$

$$F(x) = - \frac{dU(x)}{dx}$$

Ao tratarmos com um sistema conservativo, aqui considerado por simplicidade unidimensional, podemos observar adicionalmente que o trabalho:

$$W_{i \rightarrow f} = \int_{x_i}^{x_f} F(x) dx = U(x_i) - U(x_f)$$

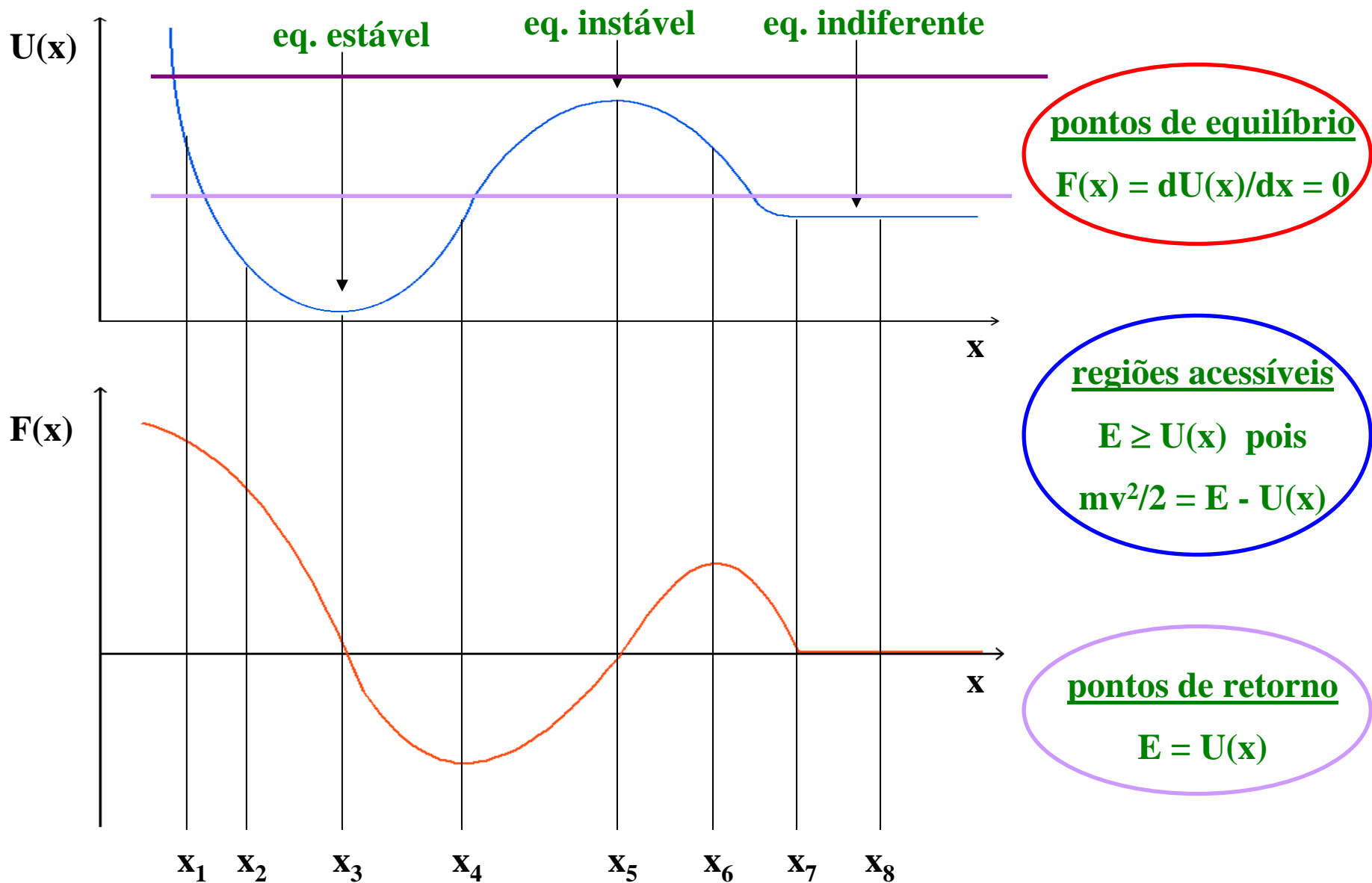
depende exclusivamente dos pontos iniciais e finais da trajetória, ou seja, o trabalho realizado ao deslocar o sistema de um ponto inicial ( $x_i$ ) ao final ( $x_f$ ) independe da trajetória particularmente adotada. Em termos da integral de linha:

$$W_{i \rightarrow f} = \int_{P_i}^{P_f} \vec{F} \cdot d\vec{L}$$

dizemos que ela é independente do caminho. Neste caso temos ainda que o trabalho realizado em um caminho fechado será evidentemente nulo.

Como não podemos dar uma definição geral de energia, o princípio da conservação de energia significa simplesmente que há alguma coisa que permanece constante. Qualquer que seja a noção do mundo que os experimentos futuros possam nos dar, já sabemos que haverá alguma coisa que permanece constante e que podemos chamar de energia. *Henri Poincaré (1854-1912)*

# Equilíbrio e Estabilidade



# Forças Não-Conservativas e Trabalho Interno

Forças não-conservativas → Sistemas não-conservativos → Dissipação de energia

- Na presença de forças não-conservativas, a energia mecânica total não é uma grandeza conservada.
- O trabalho realizado por uma força não-conservativa depende da trajetória que o sistema percorre entre os pontos inicial (  $i$  ) e final (  $f$  ).
- Neste caso é comum decompor o trabalho realizado pela força resultante (  $R$  ) como sendo igual a soma de duas parcelas, uma devida a forças conservativas (  $C$  ) e outra devida a forças não-conservativas (  $NC$  ), ou seja:

$$W_R = W_C + W_{NC} = K_f - K_i$$

pois o teorema trabalho-energia permanece válido, independentemente das forças.

→ Como:  $W_C = - (U_f - U_i) \Rightarrow - (U_f - U_i) + W_{NC} = K_f - K_i$  obtemos:

$$E_f = E_i + W_{NC}$$

teorema  
trabalho-energia  
modificado

Dependendo do sistema considerado para estudo, pode haver uma terceira parcela que pode contribuir para o trabalho → trabalho interno que é realizado por forças internas do sistema.

## Referencias Bibliográficas

- **Física**, Vol.1, F.J. Keller, W.E. Gettys e M.J. Skove, cap. 8-9.
- **Curso de Física Básica**, Vol.1 Mecânica, H.M. Nussenzveig, cap.6.
- **Fundamentos de Física**, Vol.1 Mecânica, D. Halliday, R. Resnick e J. Walker, cap. 7-8.
- **Física**, Vol.1, P. Tipler, cap. 6.
- **Física I**, Mecânica, SEARS e ZEMANSKY / YOUNG & FREEDMAN, cap. 6-7.