

Plínio Giorgio Arruda da Silva
Caio Veloso Sátiro



*Física Moderna para o Ensino Médio:
Guia para o professor*

Plínio Giorgio Arruda da Silva
Caio Veloso Sátiro



*Física Moderna para o Ensino Médio:
Guia para o professor*

© 2015 Plínio Giorgio Arruda da Silva
Caio Veloso Sátiro & UFRPE - UAG
Qualquer parte desta publicação pode ser reproduzida, desde que citada a fonte.

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil

Silva, Plínio Giorgio Arruda.
Física Moderna para o Ensino Médio:
Guia para o professor. / Plínio Giorgio Arruda da Silva
Caio Veloso Sátiro. – Garanhuns, PE: UFRPE - UAG, 2015.

Bibliografia.
ISBN XXXX-XXXX-XX.

1. Relatividade. 2. Mecânica Quântica.

Agradecimentos

Este trabalho é o produto da Dissertação de Mestrado em Ensino de Física pela Universidade Federal Rural de Pernambuco – UFRPE. Porém, ele não seria possível se não fosse a orientação do professor Dr. Caio Veloso Sátiro, da UFRPE - UAG, e das contribuições dos meus amigos da turma 2013 do Mestrado Nacional Profissional em Ensino de Física, polo UFRPE – Garanhuns. E em especial, a todos de minha família e em especial à minha esposa Silvia, que me apoiou durante todo o curso.

Lista de ilustrações

Figura 1	– Fonte: http://www.explicatorium.com/Galileu-Galilei.php	11
Figura 2	– Fonte: http://www.brighthub.com/science/space/articles/49929.aspx	12
Figura 3	– Fonte: https://thecuriousastronomer.wordpress.com/	14
Figura 4	– Fonte: http://pordentrodaciencia.blogspot.com.br/2014/02/o-passado-sempre-presente.html	17
Figura 5	– Fonte: http://alunosonline.uol.com.br/fisica/dilatacao-do-tempo.html	19
Figura 6	– Fonte: http://alunosonline.uol.com.br/fisica/dilatacao-do-tempo.html	20
Figura 7	– Fonte: http://www.maxplanckflorida.org/institute/history/	37
Figura 8	– Fonte: http://www.uff.br/fisica/files/2010/03/Labfismodroteiro.pdf	38
Figura 9	– Fonte: http://www.uff.br/fisica/files/2010/03/Labfismodroteiro.pdf	39
Figura 10	– Fonte: http://efeitofotoeletricoecompton.webnode.com.br/efeito-fotoeletrico2/	42
Figura 11	– Fonte: https://pt.wikipedia.org/wiki/Comportamento_dual_da_luz	43
Figura 12	– Gráfico do potencial de corte	45
Figura 13	– Fonte: http://espetacularquimica.blogspot.com.br/2013/02/o-modelo-atomico-de-thomson.html	48
Figura 14	– Fonte: http://www.brasile scola.com/fisica/do-atomo-rutherford-ao-atomo-bohr.htm	49
Figura 15	– http://csce2012.ca/tag/bohr/	50
Figura 16	– Fonte: http://www.britannica.com/science/scientific-modeling	51
Figura 17	– Fonte: http://www.nobelprize.org/nobel_prizes/physics/laureates/1929/broglie-bio.html	58
Figura 18	– Fonte: http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0100-40422008000700046	60
Figura 19	– Fonte: http://gilghamesh.blogspot.com.br/2013/01/o-experimento-da-dupla-fenda-e-o.html	64
Figura 20	– Fonte: https://pt.wikipedia.org/wiki/Werner_Heisenberg	65

Sumário

Introdução	7
1 Relatividade Restrita	11
1.1 Galileu Galilei	11
1.1.1 A relatividade Galileana	12
1.2 Isaac Newton	12
1.2.1 A relatividade Newtoniana	13
1.3 Albert Einstein	14
1.3.1 A relatividade Einsteiniana	14
1.4 Postulados da relatividade restrita	16
1.5 Experimentos hipotéticos	16
1.6 Dilatação do tempo	19
1.7 Contração do espaço	22
1.8 Composição de velocidades no campo da Relatividade Restrita	27
1.9 Relação entre massa e energia	30
1.10 Momento linear e energia cinética	31
2 Efeito fotoelétrico	37
2.1 A origem da Mecânica Quântica	37
2.2 Albert Einstein e o Efeito Fotoelétrico	42
2.3 O experimento de Philipp Lenard	43
2.4 Observações importantes do experimento de Lenard	43
2.5 A influência do experimento de Lenard sobre Einstein	44
3 O átomo de Bohr	47
3.1 Modelo de Thomson	48
3.2 Modelo de Rutherford	49
3.3 Modelo de Bohr	50
4 A dualidade onda-partícula	57
4.1 O importante papel de de Broglie	58
4.2 As ondas de matéria de de Broglie	58
4.3 O experimento de Davisson-Germer	60
4.4 O experimento da dupla fenda	63
5 O princípio da incerteza	65
Referências	71

Introdução

A evolução da Física tem se tornado fundamental para a sociedade por estar intimamente ligada a todo o avanço tecnológico. O uso de aparelhos como computadores, tablets, smartphones, celulares entre outros utilizam recursos que são frutos de conhecimento de temas como Relatividade e Mecânica Quântica nos quais compõem o que denominamos de Física Moderna.

A Relatividade Restrita ou Especial, foi proposta por Albert Einstein no início do século XX, que nasceu com pouca ou nenhuma aceitação devido a sua abstração recheada de modelos mentais, onde o próprio Einstein denominava de *gedanken*. É sabido que a relatividade restrita tornou-se fundamental para o funcionamento dos aparelhos de GPS (Global Positioning System), onde consideramos ser de extrema necessidade para navegação geral como comercial. Existem alguns aplicativos GPS que são inseridos nos carros, em alguns celulares e tablets para que as pessoas possam se localizar e até mesmo fazer uma viagem para algum lugar no qual não conhecem. Notamos a importância de nossos estudantes conhecerem a Física que existe por trás destes aparelhos e que nós professores de Física do ensino médio possamos discutir sobre estes temas atuais com os nossos alunos para que eles possam compreender e se enteirar por esta nova visão de mundo que está aplicada ao seu dia a dia. Sabemos que a relatividade está mais intimamente ligada a uma concepção teórica do que prática, pois tanto na escola como fora dela os alunos convivem mais com o mundo governado pelas leis da mecânica clássica. Os fundamentos da mecânica clássica, são de certa forma muito importantes para o amadurecimento do aluno para que o mesmo possa compreender o movimento de bola de futebol quando chutada por alguém e a mesma descreve no espaço uma trajetória parabólica, a queda de um corpo, e até mesmo o som de uma música que se propaga em um meio material. Estas situações estão mais presentes na vida deles do que o movimento de uma partícula como um méson μ . Mesmo sabendo de todas estas dificuldades, é importante que o professor de Física do nível médio possa estar instigando seus alunos a também obterem interesse em relatividade. O mesmo acontece com a Mecânica Quântica, estando mais presente na vida dos nossos estudantes do que a relatividade.

Hoje em dia, os grandes avanços no campo da medicina, na engenharia, o comportamento das partículas, o caráter dual da luz e também da matéria são adventos desta teoria que foi revolucionária quando surgiu em 1900 com Max Planck. O calor recebido por uma lâmpada acesa ou até mesmo de uma panela quente, são nada menos que manifestações (ondas) eletromagnéticas que são emitidas pelos corpos o tempo todo. Foi uma situação desta natureza que germinou a teoria quântica. Explicar como se dava a emissão de radiação do corpo negro, foi na época uma situação que levou os físicos a desenvolverem algumas teorias que pudessem explicar tal fato. Apenas em 1900, o físico Max Planck conseguiu explicar este poder emissivo de um corpo negro, levando em conta uma nova concepção que era contrária ao eletromagnetismo clássico, pois nele acreditava-se que a emissão da radiação eletromagnética do corpo negro se dava de forma contínua e assim de acordo com esta teoria se aquecemos ainda mais o corpo ele deveria emitir radiações cada vez maiores e assim chegaria ao ultravioleta, que não é visível aos nossos olhos, e desta forma o corpo deveria

ficar invisível. Mas como isto não aconteceu, tal fato ficou conhecido como *catástrofe do ultravioleta*.

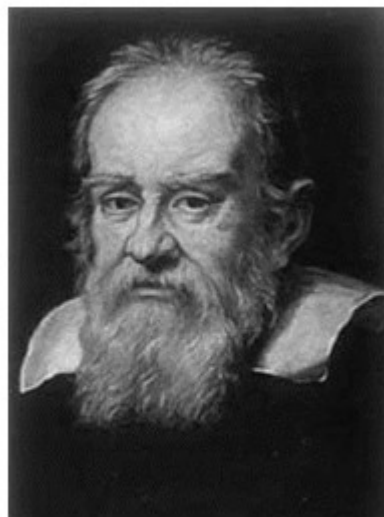
Pode-se dizer que a Mecânica Quântica, apesar de sua estranheza, tem sido muito importante para os avanços das teorias físicas, bem como tem quebrado alguns paradigmas vigentes do final do século XIX. Ela foi utilizada para explicar outros fenômenos ainda inexplicáveis como o **Efeito fotoelétrico** e a **Instabilidade do átomo**, estes dois fenômenos fortaleceram a Mecânica Quântica, pois só obteve-se sucesso devido a ela. As vezes ela nos apresenta seu lado mais complexo de se entender como seu fator probabilístico e o comportamento ondulatório da matéria. Este último, nasceu de uma tese de doutorado de um físico francês chamada de Louis de Broglie, no qual propunha estender um comportamento dual também para a matéria e partir daí ficamos conhecendo o lado probabilístico da Mecânica Quântica. O quanto tudo isto é fascinante. Inserir estes conceitos no ensino médio é um pouco difícil, porém ausentá-los é ainda pior. Visando superar estes obstáculos, propomos um texto, com propostas de aulas sequenciais que irá auxiliar o professor de Física do ensino médio para ministrar suas aulas de Relatividade e Mecânica Quântica. Esperamos ajudá-los com esta proposta e contribuir para a melhoria do ensino de Física em nosso país.

Aula 1: Introdução à Relatividade

1. Aplicar um pré-teste (como por exemplo o que foi aplicado na dissertação), com o objetivo de avaliar os conhecimentos prévios dos alunos;
 2. Relatar e discutir com os alunos, sobre as ideias de Thomas Kuhn no tocante a evolução das ciências. Aqui o professor pode usar como exemplo a quebra do paradigma ptolomaico e o nascimento de uma nova ciência com o paradigma copernicano (relato histórico);
 3. Discuta com seus alunos, ainda na concepção clássica, conceitos como o da simultaneidade, espaço e tempo. É importante que nesta discussão, os alunos percebam que estes conceitos eram tidos como absolutos e que no campo da relatividade restrita os mesmos dependerão de um referencial inercial;
 4. Sugestão de um pequeno vídeo www.youtube.com/watch?v=psyySZb1gyU. O vídeo faz uma abordagem da bibliografia de Einstein e descreve suas ideias acerca dos conceitos de espaço e tempo serem dependentes de um referencial. Com isso, o professor poderá fazer algumas pausas durante sua exibição para instigar os alunos a perguntarem sobre a nova concepção dos conceitos na visão relativística;
 5. Na lousa, tratar sobre a Relatividade de Galileu, montando as equações do movimento de acordo com o texto do Guia para o Professor;
 6. Explique o experimento de Michelson-Morley e sua finalidade, onde no qual eles comprovaram a não existência do éter e sua possível contribuição para a relatividade restrita.
-

Relatividade Restrita

1.1 Galileu Galilei



Galileu Galilei

Figura 1: Fonte: <http://www.explicatorium.com/Galileu-Galilei.php>

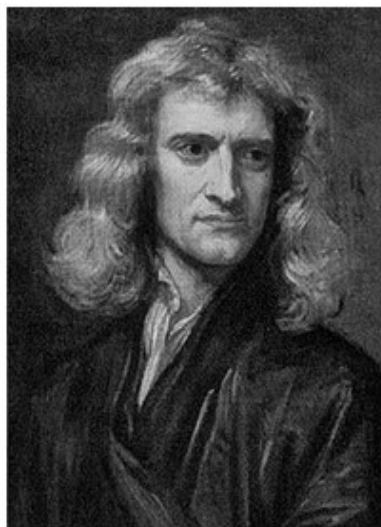
Galileu Galilei nasceu em 15 de fevereiro de 1564 em Pisa, filho de Vincenzo Galilei, um nobre empobrecido, mas culto com habilidades em Matemática e Música. Aos dezessete anos de idade, seu pai o enviou para a Universidade de Pisa para estudar Medicina, pois o mesmo não queria que o filho fosse músico ou matemático, pelo fato de que estas profissões não eram bem remuneradas. Por conta de uma crise financeira, ele foi obrigado a abandonar seu curso de Medicina antes de concluí-lo, mas mesmo assim continuou com suas investigações e estudos matemáticos (PIRES, 2011). Galileu chegou a ser chamado de Arquimedes de sua época após ter escrito um tratado sobre a determinação do centro de gravidade dos sólidos, e aos 25 anos foi convidado para lecionar Matemática na Universidade de Pisa, recomendado por Guidobaldo dal Monte (1545 – 1607), um cargo honorável o que o levou a escrever anos mais tarde um manuscrito, *De Motu* (Do movimento) onde apresenta a teoria do ímpeto, que para ele, ímpeto é o que conhecemos hoje por *impulso* (ROONEY, 2013).

1.1.1 A relatividade Galileana

Apreciador das ideias de Copérnico, mas mesmo assim Galileu ensinava o sistema geocêntrico de Ptolomeu onde demonstrava grande respeito ao mesmo durante sua permanência em Pisa. Quando teve o conhecimento acerca do telescópio, percebeu que a teoria geocêntrica no qual ensinara estava errada, e assim passa a ter uma nova visão do Universo, confirmando ser verdadeiro o modelo heliocêntrico proposto por Nicolau Copérnico (ROONEY, 2013). Ele transformou o telescópio em uma grande ferramenta de pesquisa científica e foi o primeiro a publicar uma descrição do Universo através do telescópio. A proposta metodológica imposta por Galileu em suas observações, é a ênfase na matematização. Este fato está claro em uma de suas mais importantes obras denominada de *Discurso e demonstrações matemáticas em torno de duas novas ciências*, Galileu seguiu o mesmo padrão no qual consiste em uma conversa com três personagens: Sagredo, Salviati e Simplicio que era adepto das ideias aristotélicas (MASON, 1962).

Em *Discurso*, ele trata sua pesquisa sobre o movimento dos corpos. Para ele, o movimento e o repouso dos corpos devem ser associados a um referencial (objetos que não participam do movimento), no qual não há um privilegiado, ou seja o movimento não é absoluto. Para (SILVA, 2004) este exemplo pode ser enunciado de uma maneira mais elegante se admitirmos um sistema de coordenadas fixo ou em movimento uniforme o chamado de referencial galileano: *É impossível, por experiências mecânicas demonstrar o movimento uniforme em relação a outro sistema fixo de eixos coordenados*. Portanto, para Galileu, movimento é extrínseco à natureza das coisas, pois é apenas definido como uma modificação das relações entre as coisas que não tem sua constituição natural modificada, sendo assim movimento e repouso são simples estados dos corpos. Portanto pode-se dizer que para Galileu, as leis do movimento são as mesmas em todos os referenciais inerciais não existindo um referencial privilegiado (PIRES, 2011). Esta última frase trata do postulado da *Relatividade Galileana*, onde para ele se um corpo está em movimento (com velocidade u) no interior de trem (com velocidade v), para um referencial fixo na Terra o movimento deste corpo será visto com uma velocidade relativa $v' = v + u$. Veremos mais tarde que esta formulação somente será válida para corpos que viajam com velocidade muito menores que a velocidade da luz.

1.2 Isaac Newton



Isaac Newton

Isaac Newton nasceu em Woolsthorpe, Inglaterra, em 25 de dezembro de 1642. Após a morte de seu pai, dois meses antes de seu nascimento, e que também se chamava Isaac Newton, sua mãe casou-se novamente e deixou-os aos cuidados de seus avós que o enviaram aos treze anos para o liceu de Grantham, onde estudou Gramática, Latim e Estudos Sociais (PIRES, 2011). Desde muito cedo mostrou habilidades mecânicas, construindo moinhos, relógios de água pipas e diais solares e assim que concluiu o curso secundário foi para o Trinity College, em Cambridge, matriculando-se em 1661, tendo a tarefa de prestar serviços domésticos (subsizar) para estudantes ricos para cobrir suas despesas (PIRES, 2011). O currículo das escolas naquela época estava ainda sob o domínio das ideias de Aristóteles, mas a partir de 1664, Newton começou a ler Gassendi, Descartes e Boyle, onde passou a ser influenciado por eles e partir daí dedicou mais tempo de sua vida a Alquimia e a Teologia do que seus trabalhos em Física e Matemática. Em 1665, assolou um peste na Inglaterra e ele teve que sair de Cambridge e voltar a fazenda de sua família em Lincolnshire, onde lá realizou trabalhos experimentais em Óptica, Química onde voltou a estudar Matemática, e neste mesmo ano que Newton realizou importantes pesquisas sobre Mecânica (ROONEY, 2013). No ano de 1666, descobriu a teoria gravitacional imaginando que a gravidade se estenderia apenas até a órbita da Lua, onde fez a comparação da força que mantém a Lua em sua órbita é da mesma natureza da força gravitacional na superfície da Terra, no ano seguinte, Cambridge foi reaberta, e após retornar os estudos Newton foi contemplado com uma bolsa de estudos no Trinity College, onde dois anos depois seu mentor Isaac Barrow demitiu-se da cátedra de *Lucasian Professor of Mathematics*, posição hoje ocupada por Stephen Hawking, e indicou Newton como seu sucessor (CHASSOT, 1994).

1.2.1 A relatividade Newtoniana

Destaca-se como peça fundamental para a publicação do *Principia - Princípios Matemáticos de Filosofia Natural* o jovem astrônomo graduado em Oxford, Edmund Halley, no qual conseguiu catalogar com precisão, astros do hemisfério sul e de um cometa periódico que carrega seu nome por causa da descoberta. Para (SILVA, 2004) Os Principias é um dos trabalhos mais importantes de Newton, no qual provoca uma revolução científica no sentido defendido por Thomas Kuhn. Os *Principia*, foi fruto de uma sintetização de tudo que escreveu sobre gravitação e dinâmica durante vinte anos de sua vida científica, atualizado com os dados mais recentes da astronomia moderna estando dividido da seguinte forma segundo (PIRES, 2011)

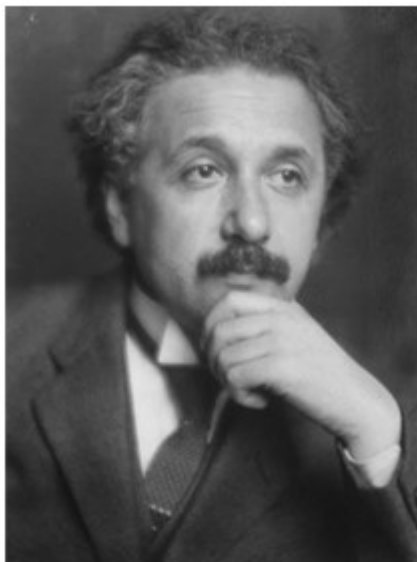
1. No Livro I ele especifica uma dinâmica onde os corpos executam movimentos sem nenhuma forma de resistência;
2. No Livro II ele trata de problemas com corpos suspensos em meios fluidos com movimento sob a ação do atrito e ou outra forma de resistência;
3. No Livro III, Newton desencanta de uma forma elegante toda a sua genialidade quando trata do movimento dos corpos celestes baseando-se nas três leis do movimento, que ficaram conhecidas como as três leis de Newton.

Podemos destacar uma de maior importância para o desenvolvimento da Teoria da Relatividade Restrita de Einstein, que foi a lei da Inércia que ficou conhecida como a primeira lei de Newton, pois ela determina a importância do que é o Referencial Inercial. A 1ª lei de Newton foi assim enunciada (NEWTON, 2012)

Todo corpo continua em seu estado de repouso ou de movimento uniforme em linha reta, a menos que ele seja forçado a mudar aquele estado por forças imprimidas sobre ele. Projéteis continuam em seus movimentos, desde que não sejam retardados pela resistência do ar, ou impelidos para baixo pela força da gravidade. Um pião, cujas partes por sua coesão são continuamente afastadas de movimentos retilíneos, não cessa sua rotação a não ser quando retardado pelo ar. Os corpos maiores dos planetas e cometas, encontrando menos resistência em espaços livres, preservam seus movimentos, tanto progressivo, como circular, por um tempo muito maior.

Isaac Newton é considerado um dos maiores físicos de todos os tempos e um orgulho para toda a Inglaterra. Isto ficou evidente pela homenagem prestada em seu túmulo na Abadia de Westminster, em Londres, pelo poeta Alexander Pope no qual ele escreve: *A natureza e suas leis jazem ocultas na noite. Deus disse: Que exista Newton! E tudo se fez Luz* (CHASSOT, 1994)

1.3 Albert Einstein



Albert Einstein

Figura 3: Fonte: <https://thecuriousastronomer.wordpress.com/>

Albert Einstein nasceu em 14 de março de 1879, em Ulm na Alemanha, foi o primeiro dos dois filhos de Hermann Einstein, um pequeno comerciante dono de uma oficina de eletromecânica, e de Pauline Einstein. Com sete anos de idade, Einstein entrou para a escola pública onde era considerado um bom aluno. Seis meses depois abandonou a escola e foi com seus pais para Milão, onde continuou a estudar por conta própria até 1895, quando realizou o exame de admissão para o Instituto Federal de Tecnologia (ETH) de Zurique, no qual foi admitido devido a um insucesso em Literatura e política, embora no ano seguinte tenha obtido êxito ao ingressar na Universidade de Zurique (PIRES, 2011). Em 1900, chegou a produzir dois artigos importantes sobre a capilaridade e sobre forças intermoleculares, em pesquisas que realizava por conta própria. Obteve seu primeiro emprego em 1901, como professor substituto em uma escola secundária em Winterthur, e em seguida foi para uma escola particular em Schaffhausen. Apenas em 1903, conseguiu assumir uma posição permanente no escritório de Patentes de Berna. Em 1905, Einstein conclui sua tese de doutorado na Universidade de Zurique, e neste mesmo ano publicou além de sua tese mais quatro artigos no jornal *Annalen der Physik* entre os quais, o artigo que tratava do efeito fotoelétrico, que 17 anos mais tarde lhe valeria o Prêmio Nobel, os demais tratavam sobre o movimento browniano e a teoria da relatividade (PIRES, 2011).

1.3.1 A relatividade Einsteiniana

Podemos dizer que o movimento relativo é a observação do movimento de um corpo em relação a um sistema de coordenadas cartesianas em relação a um referencial (parado ou em movimento). A relatividade do movimento, em meados do século XVI, foi discutida por dois matemáticos Leonard Digges (1520 – 1559) e seu filho Thomas Digges (1546 – 1595), na

obra *Prognostication of Right Good Effect* (Prognóstico de efeito verdadeiramente correto) escrito por Leonard em 1555 e depois foi renovado por seu filho Thomas em 1576 sob o título *Prognostication Everlasting* (Prognóstico Eterno) (CARUSO, 2013). Nela foi colocada a discussão de que se um pessoa se pusesse no alto do mastro de um navio e jogasse um corpo no pé do mastro ou qualquer outro ponto do navio, este corpo descreveria uma trajetória retilínea até o alvo, qualquer que fosse a velocidade constante do navio. Na obra *Diálogo sobre os dois máximos sistemas do mundo ptolomaico e copernicano*, Galileu retoma o problema sobre o movimento de queda de um corpo do alto de um navio parado ou em movimento com velocidade constante. Na discussão, Galileu usou o princípio da relatividade do movimento para negar os argumentos aristotélicos sobre o movimento do planeta (CARUSO, 2013). Hoje esse princípio é conhecido como *Relatividade Galileana* sendo expresso matematicamente por equações que ficaram conhecidas como as *Transformações de Galileu*:

$$x' = x - vt \quad (1.1)$$

$$y' = y \quad (1.2)$$

$$z' = z \quad (1.3)$$

$$t' = t \quad (1.4)$$

No qual (x', y', z') são as coordenadas de uma partícula em relação a um referencial R' que se move com velocidade constante v em relação a R e (x, y, z) são as coordenadas da mesma partícula com relação a um referencial R fixo. Analisando as equações acima, imaginemos agora que se a partícula se move com velocidade constante v em relação ao referencial R' com componentes v_x, v_y e v_z e lembrando que $v = \frac{x}{t}$ temos:

$$v'_x = v_x + v \quad (1.5)$$

$$v'_y = v_y \quad (1.6)$$

$$v'_z = v_z \quad (1.7)$$

que representam a *lei da composição de velocidades de Galileu*. Naquela época Galileu, Giordano Bruno, Newton, entre outros, não pensavam em corpos se movendo na velocidade da luz, no entanto foi a partir deste fato que a Mecânica Clássica se torna falha, ou seja, quando tomamos que $v \simeq c$ (c é a velocidade da luz). Para se tornar válido no campo da relatividade restrita, as equações propostas por Galileu deveriam ser reformuladas e isso aconteceu em 1904 pelo físico holandês Hendrik Antoon Lorentz, que pesquisava um modelo para estudar o movimento do elétron, onde apresentou o que hoje conhecemos por *Transformações de Lorentz* (CARUSO, 2013). Para que fossem válidas no campo da relatividade restrita, as equações do movimento de Gaileu foram reescritas com um elemento conhecido como o *fator de Lorentz* $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$.

Desta maneira as equações ficaram com a seguinte forma:

$$x' = \gamma(x + vt) \quad (1.8)$$

$$y' = y \quad (1.9)$$

$$z' = z \quad (1.10)$$

$$t' = \gamma \left(t + \frac{vx}{c^2} \right) \quad (1.11)$$

1.4 Postulados da relatividade restrita

Einstein escreveu sobre a Relatividade Restrita num de seus artigos publicados em 1905 com o título *Zur Elektrodynamik bewegter Körper* (Sobre a eletrodinâmica dos corpos em movimento), no qual se apoia em dois postulados:

[...] existem sistemas cartesianos de coordenadas - os chamados sistemas de inércia - relativamente aos quais as leis da mecânica (mais geralmente as leis da física) se apresentam com a forma mais simples. Podemos assim admitir a validade da seguinte proposição: se K é um sistema de inércia, qualquer outro sistema K' em movimento de translação uniforme relativamente a K , é também um sistema de inércia.

A interpretação que se dá neste primeiro postulado é que Einstein aumentou o campo da Relatividade proposto por Galileu. Galileu afirmava que as leis da Mecânica são as mesmas para qualquer referencial inercial, já Einstein impõe que as leis da Física são as mesmas para qualquer referencial inercial.

A velocidade da luz no vácuo é a mesma para todos os observadores em referenciais inerciais e não depende da velocidade da fonte que está emitindo a luz, tampouco do observador que a está medindo.

Para Einstein a velocidade da luz é uma constante universal, ou seja, é absoluta e não existe um referencial privilegiado.

1.5 Experimentos hipotéticos

Uma das diferenças entre Galileu e Aristóteles era a capacidade que Galileu possuía de realizar experimentos mentalmente, provando assim suas teorias. Albert Einstein usava o que ele chamava *gedanken* (experimentos mentais) como forma de comprovação da Teoria da Relatividade. Para Einstein tudo é relativo, e a velocidade da luz é apenas um limite que foi imposto pela natureza, sendo assim a física newtoniana fundamentada na concepção de que tempo e espaço são absolutos é quebrada.

Portanto esta limitação da velocidade, fez com que tempo e espaço fossem relativos. Antes de apresentar um exemplo com a finalidade de mostrar que espaço e tempo são relativos, vamos entender o que tomamos por **simultaneidade**. No olhar da Física, simultaneidade é o nome que se dá ao resultado do acontecimento de um evento duplo, coincidindo no tempo e no espaço. Einstein imaginou uma seguinte situação:

Existe uma pessoa (1) parada numa estação ferroviária em um ponto equidistante dos pontos A e B no qual um raio cairá em cada ponto. Os pulsos luminosos relativos a queda dos raios é tal, que esta pessoa (1) perceba os dois raios de luz ao mesmo tempo. Portanto para esta pessoa (1) o evento foi simultâneo. Na mesma estação, vamos agora imaginar um vagão de um trem que se desloca de A para B com uma velocidade próxima a da luz e dentro do vagão existe uma pessoa (2) também parada (em relação ao vagão) vai fazer esta mesma observação exatamente quando estiver no ponto equidistante de A e B. Como o vagão se move de A para B, a pessoa (2), estaria se afastando de um pulso luminoso e se aproximando do outro, assim a pessoa (2) verá o pulso a sua frente chegando primeiro. Logo, para a pessoa (2) o evento não será simultâneo. Isso confirma o que Einstein já percebeu ao formular a Teoria da Relatividade, pois não se poderia atribuir ao conceito de simultaneidade um significado absoluto.

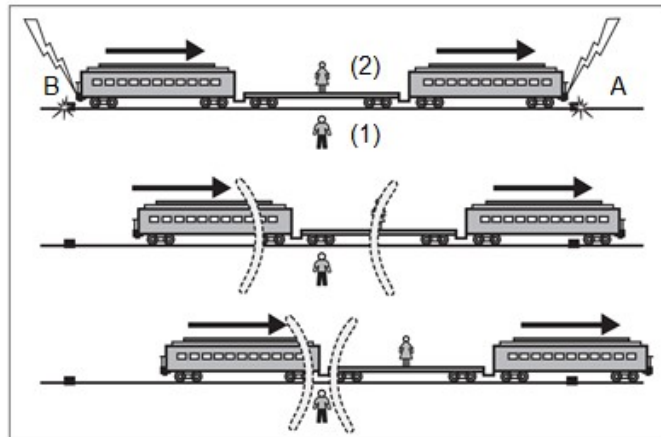


Figura 4: Fonte: <http://pordentrodaciencia.blogspot.com.br/2014/02/o-passado-sempre-presente.html>

Aula 2: Equações Relativísticas do Tempo e do Espaço

1. Breve revisão da Aula 1 (Introdução à Relatividade) sobre as equações relativísticas na concepção clássica;
 2. Descrever e comentar os postulados de Einstein;
 3. Discutir as transformações de Lorentz, sem demonstração matemática, que foi utilizada para modificar as equações de Galileu para que as mesmas fossem válidas no campo da relatividade restrita;
 4. Demonstrar e discutir as equações da dilatação do tempo e da contração do espaço;
 5. Comente e discuta com os alunos sobre os modelos mentais (gondanken) que foram propostos pelo próprio Einstein para comprovar suas teorias como o paradoxo dos gêmeos. Você também pode comentar sobre o experimento que comprovou a dilatação do tempo com os relógios atômicos de césio, partículas atômicas como o múon e a aplicação prática da relatividade com o uso do GPS;
 6. Exercícios de fixação. Resolva alguns exercícios em sala em conjunto com a turma e proponha alguns outros exercícios (incluir exercícios teóricos) para que os alunos possam resolver em casa e comente-os na aula seguinte.
-

1.6 Dilatação do tempo

Agora já sabemos que na Relatividade Restrita, o tempo não é absoluto. Dentro deste contexto, iremos definir a relação matemática entre dois intervalos de tempo que serão medidos em referenciais diferentes, um referencial em repouso e outro movendo-se com velocidade constante próxima a da luz. O relógio que se encontra no referencial em repouso configura o chamado *intervalo de tempo próprio* ou *intervalo de tempo de repouso*. Vamos imaginar a seguinte situação: Um observador se encontra em repouso no interior de um vagão (referencial R'). O vagão se desloca com velocidade constante v próxima a velocidade da luz em relação a um referencial R fixo na linha férrea, contendo uma fonte luminosa direcionada para o teto no qual se encontra um espelho plano com a face refletora voltada para baixo a uma distância d da fonte. O observador irá medir o intervalo de tempo que um pulso luminoso levará para fazer o percurso de ida e volta. Sendo assim o intervalo de tempo encontrado será dado por: $\Delta t_0 = \frac{2d}{c}$.

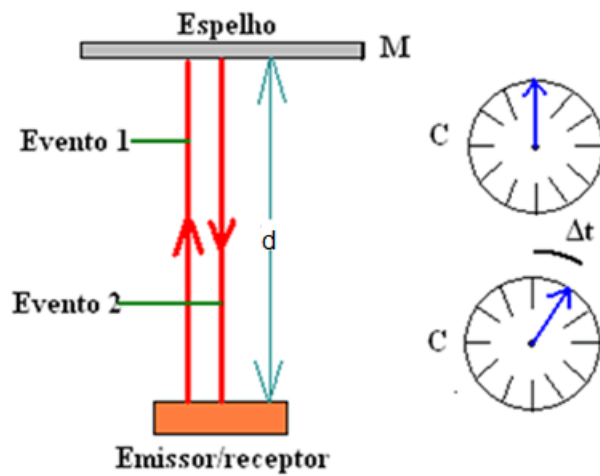


Figura 5: Fonte: <http://alunosonline.uol.com.br/fisica/dilatacao-do-tempo.html>

Consideremos agora, no referencial R da linha férrea, um observador que irá fazer a medida de tempo do evento colocado anteriormente. Um raio luminoso irá sair da fonte que está no piso do vagão e indo atingir um espelho no teto e retorna ao piso. Como o vagão se move com velocidade constante próxima a da luz, o percurso que será percorrido pelo raio de luz é D .

Logo o intervalo de tempo medido no referencial R, é dado por: $\Delta t = \frac{2D}{c}$, onde D no triângulo retângulo mostrado na figura é determinado utilizando o teorema de Pitágoras:

$$D^2 = \Delta x_{\text{vagao}}^2 + d^2 \quad (1.12)$$

$$D^2 = \frac{v^2 \Delta t^2}{4} + \frac{c^2 \Delta t_0^2}{4} \quad (1.13)$$

$$\frac{c^2 \Delta t^2}{4} = \frac{v^2 \Delta t^2}{4} + \frac{c^2 \Delta t_0^2}{4} \quad (1.14)$$

Agora vamos multiplicar toda a equação acima por $\frac{4}{c^2}$, assim temos:

$$\Delta t^2 = \frac{v^2 \Delta t^2}{c^2} + \Delta t_0^2 \quad (1.15)$$

$$\Delta t^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = \Delta t_0^2 \quad (1.16)$$

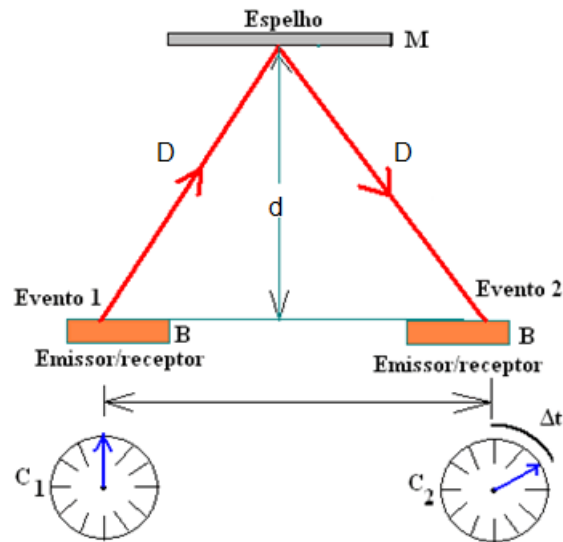


Figura 6: Fonte: <http://alunosonline.uol.com.br/fisica/dilatacao-do-tempo.html>

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (1.17)$$

$$\Delta t = \gamma \Delta t_0 \quad (1.18)$$

Conclusão: Para um mesmo evento, o intervalo de tempo medido em outro referencial (externo ao vagão) é sempre maior que o intervalo de tempo próprio. Um exemplo prático que podemos tomar nos dias atuais, é o sistema GPS (em inglês global positioning system). Os engenheiros quando querem fazer as aferições das passagens dos satélites no espaço, levam em consideração os efeitos relativísticos, pois o tempo passa mais devagar em relação ao referencial na superfície da Terra. Um outro exemplo, também proposto por Einstein (*gedanken*), é o caso do *Paradoxo dos Gêmeos*. Neste exemplo, imaginemos dois irmãos gêmeos, onde um deles irá fazer uma viagem espacial, numa nave com uma velocidade próxima a da luz e o outro ficaria aqui na Terra. Por consequência da Relatividade Restrita, no referencial da Terra o intervalo de tempo medido da viagem é maior que o intervalo de tempo medido no interior da espaçonave. No retorno do gêmeo que está na espaçonave, seu irmão que ficou na Terra estará mais velho do que ele. Vejamos a seguir um exemplo da aplicação deste experimento hipotético.

Exemplo: 1.(UFPE – 2004) Um astronauta é colocado a bordo de uma espaçonave e enviado para uma estação espacial a uma velocidade constante $v = 0,8c$, onde c é a velocidade da luz no vácuo. No referencial da espaçonave, o tempo transcorrido entre o lançamento e a chegada na estação espacial foi de 12 meses. Qual o tempo transcorrido no referencial da Terra, em meses?

Solução: Este exercício trata do paradoxo dos gêmeos proposto por Albert Einstein, onde aqui um dos gêmeos se encontra a bordo de uma espaçonave que se desloca com uma velocidade de $0,8c$. Sendo assim utilizaremos a expressão da dilatação do tempo (1.18) para que possamos determinar qual o intervalo de tempo transcorrido para o outro gêmeo que ficou na Terra. Assim temos:

$$\Delta t = \gamma \Delta t_0$$

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{12}{\sqrt{1 - \frac{(0,8c)^2}{c^2}}} = \frac{12}{\sqrt{1 - 0,64}}$$

$$\Delta t = 20 \text{ meses}$$

Como era esperado, para o referencial da Terra, o tempo transcorrido da viagem seria um valor maior que 12 meses, como propunha Einstein.

Exemplo: 2.(UPE - 2006) Considere dois gêmeos, A e B. O gêmeo B realiza uma viagem espacial à estrela Arturus a uma velocidade constante 60% da velocidade da luz. Segundo os que estão na Terra, Arturus fica aproximadamente a 40 anos-luz de distância. Quais serão as idades dos gêmeos, quando B chegar àquela estrela, sabendo-se que eles têm 20 anos de idade no início da viagem?

- a) A tem 72,33 anos, e B, 61,21 anos.
- b) A tem duas vezes a idade de B.
- c) A tem a mesma idade de B.
- d) A tem 92 anos, e B, 51 anos.
- e) A tem 86,66 anos, e B, 73,33 anos.

Solução: Este problema é semelhante ao anterior, pois também se trata do paradoxo dos gêmeos, porém aqui devemos usar os postulados da relatividade para compreender o desenvolvimento matemático deste problema. Primeiro, iremos calcular o tempo de viagem para o gêmeo A que ficou na Terra. De acordo com o texto, a estrela Arturus se encontra a 40 anos-luz de distância da Terra, e de acordo com um dos postulados da relatividade restrita *as leis da Física são as mesmas para qualquer referencial inercial*, logo temos:

$$\Delta x = v \cdot \Delta t$$

$$\Delta t = \frac{\Delta x}{v} = \frac{40 \cdot c}{0,6 \cdot c}$$

$$\Delta t = 66,66 \text{ anos}$$

Com isso poderemos determinar a idade do gêmeo A que ficou na Terra. Para ele, o intervalo de tempo transcorrido da viagem foi de 66,66 anos e com isso sua idade será de 86,66 anos.

Para o cálculo do intervalo de tempo de viagem do gêmeo B, utilizaremos a equação da dilatação do tempo da relatividade restrita.

$$\Delta t = \gamma \cdot \Delta t_0$$

$$\Delta t_0 = \frac{\Delta t}{\gamma}$$

$$\Delta t_0 = \Delta t \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

$$\Delta t_0 = 66,66 \cdot \sqrt{1 - \frac{0,36 \cdot c^2}{c^2}} = 66,66 \cdot \sqrt{0,64}$$

$$\Delta t_0 = 53,33 \text{ anos}$$

Após encontrado o intervalo de tempo próprio que caracteriza o tempo de viagem do gêmeo **B**, chegamos ao resultado de sua idade ao chegar na estrela Arturus que é de 73,33 anos. Assim, a alternativa correta para este exemplo é a letra **e**).

1.7 Contração do espaço

Como não existe simultaneidade para referenciais diferentes, onde cada referencial possui um tempo independente do outro, e como o espaço e o tempo estão interligados, logo se alterarmos um deles o outro também será alterado. Nesta parte da teoria da Relatividade, Einstein afirma que se um objeto se deslocasse com uma velocidade próxima a da luz, ele pareceria encurtado na direção do movimento para um referencial fixo, ou seja, se uma barra horizontal de 50cm de comprimento estivesse se movendo ao longo do eixo OX de um sistema de referência fixo R, com uma velocidade próxima a da luz este pareceria ter menos de 50cm na direção do eixo OX. Vamos retomar o nosso exemplo do vagão sobre trilhos que se move com velocidade v próxima da luz. No interior do vagão (referencial R') existem uma pessoa e uma barra. A pessoa no interior do vagão irá medir em relação ao referencial R' o comprimento da barra, onde denominaremos de *comprimento de repouso* L_0 . Quando medimos o comprimento de um objeto, geralmente utilizamos uma régua ou trena, fazemos a leitura das coordenadas das extremidades e em seguida subtrai-se os valores e assim medimos o comprimento do objeto. Sendo assim no referencial R', temos: $L_0 = x'_2 - x'_1$. Com x'_2 e x'_1 as coordenadas da extremidades da barra. No referencial R que se encontra sob a linha férrea, existe uma pessoa que irá fazer a mesma experiência. Medir o comprimento da mesma barra que se encontra no interior do vagão, que este se move com velocidade v próxima da luz. A medida da barra neste referencial R será dada por L onde: $L = x_2 - x_1$. Com x_2 e x_1 as coordenadas das extremidades da barra no referencial R. De acordo com as Transformações de Lorentz, conseguiremos unir as duas medidas feitas nos referenciais R e R' para a comprovação física da contração do comprimento. Sabemos que $x' = \gamma(x - vt)$, logo:

$$x'_2 = \gamma(x_2 - vt) \quad (1.19)$$

$$x'_1 = \gamma(x_1 - vt) \quad (1.20)$$

Subtraindo as duas equações membro a membro, temos:

$$x'_2 - x'_1 = \gamma(x_2 - vt - x_1 + vt) \quad (1.21)$$

$$x'_2 - x'_1 = \gamma(x_2 - x_1) \quad (1.22)$$

Anteriormente, vimos que $L_0 = x'_2 - x'_1$ e $L = x_2 - x_1$, portanto:

$$L_0 = \gamma \cdot L \quad (1.23)$$

$$L = \frac{L_0}{\gamma} \quad (1.24)$$

$$L = L_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad (1.25)$$

Para Einstein, uma aplicação hipotética que justificasse a contração do comprimento na direção do movimento é o exemplo de um carro ao atravessar um túnel, cuja as dimensões eram menores que a do carro. Sendo assim o carro poderia ser encoberto pelo túnel, para um referencial fora do carro, bastando que o mesmo estivesse numa velocidade próxima da luz. Segue agora um exemplo para que possamos compreender melhor a aplicação deste outro conceito proposto pela relatividade restrita.

Exemplo: 3.(UPE – 2005) O carro de Doc Brown, do filme DE VOLTA para o FUTURO, ultra-rápido, com $4,00m$ de comprimento de repouso, passa por um abrigo. De acordo com o assistente de Doc Brown, o comprimento deste abrigo é de $2,00m$, e o carro cabe exatamente nele ao passar, ou seja, o assistente observa que o carro tem o mesmo tamanho do abrigo. Determine a velocidade com que o carro passa pelo abrigo, em m/s. (Considere “c” a velocidade da luz)



Solução: É lido no texto que o carro do Doc. Brown possui um comprimento de repouso $L_0 = 4,00m$ e deverá caber num abrigo com um comprimento de $2,00m$. Porém, para isso, necessário que o mesmo possua uma velocidade próxima a da luz, que será determinada como se pede.

$$L = L_0 \cdot \gamma$$

$$2 = 4 \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

$$\frac{2}{4} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

$$\frac{1}{2} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

Para eliminarmos a raiz quadrada da equação acima, elevaremos os dois membros da equação ao quadrado. Logo temos que:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \left(\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\right)^2$$

$$\frac{1}{4} = 1 - \frac{v^2}{c^2}$$

$$\frac{v^2}{c^2} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

Agora, iremos extrair a raiz quadrada de ambos os membros da equação acima e assim obteremos o seguinte resultado:

$$\frac{v}{c} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

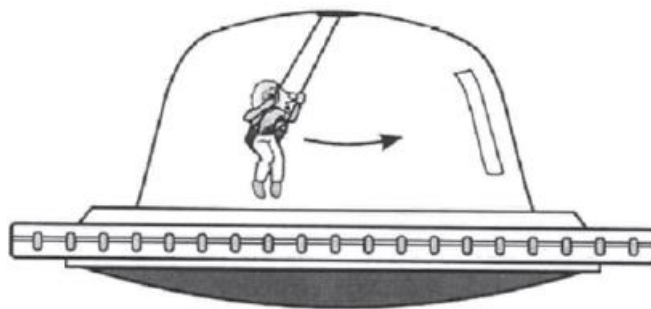
Considerando que $\sqrt{3}$ é aproximadamente 1,73, temos que:

$$\frac{v}{c} = \frac{1,73}{2} = 0,866$$

$$v = 0,866c$$

O resultado encontrado possui um valor esperado, pois para que o carro do Doc. Brown coubesse no abrigo, ele deveria estar com uma velocidade próxima a da luz e assim estaria de acordo com a teoria da relatividade e não violaria os seus postulados.

Exemplo: 4.(AFA-2014) Uma garota de nome Julieta se encontra em uma nave espacial brincando em um balanço que oscila com período constate igual a T_0 , medindo no interior da nave, como mostra a figura abaixo. A nave de Julieta passa paralelamente com velocidade $0,5c$, em que c é a velocidade da luz, por uma plataforma espacial, em relação à qual, o astronauta Romeu se encontra parado. Durante essa passagem, Romeu mede o período de oscilação do balanço como sendo T e o comprimento da nave, na direção do movimento, como sendo L . Nessas condições, o período T , medido por Romeu, e o comprimento da nave, medido por Julieta, são respectivamente:



Solução: Este problema nos traz a aplicação da dilatação do tempo e da contração do comprimento no qual começaremos sua resolução com o cálculo da dilatação do tempo. Sabemos que o período de oscilação do balanço (pêndulo), no referencial da espaçonave medido por Julieta é T_0 . Porém o período T medido por Romeu que está no referencial fixo será calculado utilizando a equação da dilatação do tempo. Assim temos:

$$\Delta t = \gamma \Delta t_0$$

$$T = \gamma \cdot T_0 = \frac{T_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$T = \frac{T_0}{\sqrt{1 - \frac{(0,5c)^2}{c^2}}} = \frac{T_0}{\sqrt{1 - \frac{0,25c^2}{c^2}}}$$

$$T = \frac{T_0}{\sqrt{1 - 0,25}} = \frac{T_0}{\sqrt{0,75}}$$

$$T = \frac{T_0}{\sqrt{\frac{3}{4}}} = \frac{T_0}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

Racionalizando a última igualdade temos:

$$T = \frac{2T_0\sqrt{3}}{3}$$

Agora, faremos o cálculo da medida da espaçonave no referencial de Julieta. Vale lembrar que para o referencial de Julieta, o comprimento a ser medido é o comprimento de repouso. Aplicando a equação da contração do espaço, temos:

$$L = L_0 \cdot \gamma$$

$$L_0 = \frac{L}{\gamma}$$

No cálculo anterior já sabemos o resultado do fator de Lorentz para este exemplo. Note que $\gamma = \frac{\sqrt{3}}{2}$, sendo assim temos:

$$L_0 = \frac{L}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$L_0 = \frac{2L\sqrt{3}}{3}$$

Aula 3: Composição relativística de velocidades

1. Iniciar a aula respondendo as dúvidas dos alunos e comentando os exercícios que foram propostos na aula anterior;
 2. Descrever no quadro a concepção clássica da velocidade relativa;
 3. Demonstrar e discutir com os alunos a modificação da equação clássica para a relativística no qual se comprova a não existência de um referencial privilegiado;
 4. Utilizando a equação relativística da velocidade, comprove matematicamente que se considerarmos $v'=c$ implicará em $v=c$. Com isso, pode-se perceber que a velocidade da luz é uma constante universal para qualquer referencial como afirma um dos postulados de Einstein;
 5. Resolução de exercícios.
-

1.8 Composição de velocidades no campo da Relatividade Restrita

Segundo a Mecânica Clássica ou Mecânica Newtoniana, para um corpo com velocidade constante v no interior de um vagão com velocidade constante u , no referencial dos trilhos (referencial R) a velocidade a ser medida é dada pela adição entre as velocidades do vagão e do corpo: $V = v + u$. No domínio das partículas com velocidades próximas a da luz, esta adição de velocidades não será mais válida, pois violaria o postulado que trata da velocidade da luz. Portanto, utilizando as *Transformações de Lorentz* iremos fazer uma correção da expressão clássica para que agora seja válida no campo da Relatividade Restrita. Pois bem, voltamos então para o exemplo do vagão que agora se move com velocidade constante u , e no seu interior se encontra um ponto material que se desloca no mesmo sentido de seu movimento, com uma velocidade constante v . A medida que o ponto material se desloca no interior do vagão, o seu espaço percorrido é dado pela equação: $x' = vt'$. Este mesmo espaço percorrido por este ponto material em relação ao referencial R é dado por: $x = Vt$, onde V representa a velocidade do ponto material em relação ao referencial R. Das transformações de Lorentz, sabemos que:

$$x' = \gamma(x - ut) \quad (1.26)$$

$$t' = \gamma\left(t + \frac{ux}{c^2}\right). \quad (1.27)$$

Das equações acima, temos:

$$x' = vt' \quad (1.28)$$

$$\gamma(x - ut) = \gamma\left(t + \frac{ux}{c^2}\right) \quad (1.29)$$

$$x - ut = v\left(t + \frac{ux}{c^2}\right) \quad (1.30)$$

$$x - \frac{uvx}{c^2} = vt + ut \quad (1.31)$$

$$x\left(1 - \frac{uv}{c^2}\right) = t(v + u) \quad (1.32)$$

No referencial R, $x = Vt$, logo:

$$Vt\left(1 - \frac{uv}{c^2}\right) = t(v + u) \quad (1.33)$$

$$V\left(1 - \frac{uv}{c^2}\right) = v + u \quad (1.34)$$

$$V = \frac{v + u}{1 + \frac{uv}{c^2}} \quad (1.35)$$

Notamos portanto que na correção da expressão da velocidade relativa agora podemos aplica-la para problemas onde os corpos estão com uma velocidade próxima da luz, esta não violará o postulado da velocidade. No entanto para corpos com velocidades muito menores que a luz o denominador da fração da expressão será 1, voltando assim aos domínios da mecânica newtoniana. Agora faremos um exemplo, para que possamos comprovar que esta nova relação matemática sobre a composição relativística de velocidades não viola os postulados da relatividade restrita.

Exemplo: 5. (Fundamentos da Física. vol.4; 9ªed; p.172, Halliday Resnick) Uma partícula está se movendo ao longo do eixo x' do referencial S' com uma velocidade de $0,40c$. O referencial S' está se movendo com uma velocidade de $0,60c$ em relação ao referencial S . Qual é a velocidade da partícula no referencial S ?

Solução: Antes de iniciarmos a solução do problema, é importante identificarmos os elementos da equação. Sendo assim, chamaremos de v a velocidade da partícula em relação ao referencial S' , u a velocidade do referencial S' em relação ao referencial S e V a velocidade da partícula em relação ao referencial S . Portanto temos que:

$$V = \frac{v + u}{1 + \frac{uv}{c^2}}$$

$$V = \frac{0,40c + 0,60c}{1 + \frac{(0,40c)(0,60c)}{c^2}}$$

$$V = \frac{1,0c}{1 + 0,24}$$

$$V = \frac{1,0c}{1,24} = 0,806c$$

O valor encontrado está de acordo com um dos postulados da relatividade, pois sabemos que a velocidade da luz é a mesma para qualquer referencial inercial e desta forma, não poderíamos encontrar um valor superior a velocidade da luz em um determinado referencial como propõe a teoria clássica.

Exemplo: 6. (UFC - 2009) Um avião militar “relativístico” voa com uma velocidade constante de $0,9c$, onde c é a velocidade da luz no vácuo. Esse avião dispara um míssil. O piloto observa que o míssil se afasta do avião com uma velocidade de $0,6c$. No mesmo instante, um feixe de laser é disparado em relação ao avião com uma velocidade c . Assinale a alternativa que apresenta, respectivamente, os valores da velocidade do míssil e da velocidade do feixe de laser, percebidos por um observador em um referencial estacionário.

Solução: Para resolver este problema, nos remeteremos ao texto com a teoria acerca da **composição relativista de velocidades** no qual se refere a uma modificação a equação clássica de adição de velocidades. Utilizando a equação relativística para tal, iremos determinar o valor da velocidade medida por um referencial fixo e estacionário e quanto a velocidade do pulso de luz (laser) devemos nos lembrar de um dos postulados de Einstein para a Relatividade Restrita, onde ele afirma que a velocidade da luz é uma constante universal e não depende do referencial. Sendo assim, a velocidade da luz medida pelo observador que se encontra no referencial fixo também deve ser c . Agora vamos calcular a velocidade do míssil em relação a este observador.

$$V = \frac{v + u}{1 + \frac{u \cdot v}{c^2}}$$

Aqui iremos considerar que $u = 0,9c$ e $v = 0,6c$, portanto temos:

$$V = \frac{0,6c + 0,9c}{1 + \frac{0,9c \cdot 0,6c}{c^2}}$$

$$V = \frac{1,5c}{1 + \frac{0,54c^2}{c^2}}$$

$$V = \frac{1,5c}{1,54} = 0,97c$$

Aula 4: Relação entre massa e energia

1. Aplicar um segundo pré-teste com conceitos de dinâmica e com o mesmo objetivo do primeiro pré-teste aplicado na aula 1 (Introdução à Relatividade);
 2. Após a aplicação do pré-teste, discuta com os alunos a modificação nos conceitos de massa, energia e momento linear para que sejam válidos no campo relativístico;
 3. Explicar para a turma utilizando situações hipotéticas de que a massa de um corpo não aumenta e sim sua inércia. Pode-se usar como exemplo uma situação no qual onde seria mais fácil parar um carro comum a uma velocidade de 10m/s ou a 20m/s? Todos irão responder que seria a 10m/s. Porém parar este mesmo carro a 20m/s, é como se fosse parar um carro maior e com uma velocidade de 10m/s. Desta forma, o professor deverá passar a ideia de que um carro a 20m/s é como parar um carro de massa maior a 10m/s. Enfatize que o carro é o mesmo, e desta forma é como se sua massa aumentasse (dilatação da massa – expressão matemática) com o aumento da velocidade, mas na verdade o que aumentou foi sua inércia.
 4. Explique e discuta com os alunos sobre o experimento do físico Alfred Bucherer que contribuiu para comprovar a dilatação da massa (aumento da inércia) quando media a relação carga/massa do elétron e verificou que esta relação era cada vez menor para elétrons com velocidades cada vez maiores;
 5. Usando o exemplo da fissão nuclear que acontece no Sol, explique para os alunos a relação entre massa e energia de acordo com a equação $E = mc^2$;
 6. Faça exemplos que possam instigar os alunos a pensarem de quanto de energia pode ser convertido utilizando um pãozinho com 50g, um cubo de ferro com 73g, entre outros que ficam a critério do professor.
-
-

1.9 Relação entre massa e energia

Quando enunciou a Teoria da Relatividade, Einstein teve que refazer o conceito de massa e energia, pois para ele energia e massa pareciam ligadas através de uma constante, que era a *a velocidade da luz*. Naquela época as pesquisas atômicas estavam em alta e logo viram que se um núcleo pesado com o de um átomo de Urânio pudesse ser quebrado em dois átomos menores, neste processo parte da massa se transforma em energia (calor) e este fenômeno ganhou o nome de fissão nuclear. Nas palavras do próprio Einstein em 1905, ele afirmou:

Infere-se da teoria da relatividade especial que massa e energia, são manifestações diferentes da mesma coisa, um conceito um tanto estranho para uma mente comum. Além disso $E = mc^2$, mostra que massas muito pequenas podem se converter em enormes quantidade de energia e vice-versa.

Em essência, massa é energia imobilizada. Para Einstein, a massa de um bloco de chumbo por exemplo, pode ter mais energia que uma mina de carvão, mas isso ainda era só teoria. No exemplo do bloco de chumbo, a energia que o mesmo possui está associado a quebra de seus átomos, sendo assim, mesmo o bloco estando em repouso ele possui energia simplesmente pelo fato de possuir massa. Surge então uma concepção para energia associada a corpos em repouso, dada por: $E_0 = m_0 c^2$. Nesta equação E_0 representa energia de repouso e m_0 é a massa de repouso. Com a ideia de que um corpo possui energia quando em repouso pelo simples fato de possuir massa, notamos que m_0 passa a ser chamado de m (massa relativística) quando os corpos agora estão em movimento com velocidades próximas a da luz. Imaginemos agora uma situação simples como a de uma força que varia crescentemente com o tempo e esta força esta sendo aplicada em um corpo e este está aumentando sua velocidade. Num certo instante a velocidade do corpo assumiu o valor da velocidade da luz, e assim sendo a força não conseguirá mais acelerá-lo, pois o mesmo já atingiu o limite de velocidade definido pela teoria da relatividade. Com o aumento da velocidade a massa aumenta infinitamente, não em quantidade de matéria e sim sua inércia. O que torna $m > m_0$, pois $\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} < 1$. Um físico alemão chamado de Alfred Bucherer, realizou um experimento para determinar a razão entre a carga elementar do elétron pela sua massa $\frac{e}{m_e}$. Nos resultados obtidos, percebeu que esta razão se tornava cada vez menor para os elétrons que se deslocavam com maior velocidade, o que comprova o aumento da massa (inércia) do corpo quando o mesmo se move em uma velocidade próxima da luz. Fica comprovada a dilatação da massa, quando um corpo está em movimento com velocidade próxima da luz. Para obedecer a teoria da relatividade a relação entre massa relativística e massa de repouso é dada por:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (1.36)$$

$$m = \gamma \cdot m_0 \quad (1.37)$$

Assim, a expressão da energia relativística será escrita na forma $E = \gamma mc^2$, pois quando em repouso $\gamma = 1$ e assim a equação da energia assume a forma de energia de repouso $E_0 = m_0^2$. Faremos agora um exemplo, para que possamos compreender a relação entre massa e energia sob a concepção da teoria da relatividade restrita.

Exemplo: 7.(UFC – 2002) Uma fábrica de produtos metalúrgicos do Distrito Industrial de Fortaleza consome, por mês $2,0 \cdot 10^6$ kWh de energia elétrica ($1 \text{ kWh} = 3,6 \cdot 10^6 \text{ J}$). Suponha que essa fábrica possui uma usina capaz de converter diretamente massa em energia elétrica, de acordo com a relação de Einstein, $E = mc^2$. Nesse caso, a massa necessária para suprir a energia requerida pela fábrica, durante um mês, é, em gramas:

Solução: Antes de iniciarmos a resolução deste exercício, é importante que o leitor verifique se as unidades estão dentro do sistema internacional de unidades (SI). A energia do problema está na unidade de kWh e sendo assim, devemos utilizar a conversão proposta

no exercício para substituir na equação $E = mc^2$ e com isso determinaremos a massa em quilograma e depois converteremos para gramas. Vale lembrar que a velocidade da luz no vácuo é: $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$.

$$E = mc^2$$

$$2,0 \cdot 10^6 \cdot 3,6 \cdot 10^6 = m \cdot (3 \cdot 10^8)^2$$

$$7,2 \cdot 10^{12} = m \cdot 9 \cdot 10^{16}$$

$$m = \frac{7,2 \cdot 10^{12}}{9 \cdot 10^{16}}$$

$$m = 0,8 \cdot 10^{-4} \text{ kg} = 0,8 \cdot 10^{-1} \cdot 10^{-3} \text{ kg}$$

$$m = 0,8 \cdot 10^{-1} \text{ g} = 0,08 \text{ g}$$

Este resultado nos mostra que se conseguíssemos transformar massa em energia, a fábrica do exercício necessitava apenas de 0,08g para obter uma energia de $2,0 \cdot 10^6 \text{ kWh}$ o equivalente a $7,2 \cdot 10^{12} \text{ J}$.

Exemplo: 8.(UFRN) Sendo a velocidade de propagação da luz igual a $3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$, a ordem de grandeza da energia de repouso de 1g de matéria, em J, é

Solução: Um exemplo fácil no qual determinaremos a energia de repouso de 1g de matéria de acordo com a equação da energia proposta por Einstein $E_0 = m_0 \cdot c^2$. É importante perceber que o problema quer a energia em joule e para tanto é necessário que a massa esteja em **kg**.

$$E_0 = m_0 \cdot c^2 = 1 \cdot 10^{-3} \cdot (3 \cdot 10^8)^2$$

$$E_0 = 1 \cdot 10^{-3} \cdot 9 \cdot 10^{16}$$

$$E_0 = 9 \cdot 10^{13} \text{ J}$$

Para finalizar o problema que pede a ordem de grandeza da energia, devemos escrever a potência de dez do valor encontrado. Pela regra da ordem de grandeza, a potência de dez mais próxima do $9 \cdot 10^{13}$ e substituindo temos que a ordem de grandeza da energia é 10^{14} J .

1.10 Momento linear e energia cinética

O momento linear é definido classicamente como $\vec{p} = m\vec{v}$, pois esta quantidade abstrata é assim definida porque obedece a uma lei de conservação. A lei de conservação de momento diz que:

se a resultante das forças externas que agem sobre um sistema físico for nula, então o momento deste sistema físico permanece constante no tempo.

Esta lei é uma consequência da terceira lei de Newton e é válida em todos os referenciais inerciais. Isso mostra que se o momento é conservado em um determinado referencial inercial, deverá também ser conservado em um referencial inercial que se move com velocidade constante em relação a um referencial inercial fixo. Tomando como exemplo a colisão bidimensional entre duas partículas, no modelo clássico, o momento linear deverá ser conservado no eixo horizontal OX e também no eixo vertical OY tanto no referencial R fixo ou no referencial R' que se move com velocidade constante u em relação a R. Abordando agora este problema no campo relativístico, utilizaremos para o cálculo da velocidade relativa

as transformações de Lorentz, portanto é visto que a velocidade relativa v'_y dependerá da componente horizontal v_x da velocidade, como mostra a expressão:

$$v'_y = \frac{v_y}{\gamma(1 - \frac{v_x u}{c^2})} \quad (1.38)$$

Para resolver este problema, temos duas possíveis soluções. Uma solução seria abandonar a lei de conservação de momento e a outra seria modificar a definição de momento. O juiz desta disputa é a própria natureza e ela escolhe que deve-se redefinir o momento linear para que seja válida a lei de conservação para qualquer referencial inercial. No modelo clássico sabemos que:

$$p = m \cdot v \quad (1.39)$$

$$p = m \cdot \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad (1.40)$$

O Δt que aparece na equação acima é o intervalo de tempo medido por um observador no referencial R. Para calcularmos o momento do ponto de vista de um observador no referencial R', utilizaremos a equação:

$$p = m \frac{\Delta x}{\Delta t_0} \quad (1.41)$$

O intervalo de tempo Δt se relaciona com o intervalo de tempo próprio Δt_0 através da equação da dilatação do tempo dada por:

$$\Delta t = \gamma \cdot \Delta t_0 \quad (1.42)$$

$$\Delta t_0 = \frac{\Delta t}{\gamma} \quad (1.43)$$

Sendo assim:

$$p = m \cdot \frac{\Delta x}{\frac{\Delta t}{\gamma}} \quad (1.44)$$

$$p = \gamma \cdot m \cdot \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad (1.45)$$

$$p = \gamma \cdot m \cdot v \quad (1.46)$$

Esta equação define o momento linear no campo da relatividade restrita, ficando agora denominado de momento relativístico. Para os problemas do modelo clássico, ou seja, quando $v \ll c$ o γ será igual a 1. Sendo assim na expressão do momento relativístico $p = \gamma \cdot m \cdot v$ tomando $\gamma = 1$ voltamos ao modelo clássico onde $p = m \cdot v$. A energia cinética é definida no domínio da mecânica newtoniana como sendo:

uma modalidade de energia adquirida por um corpo quando este se move em relação a um referencial, onde matematicamente é dada por: $E_C = \frac{mv^2}{2}$.

Nota-se que nesta definição, a energia cinética é uma grandeza física escalar que depende da velocidade e sendo assim depende de um referencial. Do ponto de vista relativístico, a energia cinética é dada como sendo a diferença entre a energia total (associado ao movimento de um corpo) pela energia de repouso. Desta forma, temos:

$$E_C = E - E_0 \quad (1.47)$$

$$E_C = mc^2 - m_0c^2 \quad (1.48)$$

$$E_C = \gamma m_0 c^2 - m_0 c^2 \quad (1.49)$$

$$E_C = m_0 c^2 \cdot (\gamma - 1) \quad (1.50)$$

Na expressão relativística da energia cinética, percebemos que a mesma depende de dois fatores importantes:

1. O fator $\gamma m_0 c^2$ que depende do movimento;
2. Do fator $m_0 c^2$ que **não** depende do movimento.

Muitas vezes é necessário e também importante trabalharmos com o *momento linear* e com a *energia* para a solução de alguns problemas. Unificando a equação de momento $p = \gamma m_0 v$ e a equação da energia $E = \gamma m_0 c^2$ com algumas manipulações algébricas "simples" chegaríamos numa equação geral que relaciona de uma forma direta, energia, momento e massa de repouso. A relação matemática encontrada seria:

$$E^2 = p^2 c^2 + m_0^2 c^4 \quad (1.51)$$

Na natureza existem algumas partículas que possuem massa de repouso, e portanto possuem energia de repouso $E_0 = m_0 c^2$ e outras que não possuem massa de repouso e consequentemente não possuem energia de repouso, como por exemplo os *fótons*. Se os *fótons* possuísem massa de repouso, e de acordo com a expressão $m = \gamma m_0$ teriam energia infinita, o que é um absurdo. Como os *fótons* não possuem massa de repouso, a relação $E^2 = p^2 c^2 + m_0^2 c^4$ se reduz a apenas $E = pc$. O caso dos *fótons* trataremos com mais detalhes no capítulo a seguir.

Exemplo: 9.(PUC-RS-2003) A energia de um fóton é diretamente proporcional a sua frequência, com a constante de Planck, h , sendo o fator de proporcionalidade. Por outro lado, pode-se associar massa a um fóton, uma vez que ele apresenta energia ($E = mc^2$) e quantidade de movimento. Assim, a quantidade de movimento de um fóton de frequência f propagando-se com velocidade c se expressa como:

Solução: Para este problema utilizaremos a equação da energia de um fóton e associa-la a energia de quantização de acordo com texto.

$$E_{\text{fóton}} = p \cdot c$$

$$h \cdot f = p \cdot c$$

$$p = \frac{h \cdot f}{c}$$

Exemplo: 10. (ITA - 2006) No modelo proposto por Einstein, a luz se comporta como se sua energia estivesse concentrada em pacotes discretos, chamados de “quanta” de luz, e atualmente conhecidos por fótons. Estes possuem momento p e energia E relacionados pela equação $E = pc$, em que c é a velocidade da luz no vácuo. Cada fóton carrega uma energia $E = hf$, em que h é a constante de Planck e f é a frequência da luz. Um evento raro, porém possível, é a fusão de dois fótons, produzindo um par elétron-pósitron, sendo a massa do pósitron igual à massa do elétron. A relação de Einstein associa a energia da partícula à massa do elétron ou pósitron, isto é, $E = m_e \cdot c^2$. Assinale a frequência mínima de cada fóton, para que dois fótons, com momentos opostos e de módulo iguais, produzam um par elétron-pósitron após a colisão.

Solução: De acordo com o texto, numa colisão entre dois fótons de momentos lineares iguais produzirá a formação de um elétron e um pósitron (anti-partícula do elétron). Desta forma utilizaremos um princípio fundamental da mecânica que é a conservação da energia, já que a interação será apenas entre os fótons e sem perda de energia. Para este sistema isolado temos:

$$E_{fóton1} + E_{fóton2} = E_{elétron} + E_{pósitron}$$

$$p \cdot c + p \cdot c = m_e \cdot c^2 + m_e \cdot c^2$$

$$2p \cdot c = 2m_e \cdot c^2$$

$$p \cdot c = m_e \cdot c^2$$

Como sabemos $E = p \cdot c$ e também $E = h \cdot f$, portanto:

$$h \cdot f = m_e \cdot c^2$$

$$f = \frac{m_e \cdot c^2}{h}$$

Aula 5: Avaliação Final

1. Para dar início a esta aula, sugerimos que o professor possa fazer com a turma uma aula de mapas conceituais, para que possa ajudar os alunos a desenvolver um mapa construído por eles onde aprendam a interligar os conceitos criando subsunçores que fiquem ancorados em informações que eles já conhecem;
 2. Use como exemplo o mapa conceitual, construído com alunos do ensino médio que participaram desta pesquisa, que se encontra na página 20 da dissertação;
 3. Forme grupos de dois ou no máximo de três alunos para que eles possam construir seus mapas conceituais sobre relatividade restrita usando o que escreveram durante as aulas mas sem usar a internet para pesquisar. Estipule um tempo de 20 a 25 minutos para a conclusão da construção dos mapas e em seguida recolha os recolham para dar início a uma discussão com o grande grupo. Vale lembrar que não existe mapa certo nem errado, existem apenas mapas que precisam ser ajustados como os que foram apresentados nesta dissertação.
 4. Finalize a aula com um questionário com exercícios teóricos e matemáticos, para que possam ser identificados indícios de aprendizagem (exemplo como está na dissertação).
-
-

Aula 6: Introdução à Mecânica Quântica

1. Apresente oralmente os temas de Mecânica Quântica que serão abordados e faça um pré-teste com o mesmo objetivo dos que foram aplicados anteriormente;
 2. Assistir um vídeo com turma no endereço www.youtube.com/watch?v=FngrM5PeiYc, onde veremos a origem da Mecânica Quântica, bem como o efeito fotoelétrico, o átomo de Bohr, as ondas de matéria de De Broglie e o princípio da incerteza de Heisenberg;
 3. Durante a exibição do vídeo, o professor deve fazer algumas pausas para abrir um momento de discussão com os alunos para que eles possam ser instigados a fazer perguntas e ao mesmo tempo consigam compreender com o debate;
 4. Descreva a evolução histórica do corpo negro, bem como as teorias que tentaram explicar o processo de emissão da radiação por utilizarem para tal o eletromagnetismo clássico anterior a Max Planck;
 5. Para explicar a equação de quantização proposta por Planck em 1900 ($E = nhf$), utilize como exemplo a quantização da carga elétrica, ou os centavos de alguma moeda, pois desta forma, fazendo analogias, os alunos conseguirão entender a Física desta equação;
 6. Propor exercícios de cunho teórico e com aplicação matemática, bem como uma pesquisa sobre o que foi a catástrofe do ultravioleta para uma discussão com os alunos na próxima aula.
-

Efeito fotoelétrico

2.1 A origem da Mecânica Quântica



Max Planck

Figura 7: Fonte: <http://www.maxplanckflorida.org/institute/history/>

Max Karl Ernest Ludwig Planck, nasceu em Kiel, Alemanha, em 23 de abril de 1858. Foi fruto do segundo casamento de seu pai Wilhelm Planck, que era professor de direito na universidade local, com sua mãe Emma Platzig. Viveu em uma família de classe média alta, sob a influência de muita cultura que seria atribuída a seu pai e isto é percebida em toda a sua carreira. O interesse pela ciência surgiu, quando ele fez o seu curso secundário no *Maximilian Gymnasium* em Munique (BRENNAN, 2003). Nesta época, Planck assistia as notáveis aulas de um professor de matemática chamado de Hermann Muller, no qual abriu portas para que Planck começasse a entender Física. Em 1874, foi para Universidade de Munique para estudar Física mesmo sendo persuadido por um professor que o alertou, afirmando que não havia nada de novo na Física, tudo já havia sido descoberto. Três anos mais tarde, chega a Universidade de Berlim, onde lá assistiu as aulas de **Herman von Helmholtz** (1821 – 1894) e **Gustav Kirchhoff** (1824 – 1889), os dois principais físicos da época. A partir daí, Planck começou a se interessar por Termodinâmica, no qual utilizou o tema para sua tese de doutorado, influenciado pelas leituras feitas da obra de **Rudolf Clausius** (1822 – 1888). Ficou bastante impressionado pela clareza na ideias que Clausius descrevera, que fez da termodinâmica seu principal campo de estudo. Em 1879 apresentou em Munique sua tese de doutorado denominada originalmente de *Über den zweiten Hauptsatz der mechanischen Wärmetheorie* (Sobre o segundo teorema fundamental da teoria do calor) (PIRES, 2011). A

sua tese tratava dos dois princípios fundamentais da termodinâmica clássica: a conservação da energia e a entropia. Para ele a entropia estabelecia uma linha do tempo que aumenta em todos os processos físicos. Apesar de muito esforço e de suas ideias experimentais acerca da entropia, não impressionou a banca de defesa. Nem mesmo sua fonte de inspiração, Rudolf Clausius, mostrou interesse por sua tese, pois Planck o enviou uma cópia para possíveis comentários mas não obteve resposta. No ano seguinte, após obter o título de doutor, em 1880 integrou o corpo docente da Universidade de Munique e em 1885 entra para Universidade de Kiel como professor titular (BRENNAN, 2003). Neste mesmo ano conheceu um talentoso estudante de Física chamado de **Wilhelm Wien** (1864 – 1928) e com a ajuda do trabalho de Wien, que mais tarde Planck iria dar a sua maior contribuição na Física. Com a morte de Kirchhoff em 1889, e com a ajuda de Helmholtz, Planck assumiria a cátedra de Kirchhoff e assim se tornaria professor titular da Universidade de Berlim, onde permaneceu até sua aposentadoria em 1926 (ROONEY, 2013). Gustav Kirchhoff, em 1859, trabalhava em um problema físico clássico que desafiava a teoria eletromagnética atual: o problema do *corpo negro*. Para Kirchhoff o corpo negro ideal deve possuir uma cavidade com um orifício que por natureza, tem a propriedade de absorver uma radiação incidente sobre ele e não refletir nada.

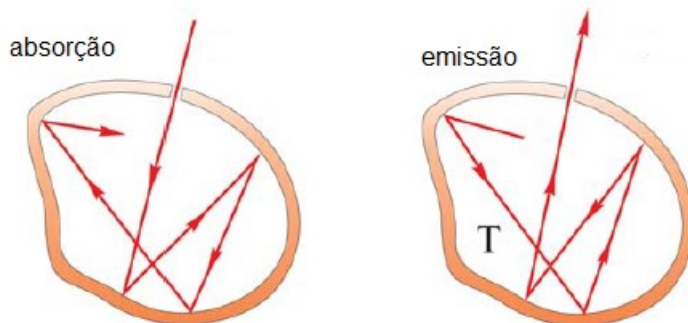


Figura 8: Fonte: <http://www.ufjf.br/fisica/files/2010/03/Labfismodroteiro.pdf>

Mas quando submetido a elevadas temperaturas deveria irradiar todas as frequências da luz. Um bom exemplo que podemos tomar é o carvão. Quando aquecido, emite uma luz avermelhada e também alaranjada. Kirchhoff estabeleceria uma relação simplificada entre uma densidade de energia u e o fluxo Φ desta energia emitida pela cavidade, dada por:

$$u = \frac{4\Phi}{c} \quad (2.1)$$

Utilizando a termodinâmica clássica, dois pesquisadores tentaram resolver o problema do corpo negro. Um deles é o físico austro-esloveno **Joseph Stefan** (1835 – 1893), que tinha estudado as medidas feita por Tyndall da emissão de radiação de um fio de platina em duas temperaturas diferentes, onde chegaria a conclusão de que a emissão era proporcional a quarta potência da temperatura absoluta.

$$\Phi = kT^4 \quad (2.2)$$

O outro era o físico austríaco **Ludwig Boltzmann** (1844 – 1906), que estudou de forma teórica a radiação emitida em uma cavidade de um corpo negro ideal. Boltzmann observou que a radiação deve exercer uma pressão p sobre as paredes da cavidade e proporcional a densidade de energia u proposto por Kirchhoff:

$$p = \frac{1}{3}u \quad (2.3)$$

Como já mencionamos o corpo negro absorve toda a radiação nele incidente pelo orifício em cada ponto do interior da cavidade. Segundo Rosa (2014) na emissão de radiação ao

ser aquecido, o corpo negro obedece a uma lei de emissão conhecida como *Lei de Stefan-Boltzmann* relacionando a energia emitida pela radiação por unidade de área com a quarta potência da temperatura absoluta: $R_t = \sigma T^4$, onde σ é a constante de Stefan-Boltzmann e vale $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^4$. Esta lei, por sua vez não explica o quanto de energia era emitido em diferentes frequências, pois a equação de Stefan-Boltzmann apenas se atém em função da temperatura. Desta forma o problema do espectro de emissão da radiação do corpo negro não foi resolvido. Dando continuidade a esses trabalhos, Wien em 1894 pôde mostrar que a densidade de energia u era associada ao comprimento de onda λ da radiação, através da relação:

$$\lambda_m = bT^{-1} \quad (2.4)$$

Onde a constante $b = 2,898 \cdot 10^{-3} \text{ mK}$.

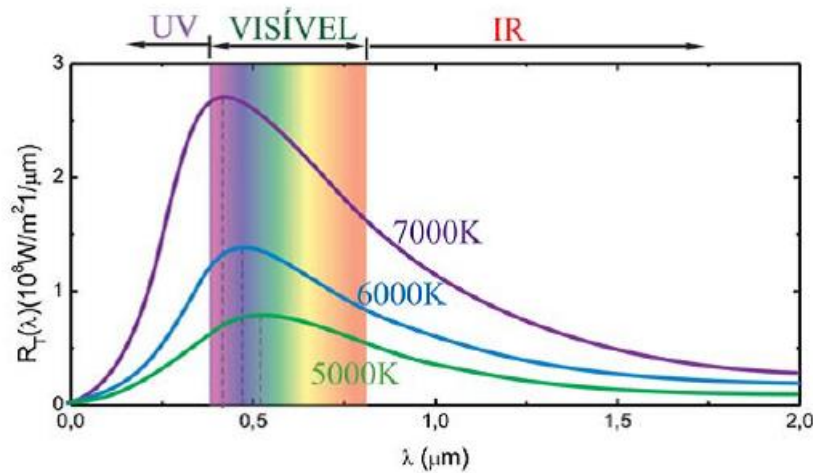


Figura 9: Fonte: <http://www.ufjf.br/fisica/files/2010/03/Labfismodroteiro.pdf>

Esta relação matemática representa o que ficou conhecida como *Lei do Deslocamento de Wien*, que mostra que se a distribuição espectral tiver um ponto de máximo, esse ponto se deslocará obedecendo a equação acima. Mas o problema ainda continuava a tirar o sono dos físicos da época porque, a lei de Wien era precisa apenas em uma faixa do espectro da luz, aquelas de altas frequências (curto comprimento de onda) e falhava na faixa do espectro da luz de baixa frequência (alto comprimento de onda). A teoria eletromagnética da época, previa que se um corpo estivesse aquecido ele deveria emitir a radiação na faixa de frequência mais elevada, ou seja, ao ser aquecido o corpo deveria emitir uma luz *violeta* que por sua vez é a frequência mais alta do espectro da luz visível. Sendo assim, o corpo deveria irradiar unicamente radiação *ultravioleta* que está fora do espectro da luz visível. Isso significa que cada vez que um corpo fosse aquecido e chegasse a elevadas temperaturas a emissão da radiação deveria ser a ultravioleta e consequentemente o corpo se tornaria **invisível**. Como isso não acontece, esse fato ganhou o nome de *Catástrofe do Ultravioleta*, hoje é conhecido como "anomalia ultravioleta". Nota-se o quanto foi desafiador para Planck estabelecer uma lei que resolvesse de forma elegante este problema. Planck teve que encontrar uma solução, que esta foi revolucionária para o meio científico, pois deixaria de lado os conceitos fundamentais da física clássica e abriria a porta para uma nova Física, a *Mecânica Quântica*. Planck começou a investigar o problema a partir da catástrofe do ultravioleta e o fato da lei de Wien não funcionar na faixa do vermelho. Partindo da teoria atômica, Planck sabia que toda a matéria era composta de átomos supondo que os mesmos fossem "tijolinhos" que constituiriam a matéria. Para a comunidade científica da época, a energia era irradiada em ondas e de forma contínua, como as ondas de calor, luz ou som. No ano de 1900, Planck percebeu que deveria modificar o conceito de emissão contínua da energia para que pudesse explicar a radiação do corpo negro. A nova ideia era de que a energia não deve ser emitida de modo contínuo e sim em "pacotes" o qual denominou de *quantum* que no plural seria *quanta*. Planck postulou

que a energia poderia assumir qualquer valor, mas sempre um múltiplo inteiro que era proporcional a h (conhecida como constante de Planck) e a frequência f da radiação. Essas quantidades discretas ou *quantas* de energia é dada pela expressão:

$$E = nhf \quad (2.5)$$

O termo n que aparece na equação acima são valores inteiros (0, 1, 2, 3, ...) representando a quantidade de fótons existentes na radiação, h é a constante de Planck que assume os valores $h = 6,6 \cdot 10^{-34} \text{ J.s}$ ou $h = 4,14 \cdot 10^{-15} \text{ eV.s}$ e f a frequência da radiação em hertz (Hz). Na equação da quantização da energia, Planck mostrou que um **quantum** de luz violeta possui mais energia que um **quantum** de luz vermelha. Desta forma, quando um corpo negro irradia energia, esta energia não é emitida de uma maneira uniforme em todas as frequências, pois a quantidade de energia que é emitida na baixa frequência é mais fácil de se juntar do que a quantidade de energia de alta frequência. Emitir energia na faixa de alta frequência é pouco provável de existir por conta do acúmulo de energia necessária para a emissão, portanto isto comprova que a catástrofe do ultravioleta **não** existe. Max Planck é considerado o pai da Teoria Quântica, onde ele próprio inicialmente não acreditava. Ele a concebeu de uma forma desesperada para resolver o problema do corpo negro. Anos mais tarde a teoria quântica tomou grandes proporções vindo a ser utilizada por outros físicos para solucionar novos problemas que surgiram, no qual a física clássica não explicava como: o efeito fotoelétrico e o modelo atômico do hidrogênio. Em 1918, finalmente por reconhecimento e importância da Teoria Quântica, Max Planck ganhou o Prêmio Nobel de Física.

Exemplo: 11. (UFC – 2004) Quanto ao número de fótons existentes em 1 joule de luz verde, 1 joule de luz vermelha e 1 joule de luz azul, podemos afirmar, corretamente, que:

- a) existem mais fótons em 1 joule de luz verde que em 1 joule de luz vermelha e existem mais fótons em 1 joule de luz verde que em 1 joule de luz azul.
- b) existem mais fótons em 1 joule de luz vermelha que em 1 joule de luz verde e existem mais fótons em 1 joule de luz verde que em 1 joule de luz azul.
- c) existem mais fótons em 1 joule de luz azul que em 1 joule de verde e existem mais fótons em 1 joule de luz vermelha que em 1 joule de luz azul.
- d) existem mais fótons em 1 joule de luz verde que em 1 joule de luz azul e existem mais fótons em 1 joule de luz verde que em 1 joule de luz vermelha.
- e) existem mais fótons em 1 joule de luz vermelha que em 1 joule de luz azul e existem mais fótons em 1 joule de luz azul que em 1 joule de luz verde.

Solução: De acordo com a equação de quantização proposta por Max Planck $E = nhf$, a energia dos fótons de uma radiação é proporcional a frequência da mesma. Analisando o espectro eletromagnético, sabemos que a radiação vermelha é a de menor frequência e a azul é a de maior frequência dentre as citadas no texto. Sendo assim, para uma mesma quantidade de energia para as três radiações, aquela que deverá conter maior número de fótons é a vermelha, em seguida a verde e depois a azul. Portanto a alternativa correta do problema é a letra **b**. Matematicamente podemos provar da seguinte forma:

$$E_{\text{vermelho}} = E_{\text{verde}} = E_{\text{azul}}$$

$$n_{\text{vermelho}} \cdot h \cdot \nu_{\text{vermelho}} = n_{\text{verde}} \cdot h \cdot \nu_{\text{verde}} = n_{\text{azul}} \cdot h \cdot \nu_{\text{azul}}$$

$$n_{\text{vermelho}} \cdot \nu_{\text{vermelho}} = n_{\text{verde}} \cdot \nu_{\text{verde}} = n_{\text{azul}} \cdot \nu_{\text{azul}}$$

Logo percebemos que nas igualdades acima, as grandezas número de fótons n e a frequência ν se relacionam através de um produto, apresentando assim uma relação de serem inversamente proporcionais, ou seja, quanto maior a frequência menor o número de fótons.

Aula 7: Efeito fotoelétrico

1. Inicie tirando as possíveis dúvidas referentes aos exercícios propostos na aula anterior e também discuta com os alunos o que eles entenderam sobre o que foi a catástrofe do ultravioleta;
 2. Abordar de forma simples e detalhada o contexto histórico sobre o efeito fotoelétrico desde as primeiras observações com Heinrich Hertz, depois em uma investigação ainda mais profunda com Phillip Lenard (aluno de Hertz), e em seguida já de posse da teoria quântica, Albert Einstein consegue explicá-lo e ainda leva o prêmio Nobel de Física de 1921;
 3. Use a simulação <phet.colorado.edu/pt_BR/simulation/legacy/photoelectric>, sobre o experimento de Lenard onde você possa estimular a turma com algumas perguntas quando utilizar a simulação. Comece falando sobre as frequências das radiações, iniciando com a luz vermelha, alterando a intensidade e mesmo assim ela não conseguirá arrancar os elétrons das placas. Assim, os alunos irão lembrar do que viram no vídeo e ao mesmo tempo vão perceber que o efeito não depende da intensidade da radiação e sim de uma determinada frequência associada a energia de acordo com a equação de quantização de Planck. Justifique o fato da existência de uma grandeza associada ao material da placa (função trabalho), para que os alunos entendam que isto também é relevante no estudo do efeito fotoelétrico. Em seguida, faça incidências com as cores (radiações) disponíveis na simulação em ordem crescente de frequência e consequentemente teremos aquela que conseguirá arrancar os elétrons da placa. Com as radiações de frequências maiores, os elétrons serão submetidos a velocidades maiores depois de arrancados e isto confirma a equação de Einstein para o efeito fotoelétrico.
 4. Apresente algumas aplicações práticas do efeito fotoelétrico em nosso cotidiano, como por exemplo: os sensores existentes nas portas dos elevadores, células de iluminação públicas (células fotoelétricas), aparelhos semicondutores, pilhas solares, cinema falado, imagens animadas (televisão).
 5. Resolva alguns exercícios que abordem a teoria e outros que usem as equações do efeito fotoelétrico. Passe uma atividade para os alunos resolverem em casa.
-
-

2.2 Albert Einstein e o Efeito Fotoelétrico

O efeito fotoelétrico consiste na emissão de elétrons de uma superfície metálica quando submetido a uma determinada radiação. Segundo [Peruzzo \(2013\)](#) este fenômeno foi observado no ano de 1887 por Heinrich Hertz, quando tentava provar as teorias de Maxwell captando ondas eletromagnéticas, onde a produção de centelhas entre dois eletrodos era facilitada quando se incidia luz sobre eles.

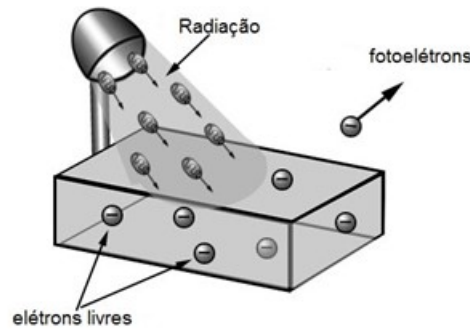


Ilustração do efeito fotoelétrico

Figura 10: Fonte: <http://efeitofotoeletricoecompton.webnode.com.br/efeito-fotoeletrico2/>

Após as observações de Hertz, algumas perguntas ficaram de início sem respostas. Porém coube ao seu aluno Phillip Lenard, fazer uma investigação mais detalhada sobre este efeito que mais tarde através das mãos de Einstein veio a primeira comprovação da teoria quântica e que mesmo assim não foi totalmente aceita pelos físicos da época. De acordo com [Brennan \(2003\)](#) o que deixava os experimentadores perplexos era que o aumento da intensidade não produzia nenhum efeito, mas a mudança do comprimento de onda (ou da cor) os afetava. Luz de cor azul, por exemplo, faziam com que os elétrons fossem arrancados com maior velocidade e luz de cor vermelha, para qualquer intensidade, não conseguia arrancar nenhum elétron. É impossível explicar esse resultado com base na teoria clássica da luz como uma onda eletromagnética. Isto é porque a energia contida numa tal onda iria chegar ao metal, a uma taxa uniforme e não há nenhuma razão aparente para que esta energia deva ser dividida de tal maneira que o máximo da energia dos elétrons é proporcional à frequência independente da intensidade de luz ([RAE, 2007](#)). Essas considerações levaram a Albert Einstein a publicar em 1905 um trabalho intitulado *Um ponto de vista heurístico sobre a produção e transformação da luz* onde a física clássica não explicava de forma completa as propriedades da luz, e sendo assim devemos assumir que a radiação carrega pequenos pacotes de energia, conhecidos por fótons, e que cada um desses fótons possui uma quantidade de energia $h\nu$ ([NUSSENZVEIG, 1998](#)). Einstein percebendo que a energia da radiação depende da frequência ν , esclarece o fato de que a emissão de elétrons do metal independe da intensidade da luz. Segundo [Rae \(2007\)](#) o máximo de energia que um elétron pode ganhar é levada por um dos fótons. Parte desta energia é utilizado para ultrapassar a energia de ligação dos elétrons para o metal de modo a contabilizar a quantidade Φ , que é conhecido como a função trabalho e o restante da energia é convertida em energia cinética de acordo com a equação, que ficou conhecida como a equação de Einstein para o efeito fotoelétrico, dada por:

$$E_C = h\nu - \Phi \quad (2.6)$$

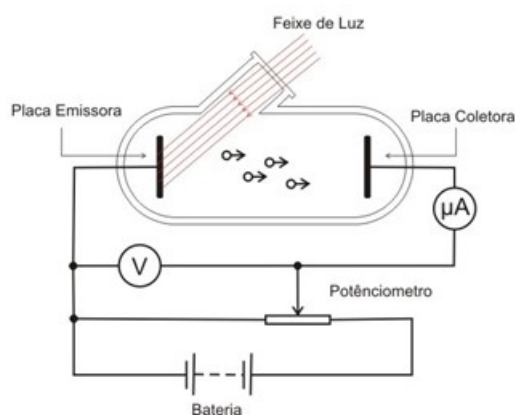
A teoria dos fótons de Einstein conseguiu explicar os resultados experimentais até então observados. Porém não ocorrerá a emissão de elétrons da superfície de um metal se a radiação incidente não conter uma frequência ν , tal que $\nu > \nu_0$, onde a energia dessa onda $E > \Phi$ ([PERUZZO, 2013](#)). Segundo [Resnick \(1979\)](#) numa situação onde K for igual a zero, temos:

$$h\nu_0 = \Phi_0 \quad (2.7)$$

Isso significa que um fóton de frequência ν_0 tem exatamente energia necessária para ejetar os fotoelétrons, e nenhum excesso que possa aparecer como energia cinética. Portanto se a frequência for menor que ν_0 , os fótons, não importando quanto eles sejam (quanto maior a intensidade da radiação) não possuirão energia necessária para arrancar os fotoelétrons.

2.3 O experimento de Philipp Lenard

Philipp Lenard, como já foi mencionado, era aluno de Hertz e deu continuidade na investigação do efeito fotoelétrico. De acordo com Nussenzveig (1998), em seu experimento ele utilizou uma ampola de quartzo evacuada (transparente a luz, na qual já se conheciam a frequência e a intensidade), que incidirá sobre uma placa metálica (cátodo) e esta fazia com que os elétrons fossem ejetados da placa (cátodo) e se dirigissem para uma outra placa (ânodo).



Modelo experimental de Philipp Lenard

Figura 11: Fonte: https://pt.wikipedia.org/wiki/Comportamento_dua_l_a_r_a_dia

Neste circuito havia um amperímetro conectado em série com uma bateria de tensão regulável, onde registraria a passagem da corrente elétrica, configurando a realização do efeito fotoelétrico. Ao variar os parâmetros (frequência e intensidade) da luz incidente, refletirá no valor registrado da corrente pelo amperímetro devido a quantidade de fotoelétrons ejetados do cátodo.

2.4 Observações importantes do experimento de Lenard

1. A medida da corrente no amperímetro depende da intensidade luminosa, ou seja, $i \propto I$.
2. O intervalo de tempo entre o surgimento da corrente elétrica ao se incidir luz no cátodo é praticamente nulo, e este não depende da intensidade da iluminação. (Fato este que não é explicado classicamente).
3. Para a ocorrência do efeito fotoelétrico ($i \neq 0$) é necessário que a frequência da luz incidente seja maior ou igual a uma frequência mínima, também conhecida por *frequência de corte* do cátodo, ou seja $f_{Luz} \geq f_0$. A frequência de corte f_0 depende da natureza do material, ou seja, mudando o material do cátodo altera-se o valor da frequência de corte. O fato da corrente fotoelétrica ser diferente de zero, significa dizer que existe uma dependência da frequência da luz incidente. E este fato também não pode ser explicado classicamente.

No experimento, Lenard possui uma fonte de tensão cujo valor é regulável. Sendo assim podemos relatar, três aspectos importantes.

1. Para uma tensão nula $\Delta V = 0$, implica na não formação de um campo elétrico entre as placas e desta forma os elétrons ejetados não possuíram uma direção definida. Assim fica claro da importância da ampola ser evacuada.
2. Para uma tensão positiva $\Delta V > 0$, implica na formação de um campo elétrico entre as placas (acelerando os elétrons) e assim mais elétrons ejetados irão atingir o ânodo.
3. Para uma tensão negativa $\Delta V < 0$, iremos inverter o sentido do campo elétrico entre as placas e desta maneira os elétrons serão **freados** ao invés de **acelerados** segundo [Nussenzveig \(1998\)](#). A corrente elétrica continua existindo no mesmo sentido, mas a medida que o módulo da tensão aumenta esta corrente vai diminuindo e quando chegar a zero, o potencial irá assumir um valor que é conhecido como **potencial retardador ou de corte**.

No caso dos elétrons que ficam submetidos a uma tensão $\Delta V < 0$ (potencial retardador), a perda de energia é dada pela equação:

$$E_C = -e \cdot \Delta V \quad (2.8)$$

$$V_{ret} = \frac{E_C}{e} \quad (2.9)$$

Conclui-se que o potencial retardador ou de corte V_{ret} , impede a ejeção dos elétrons da placa do catodo, por não possuir energia suficiente para vencer este potencial. Avaliando o fato pela intensidade da radiação, observou-se que no gráfico haverá um aumento na corrente elétrica, pois a mesma é proporcional a intensidade, mas mesmo assim ainda teremos o mesmo potencial de corte e a teoria clássica mais uma vez não explica tal fato segundo [Nussenzveig \(1998\)](#). A teoria clássica esperava que como uma onda eletromagnética transporta energia que é proporcional a sua intensidade, independentemente de sua frequência. E essa energia seria transferida aos elétrons do catodo pois eles são colocados em oscilação forçada pelo campo elétrico da onda, de acordo com ([NUSSENZVEIG, 1998](#)).

2.5 A influência do experimento de Lenard sobre Einstein

O experimento de Phillip Lenard foi de grande importância para Einstein, onde propunha uma nova teoria para a luz e usa como exemplo de aplicação de sua nova teoria o efeito fotoelétrico. De acordo com [Resnick \(1979\)](#) Einstein não concentrou sua atenção na forma ondulatória familiar com que a luz se propaga, mas sim na maneira corpuscular com que ela é emitida e absorvida. Contudo, Einstein propõe alguns postulados da composição da luz baseando-se na teoria quântica de Max Planck. De acordo com [Caruso \(2013\)](#) a ideia de Einstein era bastante simples, pois admitia que a energia da radiação eletromagnética não era distribuída uniformemente sobre as frentes de ondas de frequência e sim concentrada em *pacotes* de energia $h\nu$, denominados por Einstein de **Lichtquantum** (quantum de luz). Para Einstein, o "quantum de luz" de energia $h\nu$ colide com o elétron e cede sua energia para vencer a energia de ligação ϕ e a diferença é energia cinética que o elétron sai do material, ou seja, $E_C = h\nu - \Phi$. Além de tudo isso, ele também propõe que há uma relação entre o potencial de corte com a frequência da luz incidente no qual a comprovação experimental deste fato foi realizada por Robert Milikan em 1914. Milikan determinou a constante de Planck utilizando a equação do efeito fotoelétrico de Einstein que envolve o potencial de corte e a frequência da luz incidente.

$$V_{ret} = \frac{E_C}{e} \quad (2.10)$$

$$V_{ret} = \frac{E_f - \phi}{e} \quad (2.11)$$

$$V_{ret} = \frac{h\nu - h\nu_0}{e} \quad (2.12)$$

$$V_{ret} = \frac{h}{e}(\nu - \nu_0) \quad (2.13)$$

De acordo com [Resnick \(1979\)](#) a teoria de Einstein prevê uma relação linear entre o potencial de corte V_0 e a frequência ν , em completa concordância com os resultados experimentais. Na figura a seguir, vemos o gráfico que correlaciona a frequência mínima ou de corte com o potencial de corte de materiais diferentes, onde percebemos que quanto maior a frequência de corte maior será o potencial de corte, caracterizando assim a dependência da natureza do material da placa com a frequência da luz incidente.

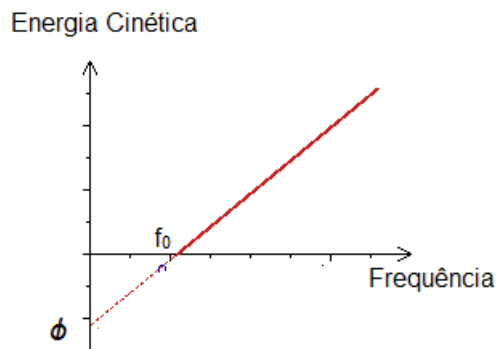


Figura 12: Gráfico do potencial de corte

Exemplo: 12.(UFPE – 2009) O cério metálico tem uma função trabalho (potencial de superfície) de $1,8\text{eV}$. Qual a energia cinética máxima dos elétrons, em eV, que escapam da superfície do metal quando ele é iluminado com luz ultravioleta de comprimento de onda igual a 327 nm ? Considere $1\text{eV} = 1,6 \cdot 10^{-19}\text{ J}$ e $h = 6,6 \cdot 10^{-34}\text{ Js}$.

Solução: Neste exemplo, temos apenas que aplicar a equação do efeito fotoelétrico proposta por Einstein, mas devemos converter a unidade da função trabalho que está em **eV** para joule **J**. E quando determinarmos o valor da energia cinética, converteremos novamente para **eV**.

$$E_C = E_f - \phi$$

$$E_C = h \cdot \frac{c}{\lambda} - \phi$$

$$E_C = 6,6 \cdot 10^{-34} \cdot \frac{3 \cdot 10^8}{327 \cdot 10^{-9} - 1,8 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}}$$

$$E_C = 6 \cdot 10^{-19} - 2,88 \cdot 10^{-19}$$

$$E_C = 3,12 \cdot 10^{-19}\text{ J}$$

Encontrada a energia cinética, iremos converter o resultado de joule para elétron-volt. Faremos isto, dividindo o mesmo por $1,6 \cdot 10^{-19}$. Portanto temos:

$$E_C = \frac{3,12 \cdot 10^{-19}}{1,6 \cdot 10^{-19}}$$

$$E_C \cong 2,0\text{eV}$$

O átomo de Bohr

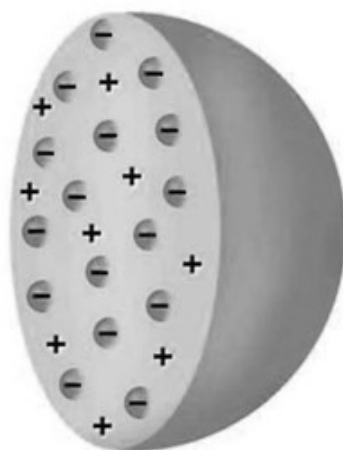
Datam de mais de 2500 anos atrás, onde os gregos buscavam um elemento fundamental (primordial) no qual dava a origem a todas as coisas. Esta busca fundamentava-se na composição da matéria por quatro elementos: *ar, água, fogo e terra*. Destacaram-se os pré-socráticos como Tales de Mileto (624 – 546a.C.) que afirmava que o elemento primordial era a **água**, enquanto que para Anaximandro (610 – 546a.C.) considerava o *apeiron* como a substância primordial e ainda mais indefinida do que a de Tales e para Anaxímenes (570 – 500a.C.) o elemento primordial era o **ar** pois o mesmo reduziria uma porção de água através de uma compressão. Porém, segundo Bassalo (1980), os primeiros filósofos gregos a introduzir a ideia de que o universo era feito de átomos (indivisível em grego) foi Leucipo (460 – 370a.C.) e Demócrito (470 – 380a.C.) (considerados fundadores da filosofia atomista). Para Leucipo, o universo era constituído de átomos e espaço vazio, onde eles poderiam colidir uns com os outros para formar novas estruturas e para Demócrito (discípulo de Leucipo) onde destaca a que os átomos são diferentes um dos outros, ou seja, cada substância tem um átomo diferente de outra substância a partir de suas propriedades. Os experimentos feitos por Antoine Lavoisier (1743 – 1794) comprovaram que os elementos eram compostos por átomos, nos quais foi observado que os mesmos possuíam massas e propriedades diferentes (GUIMARÃES, 2013). O método científico foi ponto de partida para se aprofundar no conhecimento acerca do átomo. De acordo com Guimarães (2013) foi Dalton que deu o primeiro passo investigativo. Ele descreveu em seis postulados suas investigações, que são:

1. Toda matéria é composta por minúsculas partículas chamadas átomos.
2. Os átomos de um determinado elemento são idênticos em massa e apresentam as mesmas propriedades químicas.
3. Átomos de diferentes elementos apresentam massa e propriedades diferentes.
4. Átomos são permanentes e indivisíveis, não podendo ser criados e nem destruídos.
5. As reações químicas correspondem a uma reorganização de átomos.
6. Os compostos são formados pela combinação de átomos de elementos diferentes em proporções fixas.

Na evolução dos conceitos para o átomo, podemos destacar vários nomes como: Robert Boyle (1627 – 1691); Pierre Gassendi (1592 – 1655); Joseph Louis Proust (1754 – 1826); Joseph Louis Gay-Lussac (1778 – 1850); Amedeo Avogadro (1776 – 1856) entre outros que deram grande contribuição na pesquisa sobre o átomo.

3.1 Modelo de Thomson

O homem tem se habituado, desde a antiguidade, a observar a natureza, tentando compreendê-la de forma racional. Para esta compreensão é necessário a construção de um modelo para estudo, onde precisamos realizar analogias e abstrações do mundo real. Galileu, foi o primeiro físico a introduzir esta metodologia para construção de modelos, para estudar um determinado fenômeno físico, no qual denominamos de método científico. Quando criou, por exemplo, um sistema isolado (hipotético) do mundo, Galileu restringiu o conceito aristotélico do movimento, o que foi crucial para o crescimento da cinemática e da dinâmica. Segundo Caruso (2006) um modelo físico deve ser capaz não só de permitir a explicação do fenômeno estudado, como também de fazer previsões; pode ou não ser coerente com outros modelos ou teorias relacionados com o fenômeno. O modelo criado inicialmente para o átomo foi como blocos construtores de toda a matéria. Em 1904, Joseph John (J.J) Thomson (1856 – 1940), propôs um modelo para o átomo no qual ficou conhecido por *pudim de passas* pela semelhança com um pudim contendo groselha.



Modelo de Thomson

Figura 13: Fonte: <http://espetacularquimica.blogspot.com.br/2013/02/o-modelo-atomico-de-thomson.html>

Neste modelo, Thomson descreve o átomo como uma nuvem de carga positiva com "pontinhos" de cargas negativas (corpúsculos). O modelo de Thomson foi importante em alguns aspectos, pois o mesmo explicaria fenômenos como a eletrização por atrito, a corrente elétrica e a formação de íons e descargas elétricas nos gases. Mas de acordo com Rooney (2013) o modelo do pudim de passas foi desaprovado em 1909 por um experimento feito pelo físico alemão Hans Geiger (1882 – 1945) e o neozelandês Ernest Marsden (1889 – 1970), na Universidade de Manchester, onde trabalhavam sob a supervisão de Ernest Rutherford (1871 – 1937). Eles trabalham em um experimento que consistia na emissão de partículas alfa (núcleos de hélio formado por dois prótons e dois nêutrons ou He^{++}) através de uma fonte radioativa (átomos de polônio) sobre um finíssima placa de ouro ($8,6 \cdot 10^{-6} cm$) envolvida por uma folha de sulfeto de zinco, onde esta emitia luz quando atingida pelas partículas alfa (PARENTE, 2013). Nesta experiência, esperava-se encontrar algumas informações sobre a estrutura atômica devido as colisões das partículas alfa com os átomos de ouro e também que houvesse deflexão em pequenos ângulos. O resultado mostrou o contrário do que se esperava, pouca deflexão mas com ângulos superiores a 90° (ROONEY, 2013). Desta forma, a interpretação dada por Rutherford, era que a carga positiva não se encontrava distribuída como propunha o modelo de Thomson, mais estaria concentrada numa região central muito pequena do átomo. A partir de então coube a Rutherford implantar um novo modelo para o átomo.

3.2 Modelo de Rutherford

Dois anos após realizar o experimento com as partículas alfa colidindo com a folha de ouro, Rutherford apresenta em 1911 o seu modelo atômico que ficou conhecido como modelo planetário.

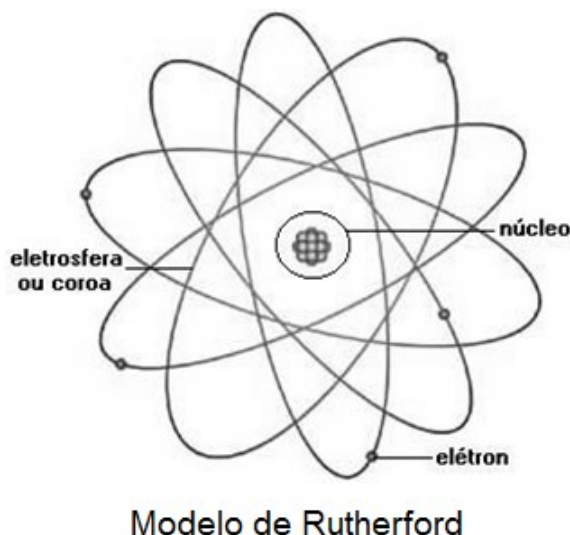
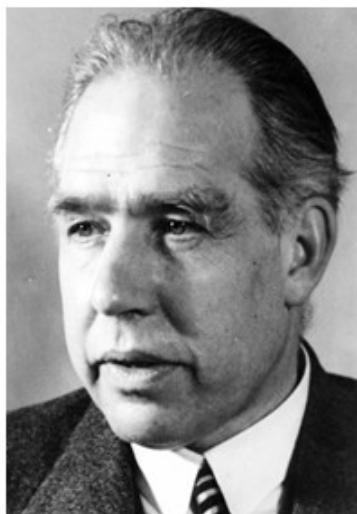


Figura 14: Fonte: <http://www.brasilecola.com/fisica/do-atomo-rutherford-ao-atomo-bohr.htm>

Neste modelo, Rutherford considerou que o átomo era constituído por um núcleo minúsculo, denso e cercado de um espaço quase vazio no qual elétrons orbitam presos ao núcleo por forças eletromagnéticas (PARENTE, 2013). No início, ele não sabia ao certo se a constituição do núcleo era de cargas negativas ou apenas cargas positivas, porém chegou a encontrar a ordem de grandeza de seu diâmetro que era em torno de 10^{-14}m , bem próximo dos valores obtidos atualmente. Do espalhamento das partículas alfa, percebeu-se que a conservação da energia cinética das partículas devido a não penetrarem no núcleo (massa muito maior que as partículas alfas) sendo repelidas pela força elétrica. É claro que para a época, a conclusão de Rutherford era um pouco *bizarra*, pois se fizéssemos uma simples analogia onde o núcleo fosse comparado com uma simples bolinha de raio $0,5\text{cm}$ a órbita do elétron (eletrosfera) seria da ordem de 1km de raio. Com essa analogia, observamos que o átomo de Rutherford era constituído de um imenso espaço vazio. Toda a concepção de que se tem para o átomo hoje, evoluiu a partir dessas discussões. É notável que os detalhamentos verificados por Rutherford em suas experiências não deixam dúvidas acerca da veracidade de seu modelo. Mas o modelo de Rutherford apresentava um problema para a teoria eletromagnética clássica, pois como os elétrons são partículas com cargas elétricas deveriam emitir radiação quando girassem em torno do núcleo e assim iriam perder energia, se movendo em uma trajetória espiralada e chocar-se-iam com o núcleo levando a matéria ao colapso, ou seja, toda a matéria segundo o modelo de Rutherford deveria implodir sem cessar. Desta forma, seria necessário o surgimento de uma nova teoria que pudesse resolver o problema do modelo de Rutherford para explicar o porquê que a estrutura da matéria não entra em colapso. Surge então a pessoa do físico Niels Bohr.

3.3 Modelo de Bohr

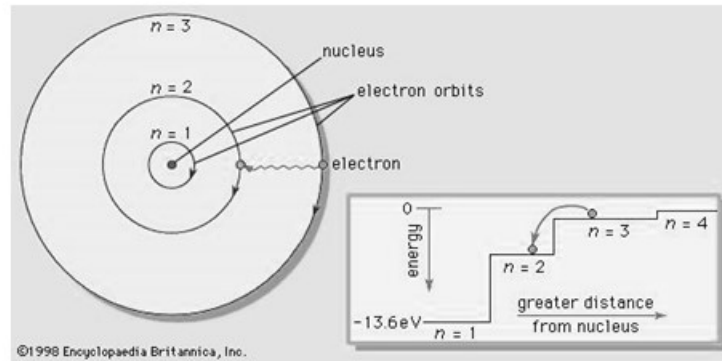


Niels Bohr

Figura 15: <http://csce2012.ca/tag/bohr/>

No ano de 1912 o físico dinamarquês Niels Bohr, chega a Manchester para trabalhar no laboratório de Rutherford após chegar de Copenhague. Segundo [Brennan \(2003\)](#), Niels Bohr entrou na universidade de Copenhague em 1903, onde estudou física e em 1911 ele se doutorou com uma tese sobre a teoria eletrônica dos metais que enfatizava as inadequações da física clássica para tratar a matéria no nível atômico. A partir deste estudo, fica claro o rumo ao qual ele iria seguir. Nesta primeira estada em Manchester, modelou a sua abordagem a física e à condução de projetos de pesquisa em física. Ainda em 1912, quando retorna para Copenhague, foi nomeado a professor assistente na Universidade de Copenhague. Nesta época, quando já estava estabelecido na Universidade, ele começa a pensar nas implicações da física clássica, mais precisamente na teoria eletromagnética de Maxwell, sobre o modelo do átomo de Rutherford e como a matéria não entra em colapso já que a teoria clássica aponta para isso. O modelo na visão de Bohr era engenhoso, mas como explicar o porquê que o elétron não cai no núcleo após emitir radiação eletromagnética, perdendo assim energia e sua trajetória se tornaria uma espiral e o mesmo entraria no núcleo, onde retornaríamos a um *pudim de passas*, mas só que agora do tamanho do núcleo atômico. De acordo com [Brennan \(2003\)](#) ele chega a conclusão de que com ou sem teoria o elétron não irradia energia enquanto estava em órbita. Mas, para o hidrogênio tanto a teoria quanto os dados experimentais, mostravam que ele irradiava energia quando submetido a altas temperaturas. Essa foi uma questão na qual ele decidiu investigar. Bohr era acostumado a investigar minuciosamente suas falhas, que levavam-no a conceber novas teorias para a correção desses defeitos. Numa investigação sobre o átomo de hidrogênio, conclui que os elétrons quando estivessem numa determinada órbita não irradiavam energia, mas quando mudassem de órbita, se afastando do núcleo ou se aproximado dele, deveriam emitir ou absorver radiação. Daí surge o chamado *salto quântico*. Segundo [Brennan \(2003\)](#) os elétrons que estão mais afastados do núcleo têm maior energia e um elétron pode saltar para um nível mais alto absorvendo energia e isso ocorre em altas temperaturas ou quando fótons com energia suficiente atingissem o átomo. Bohr estava se apoiando na teoria quântica de Planck, para explicar o porquê que os elétrons estariam em órbitas com energias fixas, onde essas energias são suficientes para enviar elétrons para outras órbitas. Desta forma, ele estaria fazendo uma ponte no qual ligaria a matéria com a radiação (luz). Os elétrons devem emitir ou absorver pacotes de energia provenientes dos fótons da radiação, que quanto menor o comprimento de onda da radiação maior será a energia dos fótons. Essa concepção proposta por Bohr vem após uma

investigação da espectroscopia atômica, mostrando que cada elemento possui um espectro de raios diferentes. A espectroscopia foi estudada inicialmente pelo físico Gustav Kirchhoff onde encontrou uma ligação entre as linhas espectrais (raias) com os elementos químicos, e é por essa ferramenta que os astrônomos identificam a constituição dos elementos que compõe as estrelas distantes (BRENNAN, 2003).



Modelo de Bohr

Figura 16: Fonte: <http://www.britannica.com/science/scientific-modeling>

Niels Bohr estudou detalhadamente o átomo de hidrogênio pela sua simplicidade, apenas um elétron em torno do núcleo, e desta forma criou alguns postulados utilizando a teoria quântica como base de investigação. De acordo com Resnick (1979), os postulados de Bohr são:

1. *Um elétron em um átomo se move em uma órbita circular em torno do núcleo sob influência da atração coulombiana entre o elétron e o núcleo, obedecendo às leis da mecânica clássica.*

O primeiro postulado de Bohr mostra que a força elétrica que atua no elétron do átomo de hidrogênio (que contém um próton e um nêutron no núcleo) é a resultante centrípeta, e desta forma podemos expressar matematicamente como:

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{e^2}{r^2} = m \frac{v^2}{r} \quad (3.1)$$

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{e^2}{r} = m \cdot v^2 \quad (3.2)$$

É importante lembrar que a concepção atual da Mecânica Quântica é probabilística e não determinista como se afirma neste primeiro postulado. Sendo assim, na Mecânica Quântica atual este postulado não é mais aceito.

2. *Em vez da infinidade de órbitas que seriam possíveis segundo a mecânica clássica um elétron só pode se mover em uma órbita na qual seu momento angular orbita L é um múltiplo inteiro de $\hbar$ (a constante de Planck dividida por 2π).*

Para descrever as órbitas estacionárias e discretas do átomo, com o intuito de provar sua estabilidade, Bohr precisaria encontrar um novo "ingrediente" para determinar os raios destas possíveis órbitas do elétron no átomo de hidrogênio. Este "ingrediente" não foi o primeiro que ele tentou incluir, mas pode-se dizer que é o mais simples de utilização prática e ao mesmo tempo o mais difícil de ser provado. A imposição do momento angular (ingrediente) feita por Bohr no átomo de hidrogênio, vem a estabelecer a

quantização desta grandeza, ou seja, o momento angular só poderia obter valores múltiplos de uma grandeza fundamental da natureza. Sendo assim temos:

$$L = n\hbar \quad (3.3)$$

Através do momento angular, Bohr consegue determinar o raio da menor órbita do átomo de hidrogênio utilizando para isto, a junção entre a mecânica clássica (força coloubiana entre o elétron e o próton) e a mecânica quântica (com a quantização do momento angular). De acordo com a segunda lei de Newton, sabemos que:

$$\frac{ke^2}{r^2} = \frac{mv^2}{r} \quad (3.4)$$

O momento angular L para uma partícula de massa m e velocidade v estando numa trajetória de raio r , é definido matematicamente como: $L = mvr$. Desta forma sabemos que:

$$mvr = n\hbar \quad (3.5)$$

$$v = \frac{n\hbar}{mr} \quad (3.6)$$

$$\frac{ke^2}{r^2} = \frac{m}{r} \cdot \frac{n^2\hbar^2}{m^2r^2} \quad (3.7)$$

$$ke^2 = \frac{n^2\hbar^2}{rm} \quad (3.8)$$

$$r = n^2 \frac{\hbar^2}{m \cdot k \cdot e^2} \quad (3.9)$$

Esta última equação, podemos interpretá-la como sendo o resultado de uma imposição no qual o momento angular é quantizado para um modelo clássico do átomo. De uma maneira geral esta equação pode ser escrita na forma:

$$r_n = n^2 r_B \quad (3.10)$$

Portanto:

$$r_B = \frac{\hbar^2}{mke^2} \quad (3.11)$$

3. *Apesar de estar constantemente acelerado, um elétron que se move em uma dessas órbitas possíveis não emite radiação eletromagnética. Portanto sua energia total E permanece constante.*

A equação do raio das órbitas possíveis para o elétron no átomo de hidrogênio, nos mostra a partir dela quais são as energias possíveis para cada órbita. Para $n=1$ temos a menor quantidade de energia possível para o elétron, pois de acordo com a mecânica clássica um sistema físico busca o regime de menor energia. Sendo assim temos a órbita de maior estabilidade para o átomo de hidrogênio, e nela o elétron não irradia energia como se pensava. De uma forma clássica, se tomarmos um ponto no infinito como referência e conseqüentemente neste ponto a energia potencial será nula $E_\infty = 0$, na órbita $n=1$ podemos determinar da seguinte forma:

$$E_1 = -\frac{ke^2}{2r} \quad (3.12)$$

4. É emitida radiação eletromagnética se um elétron, que se move inicialmente sobre uma órbita de energia total E_i , muda seu movimento descontinuamente de forma a se mover em uma órbita de energia total E_f . A frequência da radiação emitida ν é igual à quantidade $E_f - E_i$ dividida pela constante de Planck h .

Este último postulado trata o que os livros chamam de *salto quântico*. O salto quântico é assim chamado quando o elétron passa de uma órbita para outra a partir de uma *absorção* ou *emissão* de um fóton cuja a energia constitui uma frequência ν dada pela razão da diferença de energia entre as órbitas e a constante de Planck, provando assim a estabilidade do átomo e não a ideia do colapso da matéria se o elétron espiralar caindo no núcleo.

Já sabemos que, de acordo com a teoria eletromagnética clássica, toda partícula carregada (neste caso o elétron) quando acelerada, deveria emitir necessariamente uma radiação eletromagnética, diminuindo assim o raio de sua órbita e isso aumentaria sua frequência onde passaria a emitir radiação com frequências cada vez maiores e portanto a emissão da radiação deve ser com espectro contínuo e não em um espectro de comprimentos de ondas discretos, e além disso o tempo no qual ele cairia no núcleo é da ordem de 10^{-12} s e desta forma o átomo de hidrogênio não poderia existir estável na natureza. Sendo assim conclui-se que a existência do mesmo e estável na natureza é incompatível com o modelo planetário de Rutherford e com o eletromagnetismo de Maxwell. Bohr então busca encontrar um mecanismo que explicasse essa incompatibilidade. Na descrição de seus postulados, ele propõe que os níveis de energia são estáveis, ou seja, não há radiação contínua e variam por quanta de energia, $\Delta E = h\nu$. O espectro atômico de radiação é discreto porque os níveis de energia são discretos.

Para [Resnick \(1979\)](#) estes postulados conseguem misturar a física clássica e não clássica, onde supõe-se que o elétron se movendo em uma órbita circular obedece à mecânica clássica, e no entanto a ideia não clássica de quantização do momento angular é incluída. Ainda segundo [Resnick \(1979\)](#), supõe-se que o elétron obedeça a uma característica da teoria eletromagnética clássica (a lei de Coulomb), e no entanto não obedeça a outra característica (a emissão de radiação por um corpo carregado).

Vejamos a seguir, alguns exemplos que comprovam os postulados de Bohr, no qual utilizou a teoria quântica proposta por Max Planck para explicar a existência estável do átomo de hidrogênio.

Exemplo: 13.(UFPE – 2005) Um átomo de hidrogênio no estado excitado correspondente ao nível $n = 3$ ($E_3 = -1,51\text{ eV}$), decai para o estado fundamental $n = 1$ ($E_1 = -13,6\text{ eV}$), podendo emitir radiação em três comprimentos de onda diferentes. Determine o menor comprimento de onda que será emitido, em unidades de 10^{-8} m.

Solução: O exercício remonta o fato referente ao que chamamos de *salto quântico*. Ao passar do nível $n = 3$ para o nível fundamental $n = 1$, o átomo deverá emitir um fóton cujo seu menor valor de comprimento de onda é dado pela expressão $E_{\text{fóton}} = E_3 - E_1$. Assim temos:

$$E_{\text{fóton}} = E_3 - E_1$$

$$h \cdot \frac{c}{\lambda} = E_3 - E_1$$

Vale lembrar que a constante de Planck é $h = 6,6 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$ e que $1\text{ eV} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$, portanto devemos no segundo membro da equação converter em joule a energia referente aos níveis de energia do problema. Logo:

$$h \cdot \frac{c}{\lambda} = E_3 - E_1$$

$$6,6 \cdot 10^{-34} \cdot \frac{3 \cdot 10^8}{\lambda} = [-1,51 - (-13,6)] \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}$$

$$6,6 \cdot 10^{-34} \cdot \frac{3 \cdot 10^8}{\lambda} = (-1,51 + 13,6) \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}$$

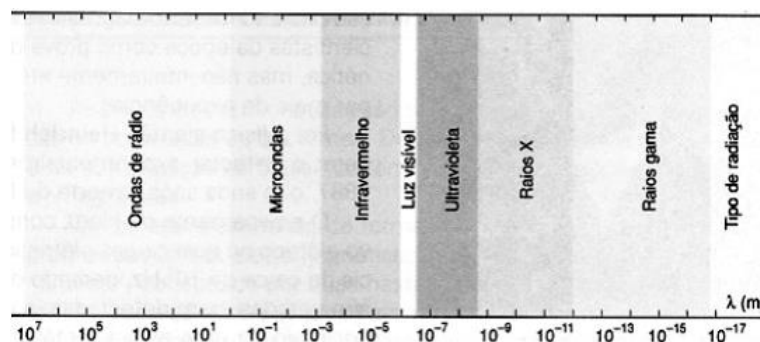
$$\frac{19,8 \cdot 10^{-26}}{\lambda} = 19,34 \cdot 10^{-19}$$

$$\frac{19,8 \cdot 10^{-26}}{19,34 \cdot 10^{-19}} = \lambda$$

$$\lambda = 1,02 \cdot 10^{-7}$$

Como o resultado deve ser expresso em unidades de $10^{-8}m$, logo $\lambda = 10,2 \cdot 10^{-8}m$.

Exemplo: 14. (AFA-2013) O elétron do átomo de hidrogênio, ao passar do primeiro estado estacionário excitado, $n = 2$, para o estado fundamental, $n = 1$, emite um fóton. Tendo em vista o diagrama da figura abaixo, que apresenta, de maneira aproximada, os comprimentos de onda das diversas radiações, componentes do espectro eletromagnético, pode-se concluir que o comprimento de onda desses fótons emitidos corresponde a uma radiação na região do(s)



- a) raios gama b) raios X c) infravermelho d) ultravioleta

Solução: Aplicaremos a equação referente ao salto quântico e a partir deste ponto determinaremos o comprimento de onda da radiação.

$$E_{fóton} = E_2 - E_1$$

$$h \cdot \frac{c}{\lambda} = E_2 - E_1$$

$$6,63 \cdot 10^{-34} \cdot \frac{3 \cdot 10^8}{\lambda} = [-3,4 - (-13,6)] \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}$$

$$\frac{19,89 \cdot 10^{-26}}{\lambda} = 16,32 \cdot 10^{-19}$$

$$\lambda = \frac{19,89 \cdot 10^{-26}}{16,32 \cdot 10^{-19}} = 1,22 \cdot 10^{-7} m$$

Com o valor encontrado de $1,22 \cdot 10^{-7} m$ e analisando a figura do problema, temos que a resposta para esta radiação é da região do ultravioleta.

Aula 9: Comportamento ondulatório da matéria e o Princípio da Incerteza

1. Iniciar a aula fazendo uma breve revisão da aula 8 com o objetivo de sanar as possíveis dúvidas,
 2. Assistir ao vídeo: <<https://www.youtube.com/watch?v=GXAYW4a3OZY>>, que descreve o comportamento ondulatório da matéria e o experimento da dupla fenda. Parar o vídeo em alguns pontos da exibição para abrir um debate com os alunos;
 3. Discutir e demonstrar a equação que define a relação entre o comprimento de onda e o momento linear;
 4. Explicar o experimento de Davisson-Germer que comprovou o comportamento ondulatório do elétron. Neste experimento Davisson e Germer verificavam a reflexão do elétron em um alvo de níquel e quando perceberam a difração de onda dos elétrons. Para ajuda-los nesta discussão, utilize a imagem do experimento que se encontra no endereço eletrônico <<https://slideplayer.com.br/slide/359071/>>.
 5. Assistir ao vídeo: <<https://www.youtube.com/watch?v=2n8YKivjF9g>>, que trata o caráter probabilístico da mecânica quântica fundamentada no princípio da incerteza. Um fator relevante neste trecho da aula está ligado ao ato de medir. Na Física, o uso do aparelho de medição poderá afetar no resultado da medida em algumas situações. Podemos usar o exemplo de aferir a temperatura de um corpo com um termômetro. Esta medida é baseada no princípio da troca de calor entre dois corpos, e para tanto quando a medida da temperatura é feita por exemplo em um copo com água, primeiro haverá a troca de calor entre a água do copo e o termômetro. Porém se fôssemos aferir com o mesmo termômetro a medida da temperatura de uma gota de água, o resultado encontrado não estará correto. O mesmo ocorre quando se mede a medida da posição do elétron, ou seja, o aparelho de certa forma interfere nesta medida e é assim que se baseia o princípio da incerteza de Heisenberg.
 6. Finalize a aula com a resolução de exercícios, principalmente de cunho teórico para fortalecer a aprendizagem dos alunos.
-

A dualidade onda-partícula

A primeira comprovação da teoria quântica foi com o efeito fotoelétrico, mas ainda havia pouca aceitação. Alguns físicos achavam que a teoria não estava completa, pois a mesma não mostrava nenhuma relação entre o caráter corpuscular com o ondulatório da radiação. Segundo Rosa (2014) uma descoberta experimental de grande importância para a discussão sobre a natureza dos raios X (radiação eletromagnética) foi o efeito Compton. A primeira tentativa para explicar o espalhamento de raios X, sem a utilização da teoria quântica, foi realizada por J.J. Thomson na primeira década do séc. XX. Thomson, obteve uma confirmação sobre o espalhamento dos raios X apenas para aqueles que possuíam baixo poder de penetração. Mas quando utilizou-se raios X de maior poder de penetração, as previsões não condiziam com os efeitos encontrados (ROSA, 2014). Em 1922, uma nova interpretação é dada por Arthur Compton, onde ele sugere que o elétron deva ser tratado como uma pequeníssima esfera, no qual sofreria uma colisão elástica com o fóton, levando-se em conta a energia e o momentum do quantum de radiação (ROSA, 2014). O experimento realizado por Compton, consistia em um feixe de raios X de comprimento de onda λ , incidisse sobre uma amostra (alvo) de grafite. Realizou a medição da intensidade em função dos comprimentos de onda dos raios X espalhados após atingirem o alvo, com vários ângulos diferentes. De acordo com Rosa (2014), Compton calculou o efeito utilizando a dinâmica relativística, onde descreveria o momentum e a energia do elétron, observando que os fótons provenientes da radiação (raios X), possuiriam energia $E = h\nu$, e consequentemente um momento linear $p = h\nu/c$. O experimento de Compton foi de enorme importância para que a hipótese de quantização da radiação passasse a ser levada a sério (ROSA, 2014, p. 132). Apesar do efeito Compton comprovasse o caráter corpuscular da radiação, ainda não existia uma teoria que engajassem com a hipótese ondulatória. A partir deste ponto, o nome que irá chegar a solução do problema da unificação do caráter dual da radiação e estender estas propriedades para a matéria é Louis de Broglie.

4.1 O importante papel de de Broglie



Louis de Broglie

Figura 17: Fonte: http://www.nobelprize.org/nobel_prizes/physics/laureates/1929/broglie-bio.html

Louis Victor Pierre Raymond, nasceu em Dieppe na França, no dia 15 de agosto de 1892 e morreu em 19 de março de 1987 na cidade de Louveciennes. Herdou o título de Duque de Broglie, após a morte de seu irmão Maurice de Broglie no qual o influenciou com suas pesquisas científicas. Pertencente a uma família nobre, Louis de Broglie obteve sua graduação em letras, com apenas dezoito anos de idade, realizando um trabalho sobre a história da idade média. Iniciou o curso de direito, mas o contato com artigos científicos e a influência do trabalho de seu irmão sobre o comportamento ondulatório dos elétrons, o fizeram seguir um caminho para a Física. Louis de Broglie, concentrou sua atenção na questão dos quanta de luz e na necessidade de conciliar essa ideia com a teoria ondulatória da radiação (ROSA, 2014, p. 137). Foi em 1911, que Louis de Broglie, começou a aprofundar seus conhecimentos em Física, com leituras sobre os trabalhos de alguns físicos importantes da época como: Albert Einstein, Hendrick Lorentz, Max Planck entre outros. Mas foi no campo da mecânica analítica que De Broglie se interessou mais, pois via nas equações de Hamilton-Jacobi a possibilidade de encontrar a solução de conciliar as teorias ondulatória e corpuscular da radiação. No final de 1913 recebeu o título de licenciado em ciências, em seguida passou a fazer parte do exército francês onde permaneceu por um período de cinco anos prestando serviços de radiotelegrafia. Após a primeira guerra, Louis de Broglie dedicou-se a investigação experimental dos raios X, no laboratório de seu irmão. Dessas investigações iniciais, saíram seus primeiros trabalhos, porém não tratavam da natureza da radiação. Em 1922, após ter estudado os trabalhos de Einstein sobre a radiação, Louis de Broglie estava convencido de que havia uma necessidade de se desenvolver uma teoria que combinasse as teorias corpuscular e ondulatória (ROSA, 2014, p. 141).

4.2 As ondas de matéria de de Broglie

O experimento de dupla fenda, realizado por Thomas Young, mostra o comportamento ondulatório da luz e o efeito fotoelétrico juntamente com o efeito Compton comprovam o caráter corpuscular da luz. Esses experimentos foram muito importantes para a idealização do comportamento dual da matéria, que será proposto por de Broglie em sua tese de doutorado, defendida no final de 1924. Segundo Nussenzveig (1998) Louis de Broglie, sugeriu em sua tese

uma série de ideias especulativas baseadas nos resultados até então obtidos para fótons na teoria de Bohr, e o aparecimento de números inteiros na condição de quantização de Bohr para as órbitas dos elétrons no átomo de hidrogênio foi uma pista importante. De acordo com [Nussenzveig \(1998, p. 272\)](#) a determinação do movimento estacionário dos elétrons no átomo introduz números inteiros; ora, até aqui os únicos fenômenos em que intervinham inteiros na física eram os de interferência e modos normais de vibração. Esse fato me sugeriu a ideia de que também os elétrons não deveriam ser considerados somente como corpúsculos mas de que deveriam estar associados com periodicidade. Na visão de de Broglie, não só os fótons possuem comportamento dual, mas sim toda a matéria. O comportamento dual é estendido por de Broglie para as partículas e elas passariam a serem vistas também como uma onda, uma *onda de matéria*. Assim como um fóton tem associada a ele uma onda luminosa que governa seu movimento, também uma partícula material (como um elétron) tem associada a ele uma onda de matéria que governa seu movimento ([RESNICK, 1979](#)). Na visão de de Broglie, não só as partículas de luz mas também a matéria carrega uma energia associada a frequência ν da onda que comanda o seu movimento. Esta energia é dada pela expressão $E = h\nu$. Segundo [Halliday Robert Resnick \(2012\)](#) em 1916, Einstein ampliou o conceito de quantum de luz (fóton) ao propor que um quantum de luz possui um momento linear. Para um fóton de energia E , possui um momento linear associado a esta energia dada pela expressão: $E = pc$, onde c é a velocidade da luz. Desta forma, na ampliação dos conceitos para a matéria, esta energia pode ser escrita como $E = p\nu$, onde ν é a velocidade da partícula. Juntando as duas equações, chegaremos a uma expressão matemática onde iremos ter a unificação do caráter corpuscular com o ondulatório.

$$h\nu = p\nu \quad (4.1)$$

$$h\frac{\nu}{\lambda} = p\nu \quad (4.2)$$

$$\frac{h}{\lambda} = p \quad (4.3)$$

$$\lambda = \frac{h}{p} \quad (4.4)$$

A importância desta teoria proposta por de Broglie, é tal que a condição de quantização de Bohr passa a ser explicável. O segundo postulado de Bohr propõe a quantização do momento angular, ou seja, os elétrons pertencem a uma órbita cujo o seu momento angular deveria ser um múltiplo inteiro de $\hbar$. Se pudermos então associarmos um elétron a uma onda, este elétron deve preencher sua órbita (de raio r) com uma onda e esta deve se fechar. Sendo assim, no perímetro desta órbita devemos ter um número inteiro de comprimentos de onda. Vejamos:

$$2 = n\lambda \quad (4.5)$$

$$2 = n\frac{h}{p} \quad (4.6)$$

$$rp = n\frac{h}{2\pi} \quad (4.7)$$

$$L = n\hbar \quad (4.8)$$

A equação encontrada acima, é a equação da conservação do momento angular proposto por Bohr para explicar a estabilidade do átomo de hidrogênio. Só restava agora uma comprovação experimental, para que a teoria fosse aceita. [Nussenzveig \(1998\)](#) afirma que durante a sua defesa da tese, de Broglie foi perguntado se suas ondas de matéria poderiam ser detectadas experimentalmente, e a sua resposta foi que isso só seria possível fazendo

experiências de difração de elétrons por cristais. Broglie não tinha conhecimento, mas nesta época já existiam alguns dados experimentais iniciais acerca da difração de elétrons realizada pelos físicos Clinton Davisson e Lester Germer.

4.3 O experimento de Davisson-Germer

Uma teoria física, cai na aceitação da comunidade acadêmica quando há uma comprovação experimental. Coube aos físicos Davisson e Germer, nos EUA, comprovarem experimentalmente as ondas de matéria de de Broglie em 1927. O experimento consistia em difração de elétrons numa amostra cristalina de níquel.

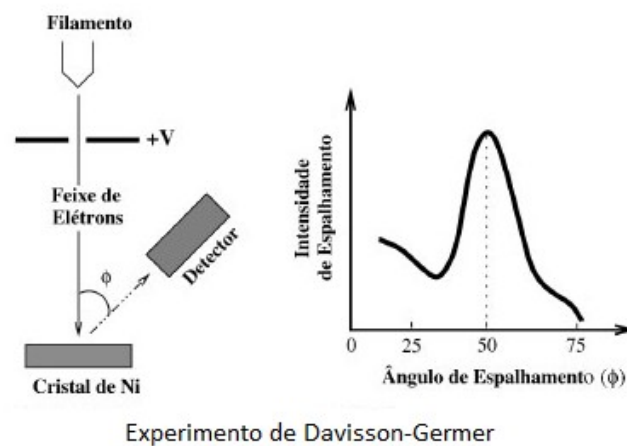


Figura 18: Fonte: http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttextpid=S0100-40422008000700046

Davisson e Germer estavam estudando a reflexão de elétrons em um alvo de níquel quando, acidentalmente, observaram a difração das ondas dos elétrons (PERUZZO, 2013). De acordo com Nussenzveig (1998), para eliminar o óxido formado devido ao acidente, o alvo foi submetido a um tratamento térmico que o transformou de um agregado policristalino, em um pequeno número de monocristais. A investigação veio a confirmar uma formação de máximos e mínimos (comportamento ondulatório semelhante ao experimento de dupla fenda). Em 1937, Davisson e G.P. Thomson ganharam o prêmio Nobel por demonstrar que os elétrons são ondas (NUSSENZVEIG, 1998).

Neste momento, propomos três exercícios nos quais contemplam a aplicação da equação de de Broglie para o que chamamos de ondas de matéria.

Exemplo: 15.(UEM) Ao determinarmos o comprimento de onda de De Broglie de um elétron com uma velocidade de $5 \cdot 10^7$ m/s e uma massa de $9,11 \cdot 10^{-31}$ kg, obtemos: Dado: $h = 6,63 \cdot 10^{-34}$ Js

Solução: A resolução do exemplo proposto é uma simples aplicação da equação de de Broglie para o comportamento ondulatório do elétron. Logo, temos:

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{m \cdot v}$$

$$\lambda = \frac{6,63 \cdot 10^{-34}}{9,11 \cdot 10^{-31} \cdot 5 \cdot 10^7}$$

$$\lambda = \frac{6,63 \cdot 10^{-34}}{45,55 \cdot 10^{-24}} = 0,1455 \cdot 10^{-10}$$

$$\lambda = 1,46 \cdot 10^{-11} m$$

Exemplo: 16. Qual o comprimento de onda associado a um feixe de elétrons de 100 eV de energia cinética?

Dados: $h = 6,63 \cdot 10^{-34} Js$; $c = 3 \cdot 10^8 m/s$; $m_e = 9,11 \cdot 10^{-31} kg$; $1eV = 1,6 \cdot 10^{-19} J$.

Solução: Para a solução deste problema devemos relacionar a energia cinética do elétron com seu momento linear, pois assim aplicaremos a teoria associada ao comportamento ondulatório do elétron de acordo com a concepção de de Broglie.

Sabemos que:

$$E_c = \frac{m \cdot v^2}{2}$$

Agora, iremos multiplicar o segundo membro da equação por $\frac{m}{m}$. Portanto, temos:

$$E_c = \frac{m \cdot v^2}{2} \cdot \frac{m}{m}$$

$$E_c = \frac{m^2 \cdot v^2}{2m}$$

Como sabemos, $p = mv$, logo:

$$E_c = \frac{p^2}{2m}$$

$$p^2 = E_c \cdot 2m$$

$$p = \sqrt{2m \cdot E_c}$$

Neste ponto da solução, utilizaremos a equação de de Broglie para o comprimento de onda associado ao elétron.

$$\lambda = \frac{h}{p}$$

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2m \cdot E_c}}$$

Para facilitar o entendimento da resolução do exercício, vamos multiplicar o segundo membro da equação por $\frac{c}{c}$. Desta forma temos:

$$\lambda = \frac{h \cdot c}{\sqrt{2m \cdot E_c} \cdot c}$$

$$\lambda = \frac{h \cdot c}{\sqrt{2m \cdot E_c \cdot c^2}}$$

Vamos agora calcular alguns fatores do segundo membro da equação separadamente. O produto $h \cdot c$ é dado por:

$$h \cdot c = \frac{6,63 \cdot 10^{-34} Js \cdot 3 \cdot 10^8 m/s}{1,6 \cdot 10^{-19} J}$$

$$h \cdot c \cong 12,4 \cdot 10^{-7} eV \cdot m$$

$$h \cdot c \cong 1240 \cdot 10^{-9} eV \cdot nm$$

$$h \cdot c \cong 1240 eV \cdot nm$$

Já para o produto $2m \cdot E_c \cdot c^2$, devemos ter o cuidado em obter o resultado do produto $2m \cdot c^2$, pois o mesmo estará em joule e a energia cinética do problema está em elétron-volt. Desta forma temos que:

$$2m \cdot c^2 = 2 \cdot 9,11 \cdot 10^{-31} kg \cdot (3 \cdot 10^8 m/s)^2$$

$$2m \cdot c^2 = 163,98 \cdot 10^{-15} J$$

$$2m \cdot c^2 = \frac{163,98 \cdot 10^{-15}}{1,6 \cdot 10^{-19}}$$

$$2m \cdot c^2 = 102,48 \cdot 10^4$$

$$2m \cdot c^2 \cong 1,0 MeV$$

Neste momento, vamos substituir os resultados encontrados separadamente na expressão do comprimento de onda que irá nos dar o resultado procurado.

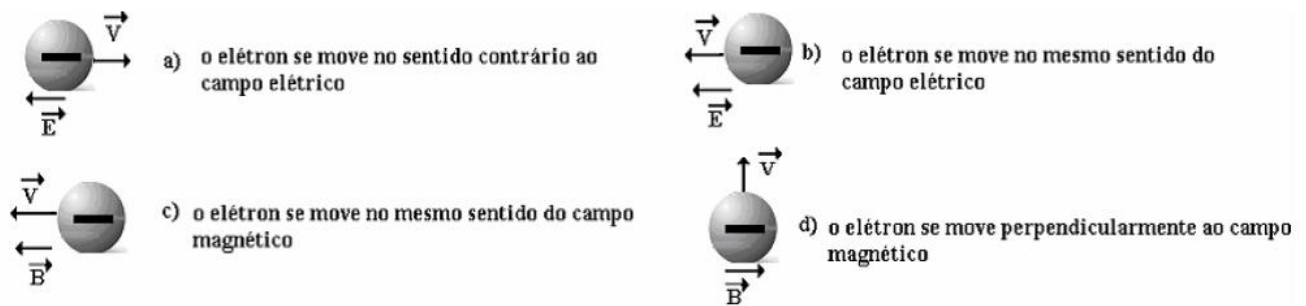
$$\lambda = \frac{h \cdot c}{\sqrt{2m \cdot E_c \cdot c^2}}$$

$$\lambda = \frac{1240 eV \cdot nm}{1,0 MeV \cdot \sqrt{E_c}}$$

$$\lambda = \frac{1240 eV \cdot nm}{1,0 MeV \cdot \sqrt{100}} \cong 1,23 \cdot 10^{-10} m$$

Observação: Para elétrons de pouca energia, o fenômeno da difração só poderá ser realizado num local com um vácuo próximo do ideal, pois desta forma os elétrons não poderiam interagir com as partículas que estivessem dispersas pelo meio em questão. Já para elétrons com energias elevadas, a difração já é mais fácil de ser obtida.

Exemplo: 17. (UPE-2008 modificada) Considere um elétron em movimento de acordo com as alternativas a seguir.



Analise as afirmativas e preencha os parênteses com **V** para verdadeiro e **F** para falso.

- () Na alternativa (a), o comprimento de onda de De Broglie diminui com o tempo.
- () Na alternativa (b), o comprimento de onda de De Broglie aumenta com o tempo.
- () Na alternativa (c), o comprimento de onda de De Broglie diminui com o tempo.
- () Na alternativa (d), o comprimento de onda de De Broglie aumenta com o tempo.
- () Nas alternativas (c) e (d), o comprimento de onda de De Broglie permanece constante.

Solução: O comportamento ondulatório do elétron será uma chave importante para a solução deste problema. Sabendo que o comprimento de onda de De Broglie é dado por $\lambda = \frac{h}{p}$, e assim analisaremos o seu movimento no interior de um campo elétrico e também de um magnético, de acordo com a figura.

Na figura **a)** temos um elétron que se move em sentido contrário ao campo elétrico, e de acordo com a teoria clássica, ele estaria sendo acelerado pela força elétrica e assim sua velocidade aumenta com o tempo, ou seja, aqui ele estaria realizando um movimento acelerado. Como o momento linear depende da velocidade, e como ela aumenta com o tempo, o momento linear também aumentará e desta forma o comprimento de onda de De Broglie **diminui**.

Porém, na figura **b)** o elétron se move a favor do campo elétrico, e desta maneira a força elétrica atua em sentido contrário ao seu movimento retardando-o. Com isso, a velocidade diminui fazendo com que o momento linear também diminua e com isso o comprimento de onda de De Broglie **aumenta**.

Finalmente, nas figuras **c)** e **d)** a presença do campo magnético não afeta o módulo da velocidade do elétron, onde conseqüentemente o momento linear também não será afetado, e com isto o comprimento de onda de De Broglie permanecerá **constante**. Portanto fica assim a resposta para este problema: **VVFFV**

4.4 O experimento da dupla fenda

O experimento de Thomas Young, foi fundamental para a conclusão do comportamento ondulatório da luz. A difração de elétrons, realizada pelo experimento de Davisson-Germer, nos mostra o comportamento ondulatório da matéria. Quando os físicos realizaram o experimento da dupla fenda com os elétrons, estes mostraram um padrão de interferência sobre um anteparo, idêntico ao realizado com a luz. Mas ao tentar observar este fato, o padrão de interferência era desfeito como se houvesse uma "conspiração" do mundo quântico com o observador. Em outras palavras podemos dizer, que o simples fato de tentar identificar por qual das fendas passava o elétron, o observador interferia no experimento. Este fato intrigante, levou ao físico Werner Heisenberg (1901 – 1976) em 1927 criar uma teoria que levaria a uma concepção probabilística da mecânica quântica, que ele chamou de princípio da incerteza. Para Heisenberg, o experimento da dupla fenda não deixa dúvidas que os elétrons chegariam ao anteparo onde ele conclui que a mecânica quântica não é compatível com o conceito de trajetória.

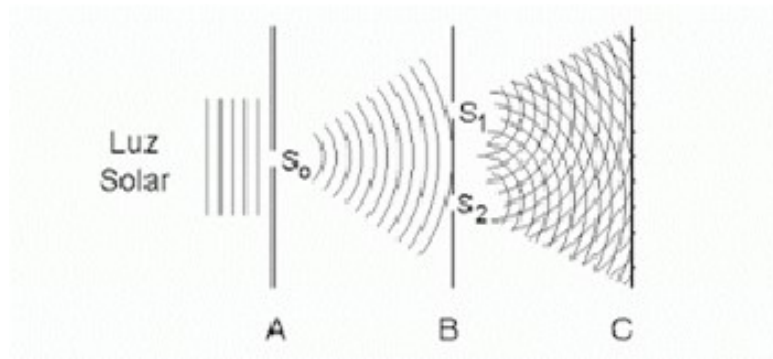


Figura 19: Fonte: <http://gilghamesh.blogspot.com.br/2013/01/o-experimento-da-dupla-fenda-e-o.html>

O princípio da incerteza



Werner Heisenberg

Figura 20: Fonte: <https://pt.wikipedia.org/wiki/Werner_Heisenberg>

Sabemos que a física clássica, regida pelas leis de Newton, possui uma identidade determinística no qual nos mostra que se conhecermos a velocidade e a posição inicial de um móvel, este desenvolvendo um M.R.U (movimento retilíneo e uniforme) por exemplo, podemos facilmente determinarmos sua posição para qualquer intervalo de tempo, sem que o observador influencie no resultado. Este fato acontece para qualquer tipo de movimento, até mesmo os dotados de aceleração, basta sabermos as suas variáveis iniciais. Contudo, isso deixa claro que o mundo macroscópico é determinístico, e os físicos achavam que o mesmo aconteceria com o mundo microscópico. Sabe-se que Heisenberg e Bohr contestaram essa analogia. Para Resnick (1979), Heisenberg e Bohr concluíram que a interpretação probabilística era fundamental em mecânica quântica, e deve-se abandonar o determinismo. Entrando no mundo quântico, vamos tomar um experimento ("super microscópio" de abertura angular α) destinado a medir a posição e o momento de uma partícula como um elétron. Para medirmos a posição do elétron neste experimento, é necessário que o iluminemos com luz de comprimento de onda λ . A posição do elétron é, por conseguinte, incerta por uma quantidade δx , o qual é dado pela teoria óptica como padrão:

$$\Delta x \geq \frac{\lambda}{\sin \alpha} \quad (5.1)$$

No entanto, o fato de que a radiação ser composta de fótons significa que cada vez que a partícula é atingida por um fóton que recua, como na dispersão de Compton. De acordo com [Rae \(2007\)](#) o impulso do recuo poderia naturalmente ser calculada se não o fizermos através do qual aponta na lente os fótons entrou no microscópio, o x Componente do momento da partícula é sujeita a um erro δx onde

$$\Delta p_x \geq p \sin \alpha \quad (5.2)$$

Sabemos que:

$$p = \frac{h}{\lambda} \quad (5.3)$$

$$p = \frac{2\pi\hbar}{\lambda} \quad (5.4)$$

Portanto, substituindo na equação acima temos:

$$\Delta p_x \geq \frac{2\pi\hbar \sin \alpha}{\lambda} \quad (5.5)$$

Combinando as duas equações, chegamos a primeira equação do princípio da incerteza:

$$\Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2} \quad (5.6)$$

Nesta equação concluímos que se tentarmos melhorar o resultado na medida da posição por exemplo, vamos aumentar o erro na medição do momento. Para [Resnick \(1979\)](#), o princípio da incerteza diz na realidade é que mesmo que tenhamos instrumentos ideais nunca poderemos obter resultados melhores que:

$$\Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2} \quad (5.7)$$

Um outro fato importante sobre o princípio da incerteza que muitos livros de Física do ensino médio não abordam é sobre a medida da energia e o tempo gasto para realizar esta medição. A expressão matemática que relaciona essas duas grandezas é dada por:

$$\Delta E \Delta t \geq \frac{\hbar}{2} \quad (5.8)$$

Quanto maior for a precisão na medida da energia de uma partícula como um elétron ou um fóton, maior será a imprecisão na medida do tempo no qual essas partículas possuem aquela energia. Para [Resnick \(1979\)](#):

se h , ou $\hbar$, fossem zero não haveria nenhuma limitação básica sobre nossas medidas, o que é um ponto de vista clássico. Mais uma vez é o fato de h ser pequeno que tira o princípio da incerteza do alcance de nossas experiências cotidianas. Isto é análogo ao que ocorre na relatividade, onde a pequenez da razão v/c nas situações macroscópicas tira a relatividade do alcance de experiências cotidianas.

Isso mostra que o princípio da incerteza é relevante apenas para os fenômenos quânticos, porém apresenta uma profunda interação entre a natureza do nível atômico e os experimentos utilizados para suas observações. Vejamos a seguir uma aplicação do princípio da incerteza no exemplo abaixo.

Exemplo: 18. (ITA - 2005) Num experimento, foi de $5,0 \cdot 10^3$ m/s a velocidade de um elétron, medida com a precisão de 0,003 por cento. Calcule a incerteza na determinação da posição do elétron, sendo conhecidos: massa do elétron $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31}$ kg e constante de Planck reduzida $\hbar = 1,1 \cdot 10^{-34}$ J s.

Solução: Este problema é baseado na concepção probabilística da Mecânica Quântica e usaremos o princípio da incerteza de Heisenberg para resolvê-lo. O texto fala que a incerteza da velocidade é de 0,003 por cento. Sendo assim, iremos calcular primeiro a incerteza do momento linear.

$$\Delta p = m \cdot \Delta v$$

$$\Delta p = 9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 0,003 \cdot 10^{-2} \cdot 5,0 \cdot 10^3$$

$$\Delta p = 1,365 \cdot 10^{-31} \text{ kg} \cdot \text{m/s}$$

Antes de aplicar a equação da incerteza de Heisenberg, é importante ficar atento ao fato de que na equação temos a constante de Planck h e não a constante de Planck reduzida $\hbar$. Como sabemos,

$$\hbar = \frac{h}{2\pi}$$

logo o termo $\frac{h}{4\pi}$ será transformado em $\frac{\hbar}{2}$, e assim temos que:

$$\Delta x \cdot \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$$

$$\Delta x \cdot 1,365 \cdot 10^{-31} \geq \frac{1,1 \cdot 10^{-34}}{2}$$

$$\Delta x \geq \frac{0,55 \cdot 10^{-34}}{1,365 \cdot 10^{-31}} \geq 4,03 \cdot 10^{-4} \text{ m}$$

$$\Delta x \geq 4,03 \cdot 10^{-1} \text{ mm}$$

O resultado encontrado nos mostra que o elétron poderá estar numa região do espaço a uma distância de $4,03 \cdot 10^{-1}$ mm do ponto no qual foi feita a medida da incerteza de sua velocidade.

Exemplo: 19. Quando um átomo absorve um fóton, ele retém a energia de excitação durante um intervalo de tempo de 1 ns antes de emití-la para um nível de energia mais baixo. Estime a incerteza desse estado de energia excitado em joule. Dado: $h = 6,63 \cdot 10^{-34}$ J s.

Solução: Aqui iremos utilizar a expressão matemática da incerteza de Heisenberg referente a energia e o tempo. Assim temos:

$$\Delta E \cdot \Delta t \geq \frac{h}{4\pi}$$

$$\Delta E \cdot 1 \cdot 10^{-9} \geq \frac{6,63 \cdot 10^{-34}}{4\pi}$$

$$\Delta E \cdot 1 \cdot 10^{-9} \geq 0,528 \cdot 10^{-34}$$

$$\Delta E \geq 0,528 \cdot 10^{-25} J$$

Aqui deixamos para o leitor como forma de exercício, verificar qual diferença entre os níveis de energia do átomo de hidrogênio no que se refere a resposta do exemplo anterior.

Aula 10: Avaliação Final

1. Agrupar os alunos em duplas ou em trios, para que eles possam construir os seus mapas conceituais, fazendo com que o conceito mais inclusivo seja o da Mecânica Quântica, semelhante ao que foi desenvolvido na aula 5. Ao término desta atividade, o professor irá discutir com o grande grupo sobre os mapas conceituais desenvolvidos pelas duplas para que se possa dar algumas possíveis sugestões. (É possível que nesta atividade, o professor já observe uma melhora na construção e desenvolvimento dos mapas quando comparados com os que foram construídos com a relatividade);
 2. Após a discussão sobre os mapas conceituais construídos pelos alunos, passe um questionário com perguntas teóricas e de cunho matemático para verificar indícios de aprendizagem;
-

Referências

- BASSALO, J. M. F. Do átomo-filosófico de leucipo ao átomo-científico de dalton. *Revista Brasileira de Ensino de Física.*, 1980.
- BRENNAN, R. *Gigantes da física: Uma história da física moderna através de oito biografias*. [S.l.]: Rio de Janeiro: Editora Jorge Zahar, 2003.
- CARUSO, B. e. *Einstein*. [S.l.]: São Paulo - Editora Livraria da Física, 2013.
- CARUSO, V. O. F. *Física Moderna: origens clássicas e fundamentos quânticos*. 2ª edição. ed. [S.l.]: Rio de Janeiro -Elsevier, 2006.
- CHASSOT, A. *A ciência através dos tempos*. 9ª edição. ed. [S.l.]: São Paulo - Editora Moderna, 1994.
- GUIMARÃES, P. S. Uma proposta para o ensino do Átomo de bohr no ensino médio. *Dissertação de Mestrado MNPEF - UFRJ*, 2013.
- HALLIDAY ROBERT RESNICK, J. W. D. *Fundamentos da física: óptica e física moderna*. 9ª edição. ed. [S.l.]: Rio de Janeiro - LTC, 2012. v. 4.
- MASON, S. F. *História da Ciência: As principais correntes do pensamento científico*. 1ª edição. ed. [S.l.]: São Paulo - Editora Globo, 1962.
- NEWTON, I. *Principia: Princípios Matemáticos de Filosofia Natural*. 2ª edição. ed. [S.l.]: São Paulo - Editora da Universidade de São Paulo, 2012. Livro 1.
- NUSSENZVEIG, H. M. *Curso de Física básica*. 1ª edição. ed. [S.l.]: São Paulo - Edgard Blucher, 1998. v. 4.
- PARENTE, A. d. S. e. A. F. Os 100 anos do átomo de bohr. *Revista Brasileira de Ensino de Física.*, v. 35, n. 4, 2013.
- PERUZZO, W. E. P. e. T. G. d. P. J. *Física moderna e contemporânea: das teorias quânticas e relativísticas às fronteiras da física*. [S.l.]: São Paulo - Editora Livraria da Física, 2013. v. 1.
- PIRES, A. S. T. *Evolução das ideias da física*. [S.l.]: São Paulo - Editora Livraria da Física, 2011.
- RAE, A. I. M. *Quantum mechanics*. 5ª edição. ed. [S.l.]: New York - Taylor Francis, 2007.
- RESNICK, R. E. e R. *Física Quântica: átomos, moléculas, sólidos, núcleos e partículas*. 35ª reimpressão. ed. [S.l.]: Rio de Janeiro - Elsevier, 1979.

ROONEY, A. *História da Física: da filosofia ao enigma da matéria negra*. 1ª edição. ed. [S.l.]: São Paulo - M. Books do Brasil Editora Ltda, 2013.

ROSA, R. de Andrade Martins e P. S. *História da teoria quântica: a dualidade onda-partícula de Einstein a De Broglie*. [S.l.]: São Paulo- Editora Livraria da Física, 2014.

SILVA, M. J. da. Uma contribuição para o ensino dos postulados da teoria da relatividade restrita para alunos do ensino médio. *Dissertação de Mestrado - UFRPE*, 2004.